Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2000. Том 41, № 3

УДК 517.54

ОТОБРАЖЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИСКАЖЕНИЕМ НА ГРУППАХ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Н. С. Даирбеков

Аннотация: Установлены основные свойства отображений с ограниченным искажением на группах Гейзенберга: морфизм решений ассоциированных субэллиптических уравнений, локальная гёльдеровость, дифференцируемость почти всюду в смысле Пансю, открытость, дискретность, теорема Лиувилля, теорема о пределе последовательности отображений с ограниченным искажением и теорема о локальном гомеоморфизме. Библиогр. 12.

§ 1. Предварительные сведения

Отображения с ограниченным искажением на трехмерной группе Гейзенберга $\mathbb{H}^1$ введены в [1] и изучались в [1–4]. На них перенесены основные факты теории отображений с ограниченным искажением евклидовых пространств (см., например, [5, 6]). В частности, установлено свойство морфизма решений ассоциированных субэллиптических уравнений, и на этой основе доказаны локальная гёльдеровость, дифференцируемость почти всюду в смысле Пансю, открытость и изолированность отображений с ограниченным искажением в $\mathbb{H}^1$. Кроме того, доказаны теорема Лиувилля, теорема о пределе последовательности отображений с ограниченным искажением и теорема о локальном гомеоморфизме.

В настоящей работе мы изучаем отображения с ограниченным искажением на произвольной группе Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ и доказываем, что все свойства, перечисленные выше, сохраняются и в этом случае.

Независимый подход к изучению отображений с ограниченным искажением на группах Карно развивается в [7] на основе формулы замены переменной в интеграле Лебега. При значительно более сильных условиях гладкости отображения с ограниченным искажением на группах Карно изучались в [8].

В нашей модели группы Гейзенберга $\mathbb{H}^n$, $n \geq 1$, элементами $\mathbb{H}^n$ являются точки $p = (x,t) \in \mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$, а умножение задается по правилу

$$(x,t)(y,s) = \left(x+y, t+s+2\sum_{j=1}^{n}(y_j x_{n+j} - x_j y_{n+j})\right).$$

Алгебра Ли левоинвариантных векторных полей на $\mathbb{H}^n$ (*алгебра Гейзенберга*) имеет базис $X_1, \dots, X_{2n}, T$:

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2x_{n+j}\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_{n+j} = \frac{\partial}{\partial x_{n+j}} - 2x_j\frac{\partial}{\partial t} \quad (j=1,\dots,n), \quad T = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{1.1}$$

и соотношения

$$[X_j, X_{n+j}] = -4T, \quad j = 1,\dots,n, \tag{1.2}$$

Работа выполнена при поддержке INTAS (грант 97–0170).

являются единственными нетривиальными соотношениями между базисными полями.

Подпространство алгебры Ли группы $\mathbb{H}^n$, натянутое на X_j, $j = 1, \dots, 2n$, называется *горизонтальным пространством* алгебры Гейзенберга.

Горизонтальное касательное пространство HT ($= HT\mathbb{H}^n$) группы Гейзенберга — это подрасслоение касательного пространства T ($= T\mathbb{H}^n$), натянутое на векторы X_j, $j = 1, \dots, 2n$. Мы снабжаем слои HT скалярным произведением, объявляя набор $\{X_1(p), \dots, X_{2n}(p)\}$ ортонормированным базисом над каждой точкой $p \in \mathbb{H}^n$. Таким образом, $\mathbb{H}^n$ снабжено канонической субримановой структурой.

Однородная норма

$$|p| = (|x|^4 + t^2)^{1/4} \tag{1.3}$$

элементов $p = (x, t) \in \mathbb{H}^n$ порождает *однородную метрику* на $\mathbb{H}^n$:

$$\rho(p, q) = |p^{-1}q|. \tag{1.4}$$

Однородное растяжение δ_r, $r > 0$, действует на $\mathbb{H}^n$ по формуле $\delta_r(x, t) = (rx, r^2t)$, $\quad (x, t) \in \mathbb{H}^n$. Результат растяжения часто записывается следующим образом: $\delta_r(p) = rp$, $\quad \delta_{1/r}(p) = p/r$. Напомним, что δ_r является гомоморфизмом группы Ли $\mathbb{H}^n$, причем для однородной нормы (1.3) имеем $|\delta_r(p)| = r|p|$.

Шар (сферу) в однородной метрике с центром $p \in \mathbb{H}^n$ и радиусом $R > 0$ обозначим через $B_R(p)$ ($S_R(p)$), шар (сферу) с центром 0 обозначим через B_R (S_R).

Мера Лебега на $\mathbb{R}^{2n+1}$ является биинвариантной мерой Хаара на $\mathbb{H}^n$. Как обычно, для множества $A \subset \mathbb{H}^n$ обозначим через $\operatorname{int} A$, $\overline{A}$, ∂A и $|A|$ внутренность, замыкание, границу и меру A (если A измеримо).

Обозначим через $Q = 2n + 2$ *однородную размерность* группы $\mathbb{H}^n$. Напомним, что $|\delta_r(A)| = r^Q|A|$ для $A \subset \mathbb{H}^n$.

Пусть $U \subset \mathbb{H}^n$ — открытое множество и $1 \leq s < \infty$.

Пространство $L^s(U)$ функций, суммируемых в степени s, $1 \leq s < \infty$, на U, снабжено нормой

$$\|u\|_{s,U} = \left(\int\limits_U |u(q)|^s \, dq \right)^{1/s},$$

причем мы опускаем индекс U в обозначении нормы, если $U = \mathbb{H}^n$. Пространство функций, локально суммируемых в степени s на U, обозначается через $L^s_{\mathrm{loc}}(U)$.

Горизонтальное соболевское пространство $HW^{1,s}(U)$ ($HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$) определяется следующим образом: функция $u : U \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $HW^{1,s}(U)$ ($HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$), если $u \in L^s(U)$ и слабые производные $X_j u$, $j = 1, \dots, 2n$, принадлежат пространству $L^s(U)$ ($u, X_j u \in L^s_{\mathrm{loc}}(U)$, $j = 1, \dots, 2n$).

Горизонтальный градиент $\nabla u(p) = (X_1 u(p), \dots, X_{2n} u(p))$ функции $u \in HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$ определен почти всюду в U. Сопряженный оператор к ∇ обозначается через div. Для гладкой вектор-функции $v = (v_1, \dots, v_{2n})$ имеем

$$\operatorname{div} v = -\sum_{j=1}^{2n} X_j v_j.$$

Будем говорить, что отображение $f : U \to \mathbb{H}^n$, $f = (f_1, \dots, f_{2n+1})$, *принадлежит классу* $HW^{1,s}(U)$ ($HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$), если каждая компонента отображения

f принадлежит $HW^{1,s}(U)$ ($HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$). В этом случае для почти всех $p \in U$ определены векторы

$$X_jf(p) = \begin{pmatrix} X_jf_1(p) \\ \dots \\ X_jf_{2n+1}(p) \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, 2n.$$

Мы трактуем $X_jf(p)$ как касательные векторы над точкой $f(p)$. Таким образом, $X_jf(p) \in T_{f(p)}$, $j = 1, \dots, 2n$.

1.1. Определение. Отображение $f : U \to \mathbb{H}^n$ класса $HW^{1,1}_{\mathrm{loc}}(U)$ открытого множества $U \subset \mathbb{H}^n$ называется (*слабо*) *контактным*, если $X_jf(p) \in HT_{f(p)}$, $j = 1, \dots, 2n$, для почти всех точек $p \in U$.

Формальный горизонтальный дифференциал $Hf_*(p) : HT_p \to HT_{f(p)}$ контактного отображения f определен для почти всех $p \in U$ следующим образом: на базисных векторах

$$Hf_*(p)X_j = X_jf(p), \quad j = 1, \dots, 2n,$$

и $Hf_*(p)$ продолжено на HT_p по линейности. Формальный горизонтальный дифференциал $Hf_*(p)$ рассматривается также как отображение горизонтального пространства алгебры Гейзенберга в себя, и его матрица относительно базиса $X_1, \dots, X_{2n}$ имеет вид

$$Hf_*(p) = \begin{pmatrix} X_1f_1(p) & \dots & X_{2n}f_1(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1f_{2n}(p) & \dots & X_{2n}f_{2n}(p) \end{pmatrix}.$$

Горизонтальный якобиан $HJ(p, f)$ контактного отображения f — это определитель матрицы $Hf_*(p)$.

1.2. Предложение. *Если $f : U \to \mathbb{H}^n$ — контактное отображение класса $HW^{1,2}_{\mathrm{loc}}(U)$, то для почти всех $p \in U$ линейное отображение горизонтального пространства, заданное матрицей $Hf_*(p)$, единственным образом продолжается до гомоморфизма $f_*(p)$ алгебры Ли группы $\mathbb{H}^n$ и этот гомоморфизм имеет матрицу вида*

$$f_*(p) = \begin{pmatrix} Hf_*(p) & 0 \\ 0 & \lambda(p, f) \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

где

$$\lambda(p, f) = \sum_{j=1}^{n} ((X_kf_j)(p)(X_{n+k}f_{n+j})(p) - (X_{n+k}f_j)(p)(X_kf_{n+j})(p)) \tag{1.6}$$

для произвольного $k = 1, \dots, n$.

Доказательство предложения 1.2 дано в § 3 (ср. [9]).

Гомоморфизм $f_*(p)$ алгебры Гейзенберга называется (*формальным*) $\mathscr{P}$*-дифференциалом* отображения f в точке p.

Якобиан $J(p, f)$ контактного отображения f — это определитель матрицы $f_*(p)$. Так как матрица (1.5) задает гомоморфизм алгебры Гейзенберга, нетрудно показать [10], что $HJ(p, f) = (\lambda(p, f))^n$ и $J(p, f) = (\lambda(p, f))^{n+1}$.

Следующее определение является основным в данной работе.

1.3. Определение. Пусть $f : U \to \mathbb{H}^n$ — отображение открытого множества $U \subset \mathbb{H}^n$ в $\mathbb{H}^n$. Мы называем f *отображением с ограниченным искажением* (*квазирегулярным отображением*), если

(a) f непрерывно,

(b) $f \in HW^{1,Q}_{\mathrm{loc}}(U)$,

(c) f — контактное отображение,

(d) существует постоянная $K < \infty$ такая, что неравенство

$$\|Hf_*(p)\|^Q \le KJ(p,f)$$

выполняется почти всюду в U. Здесь $\|Hf_*(p)\| = \max_{\xi \in HT_p, |\xi|=1} |Hf_*(p)\xi|$ — операторная норма линейного отображения $Hf_*(p)$.

Наименьшая постоянная K в неравенстве п. (d) называется *коэффициентом искажения* отображения f и обозначается через $K(f)$. Если $K(f) \le K$, то f называется *отображением с искажением* K.

1.4. Замечание. Если f удовлетворяет всем условиям, кроме (a), т. е. f не обязательно непрерывно, то можно изменить f на множестве меры нуль так, что оно станет непрерывным в U и, следовательно, будет отображением с ограниченным искажением. Это утверждение доказано в § 4.

Далее статья организована следующим образом. Основная техническая нагрузка сосредоточена в § 2, 3, где мы изучаем усреднение функций и отображений на группе Гейзенберга и устанавливаем нужные свойства усреднений контактных отображений. В § 4 мы доказываем свойство морфизма решений ассоциированных субэллиптических уравнений для отображений с ограниченным искажением, которое служит фундаментом для вывода всех остальных свойств отображений с ограниченным искажением в § 5.

§ 2. Усреднение функций на группе Гейзенберга

Напомним, что если u и v — измеримые функции на $\mathbb{H}^n$, то *свертка* u и v на группе $\mathbb{H}^n$ определяется следующим образом (см. [11]):

$$u * v(p) = \int\limits_{\mathbb{H}^n} u(q)v(q^{-1}p)\,dq = \int\limits_{\mathbb{H}^n} u(pq^{-1})v(q)\,dq, \quad p \in \mathbb{H}^n, \tag{2.1}$$

при условии, что интегралы сходятся.

