Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2000. Том 41, № 3

УДК 517.977

e–ИММУННЫЕ МНОЖЕСТВА

Б. Я. Солон

Аннотация: Изучаются свойства множеств, e-степени которых нетотальны. Введение класса e-иммунных множеств связано с рассмотрением проблемы описания нетотальных e-степеней.

Будем придерживаться терминологии и обозначений, принятых в монографии [1]. Напомним те из них, которые используются в данной статье. N — множество натуральных чисел; A, B, C (с индексами или без них) — подмножества N; D_u — конечное множество с каноническим индексом u; $\langle x, y\rangle$ — канторовский номер упорядоченной пары (x, y). Если z — канторовский номер упорядоченной пары (x, y), то положим $\langle z\rangle_1 = x$, $\langle z\rangle_2 = y$. Пусть $\delta\alpha$ — область определения, $\rho\alpha$ — множество значений частичной арифметической функции α, $\tau\alpha = \{\langle x, y\rangle : x \in \delta\alpha \wedge y = \alpha(x)\}$ — график α. Множество A называется *однозначным*, если $A = \tau\alpha$ для некоторой функции α. Если A — однозначное множество и $A = \tau\alpha$, то будем использовать обозначение $A(x) = \alpha(x)$. Для сокращения записи вместо $x \in \delta\alpha$ будем писать $!\alpha(x)$. Тот факт, что A не является однозначным множеством, будем записывать символически $\forall\alpha[A \neq \tau\alpha]$. Символы f и g будем использовать только для обозначения тотальных функций ($\delta f = \delta g = N$). Если A — конечное множество, то через $|A|$ будем обозначать число элементов A. Если A — бесконечное множество, то будем писать $|A| = \infty$.

Напомним, что A *e-сводится к B посредством n*, если

$$\forall x[x \in A \iff \exists u[\langle x, u\rangle \in W_n \wedge D_u \subseteq B]],$$

и A *e-сводится к B* ($A \leq_e B$), если существует $n \in N$ такое, что A e-сводится к B посредством n. Через Φ_n будем обозначать *оператор перечисления* (или *e-оператор*), для которого

$$\Phi_n(B) = \{x : \exists u[\langle x, u\rangle \in W_n \wedge D_u \subseteq B]\}.$$

Таким образом, $A \leq_e B \iff \exists n[A = \Phi_n(B)]$. Будем писать $A <_e B$, если $A \leq_e B \wedge B \nleq_e A$; $\alpha \leq_e A$, если $\tau\alpha \leq_e A$. Обозначим через $d_e(A) = \{B : B \leq_e A \wedge A \leq_e B\}$ *e-степень* множества A. Частично упорядоченное множество e-степеней образует верхнюю полурешетку L_e с наименьшим элементом $\mathbf{0}$ — e-степенью, состоящей их всех рекурсивно перечислимых множеств. e-Степень называется *тотальной*, если она содержит график тотальной функции.

Первый серьезный вопрос о e-сводимости решен Ю. Т. Медведевым [2]: существуют нетотальные e-степени. В [2] построено не рекурсивно перечислимое множество A такое, что для любой тотальной функции f если $f \leq_e A$, то f — общерекурсивная функция. J. Case [3] назвал множества, построенные Медведевым, *квазиминимальными*, а их e-степени — *квазиминимальными e-степенями.* Отметим, что существуют нетотальные e-степени, не являющиеся квазиминимальными.

Дадим некоторое обобщение понятия квазиминимального множества. Множество A называется B-*квазиминимальным*, если $B <_e A$ и для любой тотальной функции g если $g \le_e A$, то $g \le_e B$. Ясно, что если B — произвольное рекурсивно перечислимое множество, то B-квазиминимальное множество A является просто квазиминимальным. Существование B-квазиминимальных множеств для любого B впервые доказано L. P. Sasso [4].

Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — элементы множества A, расположенные в порядке возрастания, или *прямой пересчет* A. Множество A называется *ретрассируемым*, если существует частично рекурсивная функция ψ такая, что $A \subseteq \delta\psi$, $\psi(a_0) = a_0$ и $\psi(a_n) = a_{n-1}$ для всех $n > 0$. Легко увидеть, что если B — бесконечное подмножество ретрассируемого множества A, то $A \le_e B$. В статье [5] вводится понятие e-гипериммунного множества: бесконечное множество A называется e-*гипериммунным*, если не существует тотальной функции g такой, что $g \le_e A \wedge \forall n[a_n \le g(n)]$. Если для некоторой функции g выполнено $a_n \le g(n)$ для всех $n \in N$, то будем говорить, что функция g *мажорирует* множество A. Таким образом, бесконечное множество A e-гипериммунно тогда и только тогда, когда оно не мажорируется никакой тотальной функцией $g \le_e A$.

В [5] доказано существование e-гипериммунных множеств и нетотальность любой e-степени, содержащей e-гипериммунного множества. В статье сформулирован вопрос, каждая ли нетотальная e-степень содержит e-гипериммунное множество. Дадим отрицательный ответ на этот вопрос. Для этого расширим класс e-гипериммунных множеств так, чтобы любое множество из этого класса принадлежало нетотальной e-степени.

Определение. Бесконечное множество A называется e-*иммунным*, если

$$\rho f \subseteq A \to |\rho f| < \infty$$

для любой тотальной функции $f \le_e A$.

Существование и простейшие свойства e-иммунных множеств докажем в следующем предложении.

Предложение 1. (а) *Если A — e-гипериммунное, то A — e-иммунное;*
(б) *если A — e-иммунное, то A — иммунное;*
(в) *если A — e-иммунное, то $d_e(A)$ — нетотальная e-степень;*
(г) *если A — иммунное квазиминимальное, то A — e-иммунное.*

Доказательство. (а) Предположим, что бесконечное множество A не является e-иммунным и $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ — прямой пересчет A. Тогда существует тотальная функция $f \le_e A$ такая, что $\rho f \subseteq A$ и ρf — бесконечное множество. Определим тотальную функцию $g \le_e A$, мажорирующую A. Пусть $g(0) = f(0)$. Предположим, что значения $g(0), \ldots, g(n-1)$ уже определены. Так как ρf бесконечно, существует $x_n = \min\{x : f(x) > g(n-1)\}$. Определим $g(n) = f(x_n)$. Ясно, что g — тотальная строго возрастающая функция, $g \le_e f$, $\rho g \subseteq \rho f \subseteq A$ и ρg — бесконечное множество. Докажем, что g мажорирует A. Так как $g(0) \in A$, то $a_0 \le g(0)$. Пусть $a_i \le g(i)$ для всех $i < n$. Предположим, что $a_n > g(n)$. Тогда $g(n) \le a_i$ для некоторого $i < n$. Имеем $g(n) \le a_i \le g(i)$, что невозможно, ибо g — строго возрастающая функция. Так как g мажорирует A, то A не является e-гипериммунным множеством.

(б) Пусть $W \subseteq A$ — бесконечное рекурсивно перечислимое подмножество и общерекурсивная функция f перечисляет W. Тогда $\rho f = W \subseteq A$ и $f \le_e A$. Следовательно, A не является e-иммунным.

(в) Предположим, что $d_e(A)$ — тотальная e-степень. Тогда по любому перечислению A можно эффективно получить пересчет A в некотором фиксированном порядке $\{a'_n : n \in N\}$ [3]. Определим $f(n) = a'_n$ для всех $n \in N$. Ясно, что $f \equiv_e A$, $\rho f \subseteq A$ и ρf — бесконечное множество, что противоречит e-иммунности A.

