Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2000. Том 41, № 3

УДК 512.544

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ БЭРА — СУДЗУКИ

А. И. Созутов

Аннотация: Дается положительный ответ на вопрос 11.11 А. В. Боровика из «Коуровской тетради» в классе бинарно конечных групп. Библиогр. 5.

В 1990 г. в «Коуровской тетради» [1] А. В. Боровик поставил следующий вопрос.

Вопрос 11.11. *Известная теорема Бэра — Судзуки для конечных групп утверждает, что элемент группы, порождающий вместе с каждым своим сопряженным элементом конечную p-группу, лежит в нормальной p-подгруппе. Верна ли эта теорема в классе периодических групп или хотя бы в классе бинарно конечных групп? Особенно интересен случай $p = 2$.*

В данной работе дается утвердительный ответ на этот вопрос в классе бинарно конечных групп. Следуя терминологии статьи [2], элемент a группы G будем называть *нильпотентным*, если все подгруппы вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$, где $g \in G$, нильпотентны. Из теоремы Бэра — Судзуки и известной теоремы Плоткина [3] легко вытекает следующее утверждение: *множество всех нильпотентных элементов локально конечной группы составляет ее локально нильпотентный радикал.*

Обобщим данное утверждение.

Теорема 1. *Если нильпотентный π-элемент b в группе G с каждым π-элементом из $B = \langle b^G \rangle$ порождает конечную подгруппу, то $\pi(B) = \pi$ и B есть прямое произведение своих силовских подгрупп, нормальных в G.*

Доказательство. Пусть $p \in \pi$ и a — произвольный p-элемент из $\langle b \rangle$. Из условий теоремы легко следует, что a — нильпотентный элемент в G.

Покажем, что $a \in O_p(G)$. Очевидно, для этого достаточно доказать, что произведение $x = a_1 a_2 \dots a_n$ любого конечного числа элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in a^G$ есть p-элемент. Доказательство утверждения проведем индукцией.

При $n = 1$ и $n = 2$ утверждение справедливо ввиду выбора элемента a и нильпотентности подгрупп $\langle a, a^g \rangle$. Предположим теперь, что $y = a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ — p-элемент. Очевидно, что $y \in B$ и ввиду условий теоремы подгруппа $L = \langle y, a_n \rangle$ конечна, причем элемент a_n порождает в L с любым своим сопряженным элементом p-группу. По теореме Бэра — Судзуки $a_n \in O_p(L)$ и, следовательно, $x = y a_n$ — p-элемент. Таким образом, $a \in O_p(G)$ и $A = \langle a^G \rangle$ — p-подгруппа.

Далее, как хорошо известно, b есть произведение $b = b_1 \cdot \ldots \cdot b_n$ своих p_i-элементов b_i максимального порядка, где $\pi = \{p_1, \dots, p_n\}$. По доказанному

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00542).

выше нормальная подгруппа $B_i = \langle b_i^G \rangle$ группы G является p_i-подгруппой и очевидно, что $B = \langle B_1, \dots, B_n \rangle = B_1 \times \dots \times B_n$ и $\pi(B) = \pi$. Теорема доказана.

Напомним, что группа называется (*сопряженно*) *бинарно конечной*, если в ней любые два (сопряженных) элемента порождают конечную подгруппу (см., например, [4]). Сформулируем частичный ответ на вопрос 11.11 из [1].

Теорема. *Теорема Бэра — Судзуки справедлива в классе бинарно конечных групп, а при $p = 2$ — и в классе сопряженно бинарно конечных групп.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы непосредственно вытекает из теоремы 1. Докажем вторую часть теоремы. Пусть b — 2-элемент сопряженно бинарно конечной группы G и для каждого $g \in G$ подгруппа $\langle b, b^g \rangle$ является конечной 2-группой. Если $|b| = 2$, то для любого 2-элемента $x \in B = \langle b^G \rangle$ подгруппа $K = \langle x, x^b \rangle$ конечна, причем очевидно, что $b \in N_G(K)$ и, значит, $L = \langle x, b \rangle$ — конечная подгруппа. Таким образом, для элемента b и группы G выполняются все условия теоремы 1. По теореме 1 $b \in O_2(G)$, что и утверждает теорема Бэра — Судзуки.

Пусть теперь $|b| > 2$. Ввиду вышедоказанного и индуктивного предположения мы можем считать, что $b^2 \in O_2(G)$. Если $b \notin O_2(G)$, то в фактор-группе $\overline{G} = G/O_2(G)$ инволюция $\bar{b}$ порождает с каждой сопряженной с ней инволюцией конечную 2-подгруппу, и также легко убедиться, что $\overline{G}$ — сопряженно бинарно конечная группа. По рассмотренному выше случаю $\bar{b} \in O_2(\overline{G})$; противоречие. Следовательно, $b \in O_2(G)$. Теорема доказана.

В связи с рассматриваемым вопросом отметим также непосредственное следствие одного результата В. П. Шункова (теоремы 2.3 из [5]): *нильпотентный элемент с черниковским централизатором содержится в локально нильпотентном радикале группы.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коуровская* тетрадь. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1995.
2. *Созутов А. И.* О группах с классом фробениусово-абелевых элементов // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 5. С. 531–549.
3. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
4. *Созутов А. И.* О примерах ассоциативных нильалгебр // Мат. заметки. 1995. Т. 57, № 3. С. 445–450.
5. *Шунков В. П.* M_p-группы. М.: Наука, 1990.

Статья поступила 17 сентября 1998 г.

г. Красноярск
Красноярская гос. архитектурно-строительная академия
root@sozutov.krasnoyarsk.su