Если ϕ — функция на $\mathbb{H}^n$ и $\varepsilon > 0$, то определим ϕ_ε, полагая

$$\phi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^Q}\phi \circ \delta_{1/\varepsilon}, \quad \phi_\varepsilon(p) = \frac{1}{\varepsilon^Q}\phi(\delta_{1/\varepsilon}(p)) = \frac{1}{\varepsilon^Q}\phi(p/\varepsilon), \quad p \in \mathbb{H}^n.$$

Напомним, что $Q = 2n+2$ — однородная размерность группы $\mathbb{H}^n$.

Заметим, что если $\phi \in L^1(\mathbb{H}^n)$, то $\int\limits_{\mathbb{H}^n} \phi_\varepsilon(p)\,dp = \int\limits_{\mathbb{H}^n} \phi(p)\,dp$ для всех $\varepsilon > 0$.

Обозначим через $\widetilde{X}_j$, $j = 1,\dots,2n$, правоинвариантные векторные поля такие, что $\widetilde{X}_j|_0 = X_j|_0$, $j = 1,\dots,2n$. В явном виде

$$\widetilde{X}_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - 2x_{n+j}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \widetilde{X}_{n+j} = \frac{\partial}{\partial x_{n+j}} + 2x_j\frac{\partial}{\partial t}, \quad j = 1,\dots,n.$$

Следующие свойства свертки установлены в [11].

(a) *Предположим, что* $1 \le p,q,r \le \infty$ *и* $p^{-1}+q^{-1} = r^{-1}+1$. *Если* $u \in L^p(\mathbb{H}^n)$ *и* $v \in L^q(\mathbb{H}^n)$, *то* $u * v \in L^r(\mathbb{H}^n)$ *и* $\|u*v\|_r \le \|u\|_p\|v\|_q$ (неравенство Юнга).

(b) *Если L — левоинвариантное векторное поле на $\mathbb{H}^n$ и u, v — гладкие финитные функции, то $L(u * v) = u * (Lv)$.*

(c) *Если u и v — гладкие финитные функции, то $(X_j u) * v = u * (\widetilde{X}_j v)$, $j = 1, \dots, 2n$.*

(d) *Предположим, что $\phi \in L^1(\mathbb{H}^n)$ и $\int\limits_{\mathbb{H}^n} \phi(p)\, dp = a$. Тогда*

(i) *если $u \in L^s(\mathbb{H}^n)$ $(1 \le s < \infty)$, то $\|u * \phi_\varepsilon - au\|_s \to 0$ при $\varepsilon \to 0$,*

(ii) *если u ограничено на $\mathbb{H}^n$ и непрерывно на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{H}^n$, то $u * \phi_\varepsilon - au \to 0$ равномерно на компактных подмножествах Ω при $\varepsilon \to 0$.*

Пусть теперь $\psi : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ — бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция с носителем в единичном шаре $B_1(0)$ такая, что

$$\int\limits_{\mathbb{H}^n} \psi(p) dp = 1. \tag{2.2}$$

Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим функцию ψ_ε (*усредняющее ядро*). Очевидно, что ψ_ε — бесконечно-дифференцируемая неотрицательная функция, имеющая носитель в шаре $B_\varepsilon(0)$, причем $\int\limits_{\mathbb{H}^n} \psi_\varepsilon(p)\, dp = 1$.

Допустим, что $u : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ — локально интегрируемая функция. Определим *усреднение* u^ε по формуле

$$u^\varepsilon(p) = u * \psi_\varepsilon(p).$$

Если $U \subset \mathbb{H}^n$ и $u : U \to \mathbb{R}$, то определим усреднение u^ε по формуле $u^\varepsilon = (\bar{u})^\varepsilon$, где $\bar{u}$ — продолжение u нулем вне U.

Нужные свойства усреднения функций сформулированы в следующей лемме (ср. [1, лемма 1]).

2.1. Лемма. (a) *Если u непрерывно в U, то $u^\varepsilon \to u$ локально равномерно в U при $\varepsilon \to 0$. Если $u \in L^s(U)$, $1 \le s < \infty$, то $u^\varepsilon \to u$ в $L^s(U)$ при $\varepsilon \to 0$.*

(b) *Существуют функции $\kappa_j, \lambda_j \in C_0^\infty(B_1(0))$, $j = 1, \dots, 2n$, такие, что*

$$\int\limits_{\mathbb{H}^n} \kappa_j(p)\, dp = 1, \quad \int\limits_{\mathbb{H}^n} \lambda_j(p)\, dp = 0, \quad j = 1, \dots, 2n,$$

причем если $u \in HW^{1,1}_{\mathrm{loc}}(U)$ и $V \subset U$ — компакт, то для $p \in V$ и $\varepsilon < \operatorname{dist}(V, \partial U)$, где $\operatorname{dist}(V, \partial U)$ — расстояние от V до границы U в однородной метрике (1.4), выполняются равенства

$$X_j u^\varepsilon(p) = (X_j u) * \kappa_{j,\varepsilon}(p) + (X_{\bar{j}} u) * \lambda_{j,\varepsilon}(p), \quad j = 1, \dots, 2n,$$

где $\bar{j} = j + n$, если $1 \le j \le n$, и $\bar{j} = j - n$, если $n + 1 \le j \le 2n$.

(c) *Предположим, что $u \in HW^{1,s}(U)$, $\gamma_k \in C_0^\infty(B_1(0))$ и $v_k \in L^s(U)$, $k = 1, \dots, N$, где $s \ge N + 1$. Если L — горизонтальное левоинвариантное векторное поле на $\mathbb{H}^n$ и V — компактное подмножество U, то*

$$L\left\{(u^\varepsilon(v_1 * \gamma_{1,\varepsilon}) - ((uv_1) * \gamma_{1,\varepsilon})) \prod_{k=2}^{N} (v_k * \gamma_{k,\varepsilon})\right\}$$
$$= L\left\{u^\varepsilon \prod_{k=1}^{N} (v_k * \gamma_{k,\varepsilon}) - ((uv_1) * \gamma_{1,\varepsilon}) \prod_{k=2}^{N} (v_k * \gamma_{k,\varepsilon})\right\} \to 0$$

в $L^{s/(N+1)}(V)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. П. (a) очевиден из свойства (d) свертки.

Для доказательства п. (b), положим $\kappa_j = \psi + \widetilde{X}_{\bar{j}}(x_{\bar{j}}\psi)$, $\lambda_j = -\widetilde{X}_j(x_{\bar{j}}\psi)$. Равенства для интегралов от функций κ_j и λ_j очевидны.

Проверим равенства для производной усреднения. Без потери общности можем считать, что $u \in C_0^\infty(U)$. Предположим сначала, что $1 \le j \le n$.

Заметим, что

$$X_j = \widetilde{X}_j + 4x_{n+j}T, \quad X_{n+j} = \widetilde{X}_{n+j} - 4x_jT, \quad [\widetilde{X}_j, \widetilde{X}_{n+j}] = 4T. \tag{2.3}$$

Тогда в силу свойства (b) свертки имеем в V

$$X_ju^\varepsilon = X_j(u * \psi_\varepsilon) = u * (X_j\psi_\varepsilon). \tag{2.4}$$

Используя (2.3), выводим

$$\begin{aligned} X_j\psi_\varepsilon = (\widetilde{X}_j + 4x_{n+j}T)\psi_\varepsilon &= \widetilde{X}_j\psi_\varepsilon + x_{n+j}(\widetilde{X}_j\widetilde{X}_{n+j} - \widetilde{X}_{n+j}\widetilde{X}_j)\psi_\varepsilon \\ &= \widetilde{X}_j\psi_\varepsilon + x_{n+j}\widetilde{X}_j\widetilde{X}_{n+j}\psi_\varepsilon - x_{n+j}\widetilde{X}_{n+j}\widetilde{X}_j\psi_\varepsilon \\ &= \widetilde{X}_j\psi_\varepsilon + \widetilde{X}_j(x_{n+j}\widetilde{X}_{n+j}\psi_\varepsilon) - \widetilde{X}_{n+j}(x_{n+j}\widetilde{X}_j\psi_\varepsilon) + \widetilde{X}_j\psi_\varepsilon \\ &= \widetilde{X}_j\psi_\varepsilon + \widetilde{X}_j(\widetilde{X}_{n+j}(x_{n+j}\psi_\varepsilon) - \psi_\varepsilon) - \widetilde{X}_{n+j}(\widetilde{X}_j(x_{n+j}\psi_\varepsilon)) + \widetilde{X}_j\psi_\varepsilon \\ &= \widetilde{X}_j(\psi_\varepsilon + \widetilde{X}_{n+j}(x_{n+j}\psi_\varepsilon)) - \widetilde{X}_{n+j}(\widetilde{X}_j(x_{n+j}\psi_\varepsilon)) = \widetilde{X}_j\kappa_{j,\varepsilon} + \widetilde{X}_{n+j}\lambda_{j,\varepsilon}. \end{aligned}$$

Тогда с учетом свойства (c) свертки (2.4) влечет справедливость нужного равенства в случае $1 \le j \le n$. Проверка справедливости этого равенства в случае $n+1 \le j \le 2n$ совершенно аналогична.

Перейдем к доказательству п. (c). Это утверждение очевидно, если v_k, $k = 1, \dots, N$, — гладкие функции. В силу плотности гладких функций в L^s, п. (c) будет установлен, если для достаточно малых ε мы докажем неравенство

$$\left\| L\left\{ u^\varepsilon \prod_{k=1}^N (v_k * \gamma_{k,\varepsilon}) - ((uv_1) * \gamma_{1,\varepsilon}) \prod_{k=2}^N (v_k * \gamma_{k,\varepsilon}) \right\} \right\|_{s/(N+1),V} \le C\|\nabla u\|_{s,U} \prod_{k=1}^N \|v_k\|_{s,U} \tag{2.5}$$

с постоянной C, не зависящей от v_k, $k = 1, \dots, N$, и ε. Мы докажем (2.5) для $\varepsilon < (1/2)\operatorname{dist}(V, \partial U)$, причем C также не будет зависеть от u.

Положим $\widetilde{U} = \{q \in U \mid \operatorname{dist}(q, \partial U) > (1/2)\operatorname{dist}(V, \partial U)\}$. Для $p \in V$ и $\varepsilon < (1/2)\operatorname{dist}(V, \partial U)$ имеем

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(p) \prod_{k=1}^N v_k * \gamma_{k,\varepsilon}(p) &= \int\limits_{\widetilde{U}} \psi_\varepsilon(q^{-1}p)u(q)\,dq \prod_{k=1}^N \int\limits_{\widetilde{U}} \gamma_{k,\varepsilon}(r_k^{-1}p)v_k(r_k)\,dr_k \\ &= \int\limits_{\widetilde{U}\times\dots\times\widetilde{U}} \!\!\cdots\! \int \psi_\varepsilon(q^{-1}p) \prod_{k=1}^N \gamma_{k,\varepsilon}(r_k^{-1}p)u(q) \prod_{k=1}^N v_k(r_k)\,dq dr_1 \dots dr_N. \end{aligned}$$

Используя (2.2), аналогично выводим

$$(uv_1) * \gamma_{1,\varepsilon}(p) \prod_{k=2}^N v_k * \gamma_{k,\varepsilon}(p)$$

$$= \int\limits_{\widetilde{U}\times\dots\times\widetilde{U}} \cdots \int \psi_\varepsilon(q^{-1}p) \prod_{k=1}^{N} \gamma_{k,\varepsilon}\big(r_k^{-1}p\big) u(r_1) \prod_{k=1}^{N} v_k(r_k)\, dq dr_1 \dots dr_N.$$

Следовательно,

$$u^\varepsilon(p) \prod_{k=1}^{N} v_k * \gamma_{k,\varepsilon}(p) - (uv_1) * \gamma_{1,\varepsilon}(p) \prod_{k=2}^{N} v_k * \gamma_{k,\varepsilon}(p)$$
$$= \int\limits_{\widetilde{U}\times\dots\times\widetilde{U}} \cdots \int \psi_\varepsilon(q^{-1}p) \prod_{k=1}^{N} \gamma_{k,\varepsilon}\big(r_k^{-1}p\big) [u(q) - u(r_1)] \prod_{k=1}^{N} v_k(r_k)\, dq dr_1 \dots dr_N.$$

Дифференцируя под знаком интеграла, получаем

$$L\Bigg\{ u^\varepsilon(p) \prod_{k=1}^{N} v_k * \gamma_{k,\varepsilon}(p) - (uv_1) * \gamma_{1,\varepsilon}(p) \prod_{k=2}^{N} v_k * \gamma_{k,\varepsilon}(p) \Bigg\}$$
$$= \int\limits_{\widetilde{U}\times\dots\times\widetilde{U}} \cdots \int \Bigg([L(p)\psi_\varepsilon(q^{-1}p)] \prod_{k=1}^{N} \gamma_{k,\varepsilon}\big(r_k^{-1}p\big)$$
$$+ \psi_\varepsilon(q^{-1}p) \sum_{k=1}^{N} \Bigg([L(p)\gamma_{k,\varepsilon}(r_k^{-1}p)] \prod_{j=1,\, j\neq k}^{N} \gamma_{j,\varepsilon}\big(r_j^{-1}p\big) \Bigg)\Bigg)$$
$$\times [u(q) - u(r_1)] \prod_{k=1}^{N} v_k(r_k)\, dq dr_1 \dots dr_N.$$

Так как L — горизонтальное левоинвариантное векторное поле, имеем

$$L(p)\psi_\varepsilon(q^{-1}p) = \frac{1}{\varepsilon^Q}\frac{1}{\varepsilon}(L\psi)(q^{-1}p/\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}(L\psi)_\varepsilon(q^{-1}p).$$

Аналогично $L(p)\gamma_{k,\varepsilon}\big(r_k^{-1}p\big) = (1/\varepsilon)(L\gamma_k)_\varepsilon\big(r_k^{-1}p\big)$, $k = 1, \dots, N$. Следовательно,

$$\Bigg| L\Bigg\{ u^\varepsilon(p) \prod_{k=1}^{N} v_k * \gamma_{k,\varepsilon}(p) - (uv_1) * \gamma_{1,\varepsilon}(p) \prod_{k=2}^{N} v_k * \gamma_{k,\varepsilon}(p) \Bigg\}\Bigg|$$
$$\leq \int\limits_{\widetilde{U}\times\dots\times\widetilde{U}} \cdots \int \Bigg(|(L\psi)_\varepsilon(q^{-1}p)| \prod_{k=1}^{N} \big|\gamma_{k,\varepsilon}\big(r_k^{-1}p\big)\big|$$
$$+ \psi_\varepsilon(q^{-1}p) \sum_{k=1}^{N} \Bigg(\big|(L\gamma_k)_\varepsilon\big(r_k^{-1}p\big)\big| \prod_{j=1,\, j\neq k}^{N} \big|\gamma_{j,\varepsilon}\big(r_j^{-1}p\big)\big| \Bigg)\Bigg)$$
$$\times \frac{|u(q) - u(r_1)|}{\varepsilon} \prod_{k=1}^{N} |v_k(r_k)|\, dq dr_1 \dots dr_N. \tag{2.6}$$

Так как $\widetilde{U}$ компактно вложено в U и $u \in HW^{1,s}(U)$, существует функция $g \in L^s(\widetilde{U})$ такая, что для почти всех $q, r \in \widetilde{U}$ верно неравенство

$$|u(q) - u(r)| \leq \rho(q, r)(g(q) + g(r)), \tag{2.7}$$

причем $\|g\|_{s,\widetilde{U}} \leq C\|\nabla u\|_{s,U}$ с постоянной C, не зависящей от функции u (см., например, [12]).

Заметим, что подынтегральное выражение в (2.6) отлично от нуля, только если $|q^{-1}p| < \varepsilon$ и $\left|r_1^{-1}p\right| < \varepsilon$, т. е. $\rho(q, r_1) < 2\varepsilon$. Учитывая этот факт и (2.7), выводим из (2.6) следующее:

$$\left| L\left\{ u^\varepsilon(p) \prod_{k=1}^{N} v_k * \gamma_{k,\varepsilon}(p) - (uv_1) * \gamma_{1,\varepsilon}(p) \prod_{k=2}^{N} v_k * \gamma_{k,\varepsilon}(p) \right\} \right|$$

$$\leq 2 \int\limits_{\widetilde{U}\times\cdots\times\widetilde{U}} \cdots \int \Bigg(|(L\psi)_\varepsilon(q^{-1}p)| \prod_{k=1}^{N} \left|\gamma_{k,\varepsilon}\left(r_k^{-1}p\right)\right|$$

$$+ \psi_\varepsilon(q^{-1}p) \sum_{k=1}^{N} \Bigg(\left|(L\gamma_k)_\varepsilon\left(r_k^{-1}p\right)\right| \prod_{j=1,\, j\neq k}^{N} \left|\gamma_{j,\varepsilon}\left(r_j^{-1}p\right)\right| \Bigg) \Bigg)$$

$$\times (g(q) + g(r_1)) \prod_{k=1}^{N} |v_k(r_k)|\, dq dr_1 \dots dr_N$$

$$= 2 \Bigg\{ \int\limits_{\widetilde{U}} |(L\psi)_\varepsilon(q^{-1}p)| g(q)\, dq \prod_{k=1}^{N} \int\limits_{\widetilde{U}} \left|\gamma_{k,\varepsilon}\left(r_k^{-1}p\right)\right| |v_k(r_k)|\, dr_k$$

$$+ \int\limits_{\widetilde{U}} |(L\psi)_\varepsilon(q^{-1}p)|\, dq \int\limits_{\widetilde{U}} \left|\gamma_{1,\varepsilon}\left(r_1^{-1}p\right)\right| g(r_1) |v_1(r_1)|\, dr_1$$

$$\times \prod_{k=2}^{N} \int\limits_{\widetilde{U}} \left|\gamma_{k,\varepsilon}\left(r_k^{-1}p\right)\right| |v_k(r_k)|\, dr_k$$

$$+ \int\limits_{\widetilde{U}} \psi_\varepsilon(q^{-1}p) g(q)\, dq \sum_{k=1}^{N} \Bigg(\int\limits_{\widetilde{U}} \left|(L\gamma_k)_\varepsilon\left(r_k^{-1}p\right)\right| |v_k(r_k)|\, dr_k$$

$$\times \prod_{j=1,\, j\neq k}^{N} \int\limits_{\widetilde{U}} \left|\gamma_{j,\varepsilon}\left(r_j^{-1}p\right)\right| |v_j(r_j)|\, dr_j \Bigg)$$

$$+ \int\limits_{\widetilde{U}} \psi_\varepsilon(q^{-1}p)\, dq \int\limits_{\widetilde{U}} \left|(L\gamma_1)_\varepsilon\left(r_1^{-1}p\right)\right| g(r_1) |v_1(r_1)|\, dr_1 \prod_{k=2}^{N} \int\limits_{\widetilde{U}} \left|\gamma_{k,\varepsilon}\left(r_k^{-1}p\right)\right| |v_k(r_k)|\, dr_k$$

$$+ \int\limits_{\widetilde{U}} \psi_\varepsilon(q^{-1}p)\, dq \int\limits_{\widetilde{U}} \left|\gamma_{1,\varepsilon}\left(r_1^{-1}p\right)\right| g(r_1) |v_1(r_1)|\, dr_1$$

$$\times \sum_{k=2}^{N} \Bigg(\int\limits_{\widetilde{U}} \left|(L\gamma_k)_\varepsilon\left(r_k^{-1}p\right)\right| |v_k(r_k)|\, dr_k \prod_{j=2,\, j\neq k}^{N} \int\limits_{\widetilde{U}} \left|\gamma_{j,\varepsilon}\left(r_j^{-1}p\right)\right| |v_j(r_j)|\, dr_j \Bigg) \Bigg\}$$

$$= 2 \Bigg\{ g * |(L\psi)_\varepsilon|(p) \prod_{k=1}^{N} |v_k| * |\gamma_{k,\varepsilon}|(p) + a(g|v_1|) * |\gamma_{1,\varepsilon}|(p) \prod_{k=2}^{N} |v_k| * |\gamma_{k,\varepsilon}|(p)$$

$$+ g * \psi_\varepsilon(p) \sum_{k=1}^{N} \Bigg(|v_k| * |(L\gamma_k)_\varepsilon|(p) \prod_{j=1,\, j\neq k}^{N} |v_j| * |\gamma_{j,\varepsilon}|(p) \Bigg)$$

$$+ (g|v_1|) * |(L\gamma_1)_\varepsilon|(p) \prod_{k=2}^{N} |v_k| * |\gamma_{k,\varepsilon}|(p)$$

$$+ (g|v_1|) * |\gamma_{1,\varepsilon}|(p) \sum_{k=2}^{N} \left(|v_k| * |(L\gamma_k)_\varepsilon|(p) \prod_{j=2,\, j\neq k}^{N} |v_j| * |\gamma_{j,\varepsilon}|(p) \right) \Bigg\},$$

где $a = \int\limits_{\mathbb{H}^n} |(L\psi)_\varepsilon(q^{-1}p)|\, dq = \int\limits_{\mathbb{H}^n} |L\psi|(q)\, dq$. Из неравенства Гёльдера и свойства (a) свертки получаем

$$\left\| L\left\{ u^\varepsilon(p) \prod_{k=1}^{N} v_k * \gamma_{k,\varepsilon} - ((uv_1) * \gamma_{1,\varepsilon}) \prod_{k=2}^{N} v_k * \gamma_{k,\varepsilon} \right\} \right\|_{s/(N+1),V}$$

$$\leq 2\Bigg\{ \|g * |(L\psi)_\varepsilon|\|_{s,V} \prod_{k=1}^{N} \||v_k| * |\gamma_{k,\varepsilon}|\|_{s,V} + a\|(g|v_1|) * |\gamma_{1,\varepsilon}|\|_{s/2,V} \prod_{k=2}^{N} \||v_k| * |\gamma_{k,\varepsilon}|\|_{s,V}$$

$$+ \|g * \psi_\varepsilon\|_{s,V} \sum_{k=1}^{N} \left(\||v_k| * |(L\gamma_k)_\varepsilon|\|_{s,V} \prod_{j=1,\, j\neq k}^{N} \||v_j| * |\gamma_{j,\varepsilon}|\|_{s,V} \right)$$

$$+ \|(g|v_1|) * |(L\gamma_1)_\varepsilon|\|_{s/2,V} \prod_{k=2}^{N} \||v_k| * |\gamma_{k,\varepsilon}|\|_{s,V}$$

$$+ \|(g|v_1|) * |\gamma_{1,\varepsilon}|\|_{s/2,V} \sum_{k=2}^{N} \left(\||v_k| * |(L\gamma_k)_\varepsilon|\|_{s,V} \prod_{j=2,\, j\neq k}^{N} \||v_j| * |\gamma_{j,\varepsilon}|\|_{s,V} \right) \Bigg\}$$

$$\leq C\|g\|_{s,\tilde{U}} \prod_{k=1}^{N} \|v_k\|_{s,\tilde{U}} \leq C\|\nabla u\|_{s,U} \prod_{k=1}^{N} \|v_k\|_{s,U},$$

завершая доказательство леммы.

§ 3. Дифференциальные формы и усреднение контактных отображений на группе Гейзенберга

Дифференциальные формы

$$dx_j, \quad j = 1, \dots, 2n, \quad \tau = 2\sum_{j=1}^{n} (x_j\, dx_{n+j} - x_{n+j}\, dx_j) + dt$$

задают базис кокасательного расслоения $T'\mathbb{H}^n$, двойственный базису (1.1), над каждой точкой $p = (x, t) \in \mathbb{H}^n$.

Форма τ называется *контактной формой* и задает контактную структуру на $\mathbb{H}^n$. Вектор V является горизонтальным тогда и только тогда, когда $\tau(V) = 0$. Используя форму τ, мы можем переписать определение 1.1 контактного отображения следующим образом: отображение $f : U \to \mathbb{H}^n$, $f = (f_1, \dots, f_{2n+1})$, класса $HW^{1,1}_{\mathrm{loc}}(U)$ открытого множества $U \subset \mathbb{H}^n$ является контактным тогда и только тогда, когда

$$\tau(X_k f(p)) = 0, \quad k = 1, \dots, 2n, \tag{3.1}$$

для почти всех точек $p \in U$. В развернутом виде эти равенства выглядят следующим образом:

$$2\sum_{j=1}^{n} (f_j(p) X_k f_{n+j}(p) - f_{n+j}(p) X_k f_j(p)) + X_k f_{2n+1}(p) = 0, \quad k = 1, \dots, 2n,$$

для почти всех $p \in U$.

3.1. Лемма. *Если $f : U \to \mathbb{H}^n$ — C^2-гладкое отображение открытого множества $U \subset \mathbb{H}^n$, то для любой пары гладких векторных полей L и M на $\mathbb{H}^n$ верно тождество*

$$d\tau(Lf, Mf) = L(\tau(Mf)) - M(\tau(Lf)) - \tau([L, M]f).$$

Доказательство. Следующая формула хорошо известна для любой гладкой 1-формы ω и любых гладких векторных полей L, M:

$$d\omega(L, M) = L(\omega(M)) - M(\omega(L)) - \omega([L, M]). \tag{3.2}$$

Возьмем в этой формуле $\omega = f^*\tau$:

$$d(f^*\tau)(L, M) = L(f^*\tau(M)) - M(f^*\tau(L)) - f^*\tau([L, M]).$$

Осталось заметить, что

$$\begin{gathered} d(f^*\tau)(L, M) = f^*(d\tau)(L, M) = d\tau(df(L), df(M)) = d\tau(Lf, Mf), \\ f^*\tau(M) = \tau(df(M)) = \tau(Mf), \quad f^*\tau(L) = \tau(df(L)) = \tau(Lf), \\ f^*\tau([L, M]) = \tau(df([L, M])) = \tau([L, M]f). \end{gathered}$$

3.2. Определение. Если $f : U \to \mathbb{H}^n$, $f = (f_1, \dots, f_{2n+1})$, — отображение из открытого множества $U \subset \mathbb{H}^n$ в $\mathbb{H}^n$, то *усреднение отображения* f определяется покомпонентно: $f^\varepsilon = (f_1^\varepsilon, \dots, f_{2n+1}^\varepsilon)$.

Использование операции усреднения отображений позволяет дать простое доказательство предложения 1.2.

Доказательство предложения 1.2. Пусть $f : U \to \mathbb{H}^n$ — контактное отображение класса $HW^{1,2}_{\mathrm{loc}}(U)$. Рассмотрим усреднение f^ε. Легко видно, что

$$\tau(Lf^\varepsilon) \to \tau(Lf) = 0, \quad d\tau(Lf^\varepsilon, Mf^\varepsilon) \to d\tau(Lf, Mf)$$

при $\varepsilon \to 0$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ для произвольных векторных полей L, M из множества $\{X_1, \dots, X_{2n}\}$.

Записав тождество леммы 3.1 для отображения f^ε и любых векторных полей L и M из набора $\{X_1, \dots, X_{2n}\}$ таких, что $[L, M] = 0$, и устремляя ε к нулю, получим $d\tau(Lf, Mf) = 0$ в смысле теории распределений и, следовательно,

$$d\tau(Lf(p), Mf(p)) = 0 \tag{3.3}$$

для почти всех $p \in U$, как только $[L, M] = 0$.

Аналогично выводим, что для почти всех $p \in U$ выражение

$$\begin{aligned} \lambda(p, f) &= \frac{1}{4} d\tau(X_k f(p), X_{n+k} f(p)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} ((X_k f_j)(p)(X_{n+k} f_{n+j})(p) - (X_{n+k} f_j)(p)(X_k f_{n+j})(p)) \end{aligned} \tag{3.4}$$

в (1.6) определено корректно и не зависит от $k = 1, \dots, n$.

Проверим, что матрица (1.5) задает гомоморфизм алгебры Гейзенберга. Для этого достаточно проверить сохранение коммутационных соотношений для базисных полей. Пусть L и M — произвольные элементы базиса (1.1). Если хотя бы один из них, скажем L, совпадает с T, то по определению $f_*(p)L = \lambda(p, f)T$ и в этом случае имеем $[L, M] = 0$ и $[f_*(p)L, f_*(p)M] = 0$, что легко видно из блочной структуры матрицы (1.5). Поэтому предположим, что оба вектора горизонтальные. Тогда $f_*(p)L = Hf_*(p)L = Lf(p)$ и $f_*(p)M = Hf_*(p)M = Mf(p)$ также горизонтальные векторы, а $[f_*(p)L, f_*(p)M]$ — вертикальный или нулевой вектор. Применяя (3.2) с $\omega = \tau$ для векторных полей $f_*(p)L$ и $f_*(p)M$, имеем

$$\begin{aligned}[f_*(p)L, f_*(p)M] &= \tau([f_*(p)L, f_*(p)M])T \\ &= -(d\tau(f_*(p)L, f_*(p)M)T = -(d\tau(Lf(p), Mf(p))T. \quad (3.5)\end{aligned}$$

Если $[L, M] = 0$, то согласно (3.3) правая часть (3.5) равна нулю и, следовательно, $[f_*(p)L, f_*(p)M] = 0 = f_*(p)([L, M])$. Если $[L, M] \neq 0$, то $L = X_k$, $M = X_{n+k}$ для некоторого $k = 1, \dots, n$ и ввиду (3.4) правая часть (3.5) равна $-4\lambda(p, f)T$. С другой стороны, в силу (1.5) $f_*(p)T = \lambda(p, f)T$ и, следовательно, $[f_*(p)L, f_*(p)M] = -4f_*(p)T = f_*(p)([L, M])$, что завершает доказательство предложения 1.2.

3.3. Лемма. *Если $f : U \to \mathbb{H}^n$ — контактное отображение открытого множества $U \subset \mathbb{H}^n$, принадлежащее классу $HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$, $s \geq 2$, то при $\varepsilon \to 0$*

$$\tau(X_i f^\varepsilon) \to 0 \quad \text{в } L^{s/2}_{\mathrm{loc}}(U), \quad i = 1, \dots, 2n, \tag{3.6}$$

и для $m \leq s - 2$ и любых $i, i_0, \dots, i_m, j_1, \dots, j_m \in \{1, 2, \dots, 2n\}$

$$X_{i_0}\big(\tau(X_i f^\varepsilon)\big(X_{j_1} f^\varepsilon_{i_1}\big) \dots \big(X_{j_m} f^\varepsilon_{i_m}\big)\big) \to 0 \quad \text{в } L^{s/(m+2)}_{\mathrm{loc}}(U). \tag{3.7}$$

Кроме того, если f непрерывно, то

$$\tau(X_i f^\varepsilon) \to 0 \quad \text{в } L^s_{\mathrm{loc}}(U), \quad i = 1, \dots, 2n. \tag{3.6$'$}$$

Доказательство. Ввиду (3.1) имеем

$$\begin{aligned}\tau(X_i f^\varepsilon) &= \tau(X_i f^\varepsilon) - \tau(X_i f) = 2\sum_{j=1}^n \big(f^\varepsilon_j X_i f^\varepsilon_{n+j} - f^\varepsilon_{n+j} X_i f^\varepsilon_j\big) + X_i f^\varepsilon_{2n+1} \\ &- 2\sum_{j=1}^n (f_j X_i f_{n+j} - f_{n+j} X_i f_j) - X_i f_{2n+1} = 2\sum_{j=1}^n \big(\big(f^\varepsilon_j X_i f^\varepsilon_{n+j} - f_j X_i f_{n+j}\big) \\ &- \big(f^\varepsilon_{n+j} X_i f^\varepsilon_j - f_{n+j} X_i f_j\big)\big) + \big(X_i f^\varepsilon_{2n+1} - X_i f_{2n+1}\big).\end{aligned}$$

Так как $f^\varepsilon_j \to f_j$ и $X_i f^\varepsilon_j \to X_i f_j$ при $\varepsilon \to 0$ в $L^s_{\mathrm{loc}}(U)$ для $j = 1, \dots, 2n+1$, каждое слагаемое стремится к нулю в $L^{s/2}_{\mathrm{loc}}(U)$, и отсюда вытекает (3.6). Если дополнительно известно, что f непрерывно, то $f^\varepsilon_j \to f_j$ локально равномерно в U, и мы выводим (3.6$'$).

Докажем (3.7). Зафиксируем компактное подмножество $V \subset U$. Используя п. (b) леммы 2.1, в множестве V для достаточно малых ε получаем

$$\begin{aligned}\tau(X_i f^\varepsilon) &= 2\sum_{j=1}^n \big(f^\varepsilon_j X_i f^\varepsilon_{n+j} - f^\varepsilon_{n+j} X_i f^\varepsilon_j\big) + X_i f^\varepsilon_{2n+1} \\ &= 2\sum_{j=1}^n \big(f^\varepsilon_j ((X_i f_{n+j}) * \kappa_{i,\varepsilon} + (X_{\bar{i}} f_{n+j}) * \lambda_{i,\varepsilon}) \\ &- f^\varepsilon_{n+j}((X_i f_j) * \kappa_{i,\varepsilon} + (X_{\bar{i}} f_j) * \lambda_{i,\varepsilon})\big) + (X_i f_{2n+1}) * \kappa_{i,\varepsilon} + (X_{\bar{i}} f_{2n+1}) * \lambda_{i,\varepsilon}\end{aligned}$$

$$= 2\sum_{j=1}^{n}\big(f_j^\varepsilon[(X_i f_{n+j}) * \kappa_{i,\varepsilon}] - f_{n+j}^\varepsilon[(X_i f_j) * \kappa_{i,\varepsilon}]\big) + (X_i f_{2n+1}) * \kappa_{i,\varepsilon}$$
$$+ 2\sum_{j=1}^{n}\big(f_j^\varepsilon[(X_{\bar i} f_{n+j}) * \lambda_{i,\varepsilon}] - f_{n+j}^\varepsilon[(X_{\bar i} f_j) * \lambda_{i,\varepsilon}]\big) + (X_{\bar i} f_{2n+1}) * \lambda_{i,\varepsilon}.$$

По (3.1) $\tau(X_i f) = \tau(X_{\bar i} f) = 0$. Следовательно,

$$0 = \tau(X_i f) * \kappa_{i,\varepsilon} + \tau(X_{\bar i} f) * \lambda_{i,\varepsilon}$$
$$= 2\sum_{j=1}^{n}([f_j(X_i f_{n+j})] * \kappa_{i,\varepsilon} - [f_{n+j}(X_i f_j)] * \kappa_{i,\varepsilon}) + (X_i f_{2n+1}) * \kappa_{i,\varepsilon}$$
$$+ 2\sum_{j=1}^{n}([f_j(X_{\bar i} f_{n+j})] * \lambda_{i,\varepsilon} - [f_{n+j}(X_{\bar i} f_j)] * \lambda_{i,\varepsilon}) + (X_{\bar i} f_{2n+1}) * \lambda_{i,\varepsilon}.$$

Тогда

$$\tau(X_i f^\varepsilon) = \tau(X_i f^\varepsilon) - (\tau(X_i f) * \kappa_{i,\varepsilon} + \tau(X_{\bar i} f) * \lambda_{i,\varepsilon})$$
$$= 2\sum_{j=1}^{n}\big(f_j^\varepsilon[(X_i f_{n+j}) * \kappa_{i,\varepsilon}] - [f_j(X_i f_{n+j})] * \kappa_{i,\varepsilon}\big)$$
$$- 2\sum_{j=1}^{n}\big(f_{n+j}^\varepsilon[(X_i f_j) * \kappa_{i,\varepsilon}] - [f_{n+j}(X_i f_j)] * \kappa_{i,\varepsilon}\big)$$
$$+ 2\sum_{j=1}^{n}\big(f_j^\varepsilon[(X_{\bar i} f_{n+j}) * \lambda_{i,\varepsilon}] - [f_j(X_{\bar i} f_{n+j})] * \lambda_{i,\varepsilon}\big)$$
$$- 2\sum_{j=1}^{n}\big(f_{n+j}^\varepsilon[(X_{\bar i} f_j) * \lambda_{i,\varepsilon}] - [f_{n+j}(X_{\bar i} f_j)] * \lambda_{i,\varepsilon}\big).$$

Таким образом,

$$X_{i_0}\big(\tau(X_i f^\varepsilon)\big(X_{j_1} f_{i_1}^\varepsilon\big)\dots\big(X_{j_m} f_{i_m}^\varepsilon\big)\big)$$
$$= 2\sum_{j=1}^{n} X_{i_0}\big\{\big(f_j^\varepsilon[(X_i f_{n+j}) * \kappa_{i,\varepsilon}] - [f_j(X_i f_{n+j})] * \kappa_{i,\varepsilon}\big)\big(X_{j_1} f_{i_1}^\varepsilon\big)\dots\big(X_{j_m} f_{i_m}^\varepsilon\big)\big\}$$
$$- 2\sum_{j=1}^{n} X_{i_0}\big\{\big(f_{n+j}^\varepsilon[(X_i f_j) * \kappa_{i,\varepsilon}] - [f_{n+j}(X_i f_j)] * \kappa_{i,\varepsilon}\big)\big(X_{j_1} f_{i_1}^\varepsilon\big)\dots\big(X_{j_m} f_{i_m}^\varepsilon\big)\big\}$$
$$+ 2\sum_{j=1}^{n} X_{i_0}\big\{\big(f_j^\varepsilon[(X_{\bar i} f_{n+j}) * \lambda_{i,\varepsilon}] - [f_j(X_{\bar i} f_{n+j})] * \lambda_{i,\varepsilon}\big)\big(X_{j_1} f_{i_1}^\varepsilon\big)\dots\big(X_{j_m} f_{i_m}^\varepsilon\big)\big\}$$
$$- 2\sum_{j=1}^{n} X_{i_0}\big\{\big(f_{n+j}^\varepsilon[(X_{\bar i} f_j) * \lambda_{i,\varepsilon}] - [f_{n+j}(X_{\bar i} f_j)] * \lambda_{i,\varepsilon}\big)\big(X_{j_1} f_{i_1}^\varepsilon\big)\dots\big(X_{j_m} f_{i_m}^\varepsilon\big)\big\}.$$

Докажем, что каждое слагаемое в каждой сумме стремится к нулю в $L^{s/(m+2)}(V)$ при $\varepsilon \to 0$. Так как все слагаемые однотипны, достаточно рассмотреть первое слагаемое в первой сумме.

В силу п. (b) леммы 2.1 для $l = 1, \dots, m$ в множестве V для достаточно малых ε имеем $X_{j_l} f_{i_l}^\varepsilon = (X_{j_l} f_{i_l}) * \kappa_{j_l,\varepsilon} + (X_{\bar j_l} f_{i_l}) * \lambda_{j_l,\varepsilon}$. Тогда

$$X_{i_0}\big\{\big(f_j^\varepsilon[(X_i f_{n+j}) * \kappa_{i,\varepsilon}] - [f_j(X_i f_{n+j})] * \kappa_{i,\varepsilon}\big)\big(X_{j_1} f_{i_1}^\varepsilon\big)\dots\big(X_{j_m} f_{i_m}^\varepsilon\big)\big\}$$

$$
\begin{aligned}
&= X_{i_0}\big\{\big(f_j^\varepsilon[(X_i f_{n+j})*\kappa_{i,\varepsilon}] - [f_j(X_i f_{n+j})]*\kappa_{i,\varepsilon}\big)\\
&\times\big((X_{j_1} f_{i_1})*\kappa_{j_1,\varepsilon} + (X_{\bar{j}_1} f_{i_1})*\lambda_{j_1,\varepsilon}\big)\dots\big((X_{j_m} f_{i_m})*\kappa_{j_m,\varepsilon} + (X_{\bar{j}_m} f_{i_m})*\lambda_{j_m,\varepsilon}\big)\big\}\\
&= X_{i_0}\big\{\big(f_j^\varepsilon[(X_i f_{n+j})*\kappa_{i,\varepsilon}] - [f_j(X_i f_{n+j})]*\kappa_{i,\varepsilon}\big)\\
&\times\big((X_{\bar{j}_1} f_{i_1})*\kappa_{j_1,\varepsilon}\big)\dots\big((X_{\bar{j}_m} f_{i_m})*\kappa_{j_m,\varepsilon}\big)\big\}\\
&+\dots + X_{i_0}\big\{\big(f_j^\varepsilon[(X_i f_{n+j})*\kappa_{i,\varepsilon}] - [f_j(X_i f_{n+j})]*\kappa_{i,\varepsilon}\big)\\
&\times\big((X_{\bar{j}_1} f_{i_1})*\lambda_{j_1,\varepsilon}\big)\dots\big((X_{\bar{j}_m} f_{i_m})*\lambda_{j_m,\varepsilon}\big)\big\}.
\end{aligned}
$$

Применяя п. (c) леммы 2.1 к каждому слагаемому, завершаем доказательство леммы.

Определим операцию переноса горизонтальных дифференциальных форм под действием слабо контактного отображения. Напомним, что дифференциальная форма называется *горизонтальной*, если она обращается в нуль на горизонтальном касательном пространстве. Такая форма имеет вид

$$\omega(q) = \Big(\sum_{i_1<\dots<i_k} \omega_{i_1\dots i_k}(q)\,dx_{i_1}\dots dx_{i_k}\Big)\wedge\tau. \tag{3.8}$$

3.4. Определение. Пусть $f : U \to V$ — контактное отображение класса $HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$, $s \geq 2$, открытого множества $U \subset \mathbb{H}^n$ в открытое множество $V \subset \mathbb{H}^n$. Пусть ω — горизонтальная $(k+1)$-форма на V, $0 \leq k \leq s-2$. *Прообраз* $f^\#\omega$ формы ω под действием f определяется следующим образом:

$$f^\#\omega(p)(V_1,\dots,V_{k+1}) = \omega(f(p))(f_*(p)V_1,\dots,f_*(p)V_{k+1})$$

для $p \in U$ и $V_1,\dots,V_{k+1} \in T_p\mathbb{H}^n$. Для формы (3.8) имеем

$$f^\#\omega(p) = \lambda(p,f)\Big(\sum_{i_1<\dots<i_k} \omega_{i_1\dots i_k}(f(p))\,d_0 f_{i_1}(p)\wedge\dots\wedge d_0 f_{i_k}(p)\Big)\wedge\tau,$$

где

$$d_0 u(p) = \sum_{j=1}^{2n} X_j u(p)\,dx_j.$$

Естественность такого определения подчеркивается следующим утверждением.

3.5. Теорема. *Если $f : U \to V$ — непрерывное контактное отображение класса $HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$, $s \geq 2$, открытого множества $U \subset \mathbb{H}^n$ в открытое множество $V \subset \mathbb{H}^n$ и ω — C^1-гладкая горизонтальная $(k+1)$-форма на V, $0 \leq k \leq s-2$, то*

$$(f^\varepsilon)^*\omega \to f^\#\omega, \quad \varepsilon \to 0,$$

в слабом смысле, т. е.

$$\int_U (f^\varepsilon)^*\omega\wedge\varphi \to \int_U f^\#\omega\wedge\varphi, \quad \varepsilon \to 0,$$

для любой гладкой $(2n-k)$-формы φ с компактным носителем в U.

Доказательство. Достаточно рассмотреть формы вида

$$\omega = w(q)\,dx_{i_1}\dots dx_{i_k}\wedge\tau,$$

где $1 \le i_1 < \dots < i_k \le 2n$. Имеем

$$(f^\varepsilon)^*\omega(p) = (f^\varepsilon)^*(w(q)\,dx_{i_1}\dots dx_{i_k} \wedge \tau) = w(f^\varepsilon(p))\,df^\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge df^\varepsilon_{i_k} \wedge (f^\varepsilon)^*\tau.$$

Далее,

$$df^\varepsilon_i = d_0 f^\varepsilon_i + \big(Tf^\varepsilon_i\big)\tau,\ i = 1, \dots, 2n, \quad (f^\varepsilon)^*\tau = \sum_{i=1}^{2n} \tau(X_i f^\varepsilon)\,dx_i + \tau(Tf^\varepsilon)\,\tau.$$

По лемме 3.1 имеем

$$\begin{aligned}\tau(Tf^\varepsilon) &= \tau(-(1/4)[X_1, X_{n+1}]f^\varepsilon)\\ &= -(1/4)(X_1(\tau(X_{n+1}f^\varepsilon)) - X_{n+1}(\tau(X_1 f^\varepsilon)) - d\tau(X_1 f^\varepsilon, X_{n+1}f^\varepsilon)).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}(f^\varepsilon)^*\tau = \sum_{i=1}^{2n} \tau(X_i f^\varepsilon)\,dx_i&\\ + \frac{1}{4}(d\tau(X_1 f^\varepsilon, X_{n+1}f^\varepsilon) - X_1(\tau(X_{n+1}f^\varepsilon)) + X_{n+1}(\tau(X_1 f^\varepsilon)))\tau&.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}(f^\varepsilon)^*\omega(p) = w(f^\varepsilon(p))\big(d_0 f^\varepsilon_{i_1} + Tf^\varepsilon_{i_1}(p)\tau\big) \wedge \dots \wedge \big(d_0 f^\varepsilon_{i_k} + Tf^\varepsilon_{i_k}(p)\tau\big)&\\ \wedge \Bigg\{\sum_{i=1}^{2n} \tau(X_i f^\varepsilon)\,dx_i + \frac{1}{4}(d\tau(X_1 f^\varepsilon, X_{n+1}f^\varepsilon)&\\ - X_1(\tau(X_{n+1}f^\varepsilon)) + X_{n+1}(\tau(X_1 f^\varepsilon)))\tau\Bigg\} = \omega^\varepsilon_0 + \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j+1}\omega^\varepsilon_j&,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}&\omega^\varepsilon_0 = w(f^\varepsilon(p))\,d_0 f^\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge d_0 f^\varepsilon_{i_k}\\ &\wedge\Bigg\{\sum_{i=1}^{2n} \tau(X_i f^\varepsilon)\,dx_i + \frac{1}{4}(d\tau(X_1 f^\varepsilon, X_{n+1}f^\varepsilon) - X_1(\tau(X_{n+1}f^\varepsilon)) + X_{n+1}(\tau(X_1 f^\varepsilon)))\tau\Bigg\},\end{aligned}$$

а для $j = 1, \dots, k$

$$\omega^\varepsilon_j = w(f^\varepsilon(p))Tf^\varepsilon_{i_j}(p)d_0 f^\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{d_0 f^\varepsilon_{i_j}} \wedge \dots \wedge d_0 f^\varepsilon_{i_k} \wedge \left(\sum_{i=1}^{2n} \tau(X_i f^\varepsilon)\,dx_i\right) \wedge \tau,$$

причем $\widehat{d_0 f^\varepsilon_{i_j}}$ означает, что этот сомножитель опущен.

Докажем, что $\omega^\varepsilon_0 \to f^\# \omega$ и $\omega^\varepsilon_j \to 0$, $j = 1, \dots, k$, при $\varepsilon \to 0$ в слабом смысле.

Действительно, коэффициенты форм $d_0 f^\varepsilon_{i_l}$, $l = 1, \dots, k$, стремятся к соответствующим коэффициентам формы $d_0 f_{i_l}$ в $L^s_{\mathrm{loc}}(U)$ при $\varepsilon \to 0$, а по лемме 3.3 коэффициенты форм

$$\sum_{i=1}^{2n} \tau(X_i f^\varepsilon)\,dx_i + \frac{1}{4}(d\tau(X_1 f^\varepsilon, X_{n+1}f^\varepsilon) - X_1(\tau(X_{n+1}f^\varepsilon)) + X_{n+1}(\tau(X_1 f^\varepsilon)))\tau$$

сходятся при $\varepsilon \to 0$ к коэффициентам формы $\frac{1}{4}d\tau(X_1 f, X_{n+1} f)\tau = \lambda(p, f)\tau$ в $L^{s/2}_{\mathrm{loc}}(U)$. Так как $w(f^\varepsilon(p))$ сходится локально равномерно в U к $w(f(p))$, отсюда следует, что при $\varepsilon \to 0$ коэффициенты форм ω_0^ε сходятся к соответствующим коэффициентам формы $f^\# \omega$ в $L_{\mathrm{loc}}^{s/(k+2)}(U)$ (заметим, что $s/(k+2) \geq 1$). В частности, $\omega_0^\varepsilon \to f^\# \omega$ в слабом смысле.

Для доказательства слабой сходимости $\omega_j^\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ достаточно показать, что коэффициенты форм ω_j^ε сходятся к нулю в пространстве распределений. Коэффициенты формы ω_j^ε имеют вид

$$a^\varepsilon(p) = T f_{i_j}^\varepsilon(p) w(f^\varepsilon(p)) \tau(X_i f^\varepsilon)\big(X_{j_1} f_{i_1}^\varepsilon\big) \dots \big(X_{j_m} f_{i_m}^\varepsilon\big),$$

где $m = k-1$. Используя равенство $T = -\frac{1}{4}[X_1, X_{n+1}] = \frac{1}{4}(X_{n+1}X_1 - X_1 X_{n+1})$, получаем

$$a^\varepsilon = \frac{1}{4}(b^\varepsilon - c^\varepsilon),$$

где

$$b^\varepsilon = \big(X_{n+1} X_1 f_{i_j}^\varepsilon\big) w(f^\varepsilon) \tau(X_i f^\varepsilon)\big(X_{j_1} f_{i_1}^\varepsilon\big) \dots \big(X_{j_m} f_{i_m}^\varepsilon\big),$$

$$c^\varepsilon = \big(X_1 X_{n+1} f_{i_j}^\varepsilon\big) w(f^\varepsilon) \tau(X_i f^\varepsilon)\big(X_{j_1} f_{i_1}^\varepsilon\big) \dots \big(X_{j_m} f_{i_m}^\varepsilon\big).$$

Далее,

$$\begin{aligned} b^\varepsilon = X_{n+1}\big(\big(X_1 f_{i_j}^\varepsilon\big) w(f^\varepsilon) \tau(X_i f^\varepsilon)\big(X_{j_1} f_{i_1}^\varepsilon\big) \dots \big(X_{j_m} f_{i_m}^\varepsilon\big)\big) \\ - \big(X_1 f_{i_j}^\varepsilon\big)(X_{n+1} w(f^\varepsilon)) \tau(X_i f^\varepsilon)\big(X_{j_1} f_{i_1}^\varepsilon\big) \dots \big(X_{j_m} f_{i_m}^\varepsilon\big) \\ - \big(X_1 f_{i_j}^\varepsilon\big) w(f^\varepsilon)\big(X_{n+1}\big\{\tau(X_i f^\varepsilon)\big(X_{j_1} f_{i_1}^\varepsilon\big) \dots \big(X_{j_m} f_{i_m}^\varepsilon\big)\big\}\big). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Заметим, что $X_l f_t^\varepsilon \to X_l f_t$ в $L_{\mathrm{loc}}^s(U)$ для любых l, $1 \leq l \leq 2n$, и t, $1 \leq t \leq 2n+1$. Кроме того, $\tau(X_i f^\varepsilon) \to 0$ в $L_{\mathrm{loc}}^{s/2}(U)$ в силу (3.6), а $w \circ f^\varepsilon \to w \circ f$ локально равномерно в U. Отсюда вытекает, что

$$\big(X_1 f_{i_j}^\varepsilon\big) w(f^\varepsilon) \tau(X_i f^\varepsilon)\big(X_{j_1} f_{i_1}^\varepsilon\big) \dots \big(X_{j_m} f_{i_m}^\varepsilon\big) \to 0$$

в $L_{\mathrm{loc}}^{s/(m+3)}(U)$ (заметим, что $s/(m+3) = s/(k+2) \geq 1$). Следовательно, первое слагаемое в (3.9) стремится к нулю в пространстве распределений при $\varepsilon \to 0$.

Второе слагаемое в (3.9) сходится к нулю в $L_{\mathrm{loc}}^{s/(m+3)}(U)$ при $\varepsilon \to 0$, ибо $X_l f_t^\varepsilon \to X_l f_t$ в $L_{\mathrm{loc}}^s(U)$, $\tau(X_i f^\varepsilon) \to 0$ в $L_{\mathrm{loc}}^s(U)$ по (3.6′), а $X_{n+1} w(f^\varepsilon) \to X_{n+1} w(f)$ в $L_{\mathrm{loc}}^s(U)$, что следует из формулы

$$X_{n+1}(w \circ f^\varepsilon) = \sum_{l=1}^{2n} ((X_l w) \circ f^\varepsilon) X_{n+1} f_l^\varepsilon + ((Tw) \circ f^\varepsilon) \tau(X_{n+1} f^\varepsilon),$$

локально равномерных сходимостей $(X_l w) \circ f^\varepsilon \to (X_l w) \circ f$ и $(Tw) \circ f^\varepsilon \to (Tw) \circ f$ в U и сходимостей $X_{n+1} f_l^\varepsilon \to X_{n+1} f_l$ и $\tau(X_{n+1} f^\varepsilon) \to 0$ в $L_{\mathrm{loc}}^s(U)$.

Так как $w(f^\varepsilon) \to w(f)$ локально равномерно в U, $X_1 f_{i_j}^\varepsilon \to X_1 f_{i_j}$ в $L_{\mathrm{loc}}^s(U)$, и $X_{n+1}\big\{\big(X_{j_1} f_{i_1}^\varepsilon\big) \dots \big(X_{j_m} f_{i_m}^\varepsilon\big)\big\} \to 0$ в $L_{\mathrm{loc}}^{s/(m+2)}(U)$ по (3.7), третье слагаемое в (3.9) сходится к нулю в $L_{\mathrm{loc}}^{s/(m+3)}(U)$ при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, $b^\varepsilon \to 0$ в пространстве распределений, и аналогичные рассуждения показывают, что $c^\varepsilon \to 0$ в пространстве распределений.

Теорема доказана.

3.6. Следствие. *Если $f : U \to V$ — непрерывное контактное отображение класса $HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$, $s \geq 2$, открытого множества $U \subset \mathbb{H}^n$ в открытое множество $V \subset \mathbb{H}^n$ и ω — замкнутая C^1-гладкая горизонтальная форма степени k, $0 \leq k \leq s-1$, на V, то $d(f^{\#}\omega) = 0$, где $d(f^{\#}\omega)$ — обобщенный дифференциал формы $f^{\#}\omega$.*

Доказательство. Из тождества $d((f^\varepsilon)^*\omega) = (f^\varepsilon)^* d\omega = 0$ имеем

$$\int\limits_U ((f^\varepsilon)^*\omega) \wedge d\varphi = 0$$

для любой гладкой $(2n-k-1)$-формы φ с компактным носителем в U. По теореме 3.5

$$\int\limits_U (f^{\#}\omega) \wedge d\varphi = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_U ((f^\varepsilon)^*\omega) \wedge d\varphi = 0.$$

Из определения обобщенного дифференциала выводим равенство $d(f^{\#}\omega) = 0$.

3.7. Замечание. Из доказательства следует, что теорема 3.5 и следствие 3.6 верны, если f не обязательно непрерывно, но коэффициенты формы ω зависят только от тех переменных, для которых компоненты f с соответствующими индексами непрерывны. Например, если форма ω имеет постоянные коэффициенты или коэффициенты ω зависят только от $x = (x_1, \dots, x_{2n})$, а компоненты $f_1, \dots, f_{2n}$ непрерывны.

§ 4. Субэллиптические уравнения, ассоциированные с отображениями с ограниченным искажением

Пусть U — открытое подмножество $\mathbb{H}^n$. Назовем $\mathscr{A} : U \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ *ядром в* U, если выполнены следующие условия (ср. [8]).

(A) Для каждого открытого $D \Subset U$ и $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $C \subset D$ такое, что $|D \setminus C| < \varepsilon$ и сужение $\mathscr{A}|C \times \mathbb{R}^{2n}$ непрерывно.

(B) Существует $\nu > 0$ такое, что $\langle \mathscr{A}(p,\xi), \xi \rangle \geq \nu^{-1}|\xi|^Q$ $(Q = 2n+2)$ и $|\mathscr{A}(p,\xi)| \leq \nu|\xi|^{2n+1}$ для почти всех $p \in U$ и $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$.

(C) Для почти всех $p \in U$ справедливо неравенство $\langle \mathscr{A}(p,\xi_1) - \mathscr{A}(p,\xi_2), \xi_1 - \xi_2 \rangle > 0$, если $\xi_1 \neq \xi_2$, и $\mathscr{A}(p, \lambda\xi) = \lambda|\lambda|^{2n}\mathscr{A}(p,\xi)$ для $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Простейшим примером является ядро $\mathscr{A}(p,\xi) = |\xi|^{2n}\xi$.

Для изучения отображений с ограниченным искажением важен случай, когда ядро описывается следующим образом.

Пусть $f : U \to \mathbb{H}^n$ — отображение с ограниченным искажением. Определим в U матричную функцию $\theta = \theta_f$, полагая

$$\theta(p) = J(p,f)^{1/(n+1)}(Hf_*(p))^{-1}[(Hf_*(p))^{-1}]^T,$$

если $J(p,f) \neq 0$ (заметим, что в этом случае матрица $Hf_*(p)$ невырожденная), и $\theta(p) = \mathrm{Id}$ (тождественная матрица), если $J(p,f) = 0$. Определим *ассоциированное ядро* $\mathscr{A}(p,\xi) = \mathscr{A}_f(p,\xi)$, полагая

$$\mathscr{A}(p,\xi) = \langle \theta(p)\xi, \xi \rangle^n \theta(p)\xi.$$

Нетрудно проверить, что $\mathscr{A}(p,\xi)$ удовлетворяет условиям (A)–(C), причем $\nu = K(f)$.

Пусть $\mathscr{A}(p,\xi)$ — ядро в U. Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div}\mathscr{A}(p,\nabla u)=0. \tag{4.1}$$

Функция $u:U\to\mathbb{R}$ класса $HW^{1,Q}_{\mathrm{loc}}(U)$ называется *слабым решением* уравнения (4.1), если

$$\int\limits_U \mathscr{A}(p,\nabla u(p))\cdot\nabla\varphi(p)=0$$

для любой функции $\varphi\in C_0^\infty(U)$.

Следующее утверждение устанавливает свойство морфизма решений ассоциированных субэллиптических уравнений для отображений с ограниченным искажением на группах Гейзенберга $\mathbb{H}^n$. Впервые это свойство было доказано Ю. Г. Решетняком для отображений с ограниченным искажением евклидовых пространств и было распространено в [1] на трехмерную группу Гейзенберга $\mathbb{H}^1$.

4.1. Теорема. *Пусть $f:U\to V$ — отображение с ограниченным искажением открытого множества $U\subset\mathbb{H}^n$ в открытое множество $V\subset\mathbb{H}^n$. Предположим, что $w:V\to\mathbb{R}$ — C^2-гладкое решение уравнения*

$$\operatorname{div}(|\nabla w(q)|^{2n}\nabla w(q))=0 \tag{4.2}$$

в V. Тогда функция $w_f=w\circ f$ есть слабое решение уравнения

$$\operatorname{div}\mathscr{A}_f(q,\nabla w_f(q))=0 \tag{4.3}$$

в U.

Доказательство. Следуя схеме Ю. Г. Решетняка (см. [5]), рассмотрим C^1-гладкую горизонтальную дифференциальную $2n$-форму

$$\omega=\left(\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}|\nabla w(q)|^{2n}X_kw(q)\,dx_1\dots\widehat{dx_k}\dots dx_{2n}\right)\wedge\tau,$$

где $\widehat{dx_j}$ означает, что данный сомножитель пропущен. Выполнение уравнения (4.2) эквивалентно замкнутости формы ω. Тогда по следствию 3.6 обобщенный дифференциал формы $f^{\#}\omega$ равен нулю:

$$d(f^{\#}\omega)=0. \tag{4.4}$$

Повторяя рассуждения из [5, гл. II, теорема 5.1] (см. также [8]), заключаем, что выполнение (4.4) эквивалентно (4.3). Теорема доказана.

Координатные функции и функция $\ln|q|$ являются частными решениями уравнения (4.2). Из этого факта, теоремы 4.1 и свойств решений уравнения (4.3) выводим следующие следствия (ср. [2, 8]).

4.2. Следствие (монотонность). *Каждая компонента отображения с ограниченным искажением монотонна.*

4.3. Следствие (положительность якобиана). *Пусть $f:U\to\mathbb{H}^n$ — непостоянное отображение с ограниченным искажением области $U\subset\mathbb{H}^n$. Тогда $J(p,f)>0$ для почти всех $p\in U$.*

4.4. Следствие (разрывность прообразов точек). *Если $f:U\to\mathbb{H}^n$ — непостоянное отображение с ограниченным искажением области $U\subset\mathbb{H}^n$, то прообраз $f^{-1}(q)$ каждой точки $q\in\mathbb{H}^n$ вполне несвязен.*

4.5. Следствие (неравенство Каччиопполи). *Пусть $f : U \to \mathbb{H}^n$ — отображение с искажением K. Тогда каждая компонента f_i отображения f, $i = 1, \dots, 2n+1$, удовлетворяет неравенству*

$$\int_U \varphi^Q(q)|\nabla f_i(q)|^Q\,dq \le C\int_U |f_i(q)|^Q|\nabla\varphi(q)|^Q\,dq$$

для любой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(U)$, причем постоянная C зависит только от K.

4.6. Следствие (обратное неравенство Гёльдера). *Для каждого $K \ge 1$ существует $\varepsilon(K) > 0$ такое, что каждое отображение $f : U \to \mathbb{H}^n$ с искажением K принадлежит классу $HW^{1,Q+\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(U)$. Кроме того, выполнено обратное неравенство Гёльдера*

$$\left(\frac{1}{|B_R|}\int\limits_{B_R}\|Hf_*(q)\|^{Q+\varepsilon}\,dq\right)^{1/(Q+\varepsilon)} \le C\left(\frac{1}{|B_{2R}|}\int\limits_{B_{2R}}\|Hf_*(q)\|^{Q}\,dq\right)^{1/Q}$$

для каждого шара $B_{2R} \subset U$, причем $C = C(K) > 0$.

4.7. Следствие (локальная непрерывность по Гёльдеру). *Предположим, что $f : U \to \mathbb{H}^n$ — отображение с искажением K и $\int\limits_U \|Hf_*(q)\|^Q\,dq = M < \infty$. Тогда отображение f удовлетворяет внутри U условию Гёльдера с показателем $\alpha = \alpha(K) > 0$. При этом если V содержится строго в U, то для произвольных $x, y \in V$*

$$\rho(f(p), f(q)) \le C\rho(p,q)^\alpha,$$

где постоянная C зависит только от взаимного расположения U и V и постоянной M.

4.8. Замечание. Теоремы 3.5 и 4.1 с незначительными модификациями переносятся на произвольные двухступенчатые группы Карно.

В заключение данного параграфа приведем обоснование замечания 1.4.

Доказательство замечания 1.4. Допустим, что отображение $f : U \to \mathbb{H}^n$ удовлетворяет всем условиям определения 1.3, кроме (a). Если w является одной из координатных функций x_j, $j = 1, \dots, 2n$, то w — решение уравнения (4.2), причем форма ω из доказательства теоремы 4.1 имеет постоянные коэффициенты. Используя замечание 3.7 вместо следствия 3.6, выводим, что компоненты f_j, $j = 1, \dots, 2n$, отображения f суть решения уравнения (4.3). Но тогда они становятся непрерывными после изменения на множестве меры нуль. Считая теперь, что компоненты f_j, $j = 1, \dots, 2n$, отображения f непрерывны, возьмем в качестве w координатную функцию t. Тогда

$$X_k w = 2x_{k+n},\ k = 1, \dots, n, \quad X_k w = -2x_{k-n},\ k = n+1, \dots, 2n,$$

и коэффициенты формы ω в этом случае зависят только от $x_1, \dots, x_{2n}$. Вновь используя замечание 3.7, выводим, как и выше, что f_{2n+1} является решением уравнения (4.3) и, следовательно, может быть сделана непрерывной путем изменения на множестве меры нуль.

§ 5. Дальнейшие свойства отображений с ограниченным искажением

Вывод дальнейших свойств отображений с ограниченным искажением на группах $\mathbb{H}^n$ в основном идентичен их выводу на группе $\mathbb{H}^1$, проделанному в [2–4].

5.1. Теорема. *Отображение с ограниченным искажением $\mathscr{P}$-дифференцируемо почти всюду в области определения, и его $\mathscr{P}$-дифференциал почти всюду совпадает с формальным $\mathscr{P}$-дифференциалом.*

Напомним, что отображение $f : U \to \mathbb{H}^n$ (U — область в $\mathbb{H}^n$) называется *$\mathscr{P}$-дифференцируемым* в точке $p \in U$ (*дифференцируемым в смысле Пансю*), если при $\varepsilon \to 0$

$$\{(f(p))^{-1} f(p(cq))\}/c \to h(q) \tag{5.1}$$

равномерно по $q \in B_1(0)$ для некоторого гомоморфизма $h : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$, сохраняющего горизонтальное пространство HT.

$\mathscr{P}$-дифференциал отображения f в точке p определяется как гомоморфизм алгебры Гейзенберга, соответствующий гомоморфизму h группы Гейзенберга.

Мы выведем теорему 5.1 из следствия 4.6 и следующей теоремы.

5.2. Теорема. *Если $f : U \to \mathbb{H}^n$ — непрерывное контактное отображение класса $HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$ с $s > Q$ ($Q = 2n+2$ — однородная размерность $\mathbb{H}^n$), то f $\mathscr{P}$-дифференцируемо почти всюду в U и его $\mathscr{P}$-дифференциал почти всюду совпадает с формальным $\mathscr{P}$-дифференциалом.*

Доказательство. Пусть $f = (f_1, \dots, f_{2n+1})$. Тогда для почти всех $p \in U$ формальный $\mathscr{P}$-дифференциал f задается матрицей

$$f_*(p) = \begin{pmatrix} X_1 f_1(p) & \dots & X_{2n} f_1(p) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_1 f_{2n}(p) & \dots & X_{2n} f_{2n}(p) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda(p,f) \end{pmatrix}.$$

Обозначим $q = (q_1, \dots, q_{2n+1})$. Тогда (5.1) эквивалентно выполнению следующих соотношений:

$$\frac{1}{c}\left\{ f_k(p(cq)) - f_k(p) - c\sum_{j=1}^{2n} X_j f_k(p) q_k \right\} \to 0, \quad k = 1, \dots, 2n, \tag{5.2}$$

$$\frac{1}{c^2}\left\{ f_{2n+1}(p(cq)) - f_{2n+1}(p) - 2\sum_{j=1}^{n} (f_j(p(cq)) f_{n+j}(p) - f_{n+j}(p(cq)) f_j(p)) \right. \\ \left. - c^2 \lambda(p,f) q_{2n+1} \right\} \to 0 \tag{5.3}$$

при $c \to 0$ равномерно по $q \in B_1(0)$.

Для доказательства этих соотношений используем следующее утверждение (см., например, [8, лемма 6.10]).

5.3. Предложение. *Пусть $s > Q$. Тогда существует постоянная C такая, что для любой непрерывной функции $u : B_2(0) \to \mathbb{R}$ класса $HW^{1,s}(B_2(0))$ и любой точки $q \in B_1(0)$ выполняется неравенство $|u(q) - u(0)| \le C\|\nabla u\|_{s,B_2(0)}$.*

Для доказательства соотношений (5.2) положим

$$u(q) = f_k(p(cq)) - f_k(p) - c\sum_{j=1}^{2n} X_j f_k(p) q_k.$$

Функция u определена на $B_2(0)$ для достаточно малых c и $u(0)=0$. По предложению 5.3 для $q\in B_1(0)$ имеем $|u(q)|\le C\|\nabla u\|_{s,B_2(0)}$. Для $\xi\in B_2(0)$

$$X_l u(\xi) = c(X_l f_k(p(c\xi)) - X_l f_k(p)),\quad l=1,\dots,2n.$$

Значит,

$$\frac{|u(q)|}{c}\le C\sum_{l=1}^{2n}\|X_l f_f(p(c\cdot)) - X_l f_k(p)\|_{s,B_2(0)}.$$

По теореме Лебега $\|X_l f_k(p(c\cdot)) - X_l f_k(p)\|_{s,B_2(0)}\to 0$ при $c\to 0$ для почти всех $p\in U$. Таким образом, $|u(q)|/c\to 0$ для почти всех $p\in U$ при $c\to 0$ равномерно по $q\in B_1(0)$, что завершает доказательство (5.2).

Чтобы доказать (5.3), положим

$$u(q) = f_{2n+1}(p(cq)) - f_{2n+1}(p) \\ - 2\sum_{j=1}^{n}(f_j(p(cq))f_{n+j}(p) - f_{n+j}(p(cq))f_j(p)) - c^2\lambda(p,f)q_{2n+1}.$$

Для достаточно малых c функция u определена на шаре $B_4(0)$ и по предложению 5.3 для $q\in B_1(0)$

$$|u(q)|\le C\|\nabla u\|_{s,B_2(0)}. \tag{5.4}$$

Для $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_{2n+1})$ имеем $(X_l\xi_{2n+1})(\xi)=2\xi_{n+l}$ при $1\le l\le n$. Следовательно, для $\xi\in B_2(0)$ и $1\le l\le n$

$$X_l u(\xi) = c\biggl\{X_l f_{2n+1}(p(c\xi)) - 2c\sum_{j=1}^{n}(f_{n+j}(p)X_l f_j(p(c\xi)) - f_j(p)X_l f_{n+j}(p(c\xi))) \\ - 2c^2\lambda(p,f)\xi_{n+l}\biggr\} = c\biggl\{X_l f_{2n+1}(p(c\xi)) \\ + 2\sum_{j=1}^{n}(f_j(p(c\xi))X_l f_{n+j}(p(c\xi)) - f_{n+j}(p(c\xi))X_l f_j(p(c\xi))) \\ + 2\sum_{j=1}^{n}(X_l f_j(p(c\xi))[f_{n+j}(p(c\xi)) - f_{n+j}(p)] - X_l f_{n+j}(p(c\xi))[f_j(p(c\xi)) - f_j(p)]) \\ - 2c\lambda(p,f)\xi_{n+l}\biggr\} = c\biggl\{\tau(X_l f)(p(c\xi)) \\ + 2\sum_{j=1}^{n}([X_l f_j(p(c\xi)) - X_l f_j(p)][f_{n+j}(p(c\xi)) - f_{n+j}(p)] \\ - [X_l f_{n+j}(p(c\xi)) - X_l f_{n+j}(p)][f_j(p(c\xi)) - f_j(p)] \\ + X_l f_j(p)[f_{n+j}(p(c\xi)) - f_{n+j}(p)] - X_l f_{n+j}(p)[f_j(p(c\xi)) - f_j(p)]) - 2c\lambda(p,f)\xi_{n+l}\biggr\}.$$

Так как отображение f контактно, $\tau(X_l f)(p(c\xi))=0$ для почти всех $\xi\in B_2(0)$. Полагая для $\xi\in B_2(0)$

$$v(\xi) = \sum_{j=1}^{n}(X_l f_j(p)[f_{n+j}(p(c\xi)) - f_{n+j}(p)]$$

$$- X_l f_{n+j}(p)[f_j(p(c\xi)) - f_j(p)]) - c\lambda(p,f)\xi_{n+l},$$

получаем

$$|X_l u(\xi)| \le 2c\Bigg\{\sum_{j=1}^{n}(|X_l f_j(p(c\xi)) - X_l f_j(p)||f_{n+j}(p(c\xi)) - f_{n+j}(p)| \\ + |X_l f_{n+j}(p(c\xi)) - X_l f_{n+j}(p)||f_j(p(c\xi)) - f_j(p)|) + |v(\xi)|\Bigg\}. \quad (5.5)$$

Применяя предложение 5.3 к функциям $f_j(p(c\xi)) - f_j(p)$, $j = 1, \dots, 2n$, выводим для $\xi \in B_2(0)$

$$|f_j(p(c\xi)) - f_j(p)| \le C\|c\nabla f_j(p(c\cdot))\|_{s,B_4(0)} = Cc\|\nabla f_j(p(c\cdot))\|_{s,B_4(0)}. \quad (5.6)$$

Применяя предложение 5.3 к v, для $\xi \in B_2(0)$ получаем $|v(\xi)| \le C\|\nabla v\|_{s,B_4(0)}$. Для $m \ne n + l$

$$X_m v(\xi) = c\sum_{j=1}^{n}(X_l f_j(p)X_m f_{n+j}(p(c\xi)) - X_l f_{n+j}(p)X_m f_j(p(c\xi))) \\ = c\sum_{j=1}^{n}(X_l f_j(p)[X_m f_{n+j}(p(c\xi)) - X_m f_{n+j}(p)] \\ - X_l f_{n+j}(p)[X_m f_j(p(c\xi)) - X_m f_j(p)] + X_l f_j(p)X_m f_{n+j}(p) - X_l f_{n+j}(p)X_m f_j(p)).$$

В силу (3.3)

$$\sum_{j=1}^{2n}(X_l f_j(p)X_m f_{n+j}(p) - X_l f_{n+j}(p)X_m f_j(p)) = \frac{1}{4}d\tau(X_l f, X_m f) = 0.$$

Следовательно,

$$|X_m v(\xi)| \le c\sum_{j=1}^{n}(|X_l f_j(p)||X_m f_{n+j}(p(c\xi)) - X_m f_{n+j}(p)| \\ + |X_l f_{n+j}(p)||X_m f_j(p(c\xi)) - X_m f_j(p)|).$$

Для $m = n + l$

$$X_{n+l} v(\xi) = c\sum_{j=1}^{n}(X_l f_j(p)X_{n+l} f_{n+j}(p(c\xi)) - X_l f_{n+j}(p)X_{n+l} f_j(p(c\xi))) - c\lambda(p,f) \\ = c\sum_{j=1}^{n}(X_l f_j(p)[X_{n+l} f_{n+j}(p(c\xi)) - X_{n+l} f_{n+j}(p)] \\ - X_l f_{n+j}(p)[X_{n+l} f_j(p(c\xi)) - X_{n+l} f_j(p)] \\ + X_l f_j(p)X_{n+l} f_{n+j}(p) - X_l f_{n+j}(p)X_{n+l} f_j(p)) - c\lambda(p,f).$$

В силу (3.4)

$$\sum_{j=1}^{2n}(X_l f_j(p)X_{n+l} f_{n+j}(p) - X_l f_{n+j}(p)X_{n+l} f_j(p)) - \lambda(p,f)$$

$$= \frac{1}{4} d\tau(X_l f, X_{n+l} f) - \lambda(p, f) = 0.$$

Следовательно,

$$|X_{n+l} v(\xi)| \le c \sum_{j=1}^{n} (|X_l f_j(p)| |X_{n+l} f_{n+j}(p(c\xi)) - X_{n+l} f_{n+j}(p)| \\ + |X_l f_{n+j}(p)| |X_{n+l} f_j(p(c\xi)) - X_{n+l} f_j(p)|).$$

Значит, для $\xi \in B_2(0)$

$$|v(\xi)| \le Cc \sum_{m=1}^{2n} \sum_{j=1}^{n} (|X_l f_j(p)| \|X_m f_{n+j}(p(c\cdot)) - X_m f_{n+j}(p)\|_{s,B_4(0)} \\ + |X_l f_{n+j}(p)| \|X_m f_j(p(c\cdot)) - X_m f_j(p)\|_{s,B_4(0)}). \quad (5.7)$$

Используя соотношения (5.6) и (5.7) в (5.5), для $\xi \in B_2(0)$ и $1 \le l \le n$ выводим неравенство

$$|X_l u(\xi)| \le Cc^2 \Bigg\{ \sum_{j=1}^{n} (|X_l f_j(p(c\xi)) - X_l f_j(p)| \|\nabla f_{n+j}(p(c\cdot))\|_{s,B_4(0)} \\ + |X_l f_{n+j}(p(c\xi)) - X_l f_{n+j}(p)| \|\nabla f_j(p(c\cdot))\|_{s,B_4(0)}) \\ + \sum_{m=1}^{2n} \sum_{j=1}^{n} (|X_l f_j(p)| \|X_m f_{n+j}(p(c\cdot)) - X_m f_{n+j}(p)\|_{s,B_4(0)} \\ + |X_l f_{n+j}(p)| \|X_m f_j(p(c\cdot)) - X_m f_j(p)\|_{s,B_4(0)}) \Bigg\}.$$

Поэтому

$$\|X_l u(\xi)\|_{s,B_2(0)} \le Cc^2 \Bigg\{ \sum_{j=1}^{n} (\|X_l f_j(p(c\cdot)) - X_l f_j(p)\|_{s,B_2(0)} \|\nabla f_{n+j}(p(c\cdot))\|_{s,B_4(0)} \\ + \|X_l f_{n+j}(p(c\cdot)) - X_l f_{n+j}(p)\|_{s,B_2(0)} \|\nabla f_j(p(c\cdot))\|_{s,B_4(0)}) \\ + \sum_{m=1}^{2n} \sum_{j=1}^{n} (|X_l f_j(p)| \|X_m f_{n+j}(p(c\cdot)) - X_m f_{n+j}(p)\|_{s,B_4(0)} \\ + |X_l f_{n+j}(p)| \|X_m f_j(p(c\cdot)) - X_m f_j(p)\|_{s,B_4(0)}) \Bigg\}.$$

По теореме Лебега для $j = 1, \dots, 2n$ имеем

$$\|X_l f_j(p(c\cdot)) - X_l f_j(p)\|_{s,B_4(0)} \to 0, \quad \|\nabla f_j(p(c\cdot))\|_{s,B_4(0)} \to C|\nabla f_j(p)|$$

при $c \to 0$ для почти всех $p \in U$. Следовательно, для $l = 1, \dots, n$

$$\frac{\|X_l u\|_{s,B_2(0)}}{c^2} \to 0 \quad (5.8)$$

при $c \to 0$ для почти всех $p \in U$.

Аналогичным образом выводим (5.8) для $l = n+1, \dots, 2n$, т. е.

$$\frac{\|\nabla u\|_{s,B_2(0)}}{c^2} \to 0$$

при $c \to 0$ для почти всех $p \in U$.

Теперь из (5.4) заключаем, что

$$\frac{|u(q)|}{c^2} \to 0$$

при $c \to 0$ равномерно по $q \in B_1(0)$. Это завершает доказательство соотношения (5.3) и вместе с ним теоремы.

Доказательства следующих трех теорем повторяют рассуждения из [2, теоремы 4.3, 5.2 и 6.1].

5.4. Теорема. *Если $f : U \to \mathbb{H}^n$ — непостоянное отображение с ограниченным искажением области $U \subset \mathbb{H}^n$, то отображение f обладает $\mathcal{N}$- и $\mathcal{N}^{-1}$-свойствами и для него верны следующие утверждения.*

(a) *Если $A \subset U$ — измеримое множество и $u : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ — измеримая неотрицательная функция, то функции $(u \circ f)(p)|J(p, f)|$ и $u(q)N_f(q, A)$ измеримы и*

$$\int\limits_A (u \circ f)(p)|J(p, f)|\, dp = \int\limits_{\mathbb{H}^n} u(q)N_f(q, A)\, dq,$$

где $N_f(q, A)$ — кратность отображения f в точке q.

(b) *Если $G \subset U$ — компактная область такая, что $|\partial G| = 0$, и $u : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ — измеримая функция такая, что функция $u(\cdot)\mu(\cdot, f, A)$ интегрируема, то функция $(u \circ f)(\cdot)J(\cdot, f)$ интегрируема на G и выполнено равенство*

$$\int\limits_G (u \circ f)(p)J(p, f)\, dp = \int\limits_{\mathbb{H}^n} u(q)\mu(q, f, G)\, dq,$$

где $\mu(q, f, G)$ — степень отображения f в точке q относительно G.

5.5. Теорема. *Если $f : U \to \mathbb{H}^n$ — непостоянное отображение с ограниченным искажением области $U \subset \mathbb{H}^n$, то f дискретно, открыто и сохраняет ориентацию.*

5.6. Теорема. *Пусть $f : U \to \mathbb{H}^n$ — отображение с искажением 1 области $U \subset \mathbb{H}^n$. Тогда f либо постоянно, либо является сужением на U действия элемента группы $SU(1, n+1)$.*

В заключение сформулируем обобщения результатов работы [4]. Замена группы $\mathbb{H}^1$ группами $\mathbb{H}^n$ не вносит принципиальных изменений в доказательства.

5.7. Теорема. *Пусть U — область в $\mathbb{H}^n$ и $f_j : U \to \mathbb{H}^n$, $j = 1, 2, \dots,$ — последовательность отображений с искажением K, сходящаяся локально равномерно в U к отображению $f : U \to \mathbb{H}^n$. Тогда f является отображением с ограниченным искажением, причем $K(f) \leq \varliminf\limits_{j\to\infty} K(f_j)$.*

5.8. Теорема. *Существует $K_n > 1$ такое, что каждое непостоянное отображение с искажение K_n, определенное на области U группы Гейзенберга $\mathbb{H}^n$, является инъективным на каждом шаре $B = B_R(a)$ таком, что шар $B_{9R}(a)$ в девять раз большего радиуса содержится в U.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Даирбеков Н. С.* Свойство морфизма для отображений с ограниченным искажением на группе Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 810–822.
2. *Даирбеков Н. С.* Об отображениях с ограниченным искажением на группе Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 50–60.
3. *Даирбеков Н. С.* Отображения с ограниченным искажением на группе Гейзенберга // Докл. РАН. 1999. Т. 369, № 1. С. 7–9.
4. *Даирбеков Н. С.* Предел последовательности отображений с ограниченным искажением на группе Гейзенберга и теорема о локальном гомеоморфизме // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 316–328.
5. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
6. *Rickman S.* Quasiregular mappings. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1993.
7. *Водопьянов С. К.* Отображения с ограниченным и с конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 764–804.
8. *Heinonen J., Holopainen I.* Quasiregular maps on Carnot groups // J. Geom. Anal. 1997. V. 7, N 1. P. 109–148.
9. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Аппроксимативно дифференцируемые преобразования и замена переменных на нильпотентных группах // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 1. С. 70–89.
10. *Korányi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111, N 1. P. 1–87.
11. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1982 (Princeton Mathematical Notes; 28).
12. *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.

Статья поступила 16 декабря 1998 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
dair@math.nsc.ru