(г) Предположим, что A не является e-иммунным множеством. Тогда существует тотальная функция $f \leq_e A$ такая, что $\rho f \subseteq A$ и ρf — бесконечное множество. Так как A — квазиминимальное множество, то f — общерекурсивная функция, и тогда ρf — бесконечное рекурсивно перечислимое подмножество A, что противоречит иммунности A.

Предложение 2. *Если A — e-иммунное множество, B — A-квазиминимальное, то $\exists C[C \in d_e(B) \wedge\ C$ — e-иммунное$]$.*

Доказательство. Пусть $a_0, a_1, \dots$ — прямой пересчет A и $C = \{\langle a_n, y\rangle : y \in B \wedge y \leq n\}$. Так как A e-иммунное, то, в частности, A бесконечное, поэтому $B = \{y : \exists x[\langle x, y\rangle \in C]\}$ и $B \leq_e C$. С другой стороны, опишем процедуру, эффективную относительно произвольного перечисления B, позволяющую перечислить множество C. Используя $A \leq_e B$, перечисляем элементы A. Если обнаружим числа x и y такие, что y находится среди перечисленных элементов B, x находится среди перечисленных элементов A и среди перечисленных элементов A есть не менее y различных чисел, меньших x, то зачисляем $\langle x, y\rangle$ в множество C. Следовательно, $C \leq_e B$ и $C \in d_e(B)$.

Докажем, что C — e-иммунное множество. Пусть f — тотальная функция, $f \leq_e C$ и $\rho f \subseteq C$. Рассмотрим $f_1(x) = \langle f(x)\rangle_1$, тогда $f_1 \leq_e C$ и $f_1 \leq_e B$. Так как B — A-квазиминимальное множество, то $f_1 \leq_e A$. Из определения f_1 следует, что $\rho f_1 \subseteq A$, поэтому $|\rho f_1| < \infty$. Но при любом x множество $\{z : \langle z\rangle_1 = x \wedge z \in C\}$ конечно, тем самым $|\rho f| < \infty$, т. е. C — e-иммунное множество.

Несмотря на предложение 2, свойство e-степени содержать e-иммунное множество не наследуется вверх в L_e. Из предложения 1(в) следует, что любая тотальная e-степень не содержит e-иммунных множеств. Но, как показывает следующая теорема, для любого e-иммунного множества A можно указать такую нетотальную e-степень $d_e(B)$, что $A <_e B$ и $d_e(B)$ не содержит e-иммунных множеств.

Теорема 1. *Для любого ретрассируемого множества B существует множество A такое, что $B <_e A$, $d_e(A)$ — нетотальная e-степень, и если множество C таково, что $B <_e C \leq_e A$, то оно не является e-иммунным множеством.*

Доказательство. Пусть B — бесконечное ретрассируемое множество. Построим по шагам множество A так, чтобы выполнялась конъюнкция следующих условий:

(i) $A \subset B$ и A — бесконечное множество;

(ii) $A \not\leq_e B$;

(iii) A — B-квазиминимальное множество;

(iv) $\forall n[B <_e \Phi_n(A) \leq_e A \to \exists g[\rho g \subseteq \Phi_n(A) \wedge |\rho g| = \infty \wedge g \leq_e \Phi_n(A)]]$.

Если такое множество A построено, то из (i) следует, что $B \leq_e A$, из (ii) — что $B <_e A$, из (iii) — что $d_e(A)$ — нетотальная e-степень и из (iv) — что $\forall C[B <_e C \leq_e A \to C$ — не e-иммунное множество$]$.

Пусть A_t — часть A, построенная к началу шага $t+1$, причем A_t может быть бесконечным множеством, $A_t \subseteq A_{t+1} \subset B$ и $B - A_t$ бесконечно для всех $t \in N$. В ходе конструкции будет построена последовательность конечных множеств

Z_n, $n \in N$, такая, что $Z_n \subseteq Z_{n+1} \subset B$ и $Z_n \cap A_t = \varnothing$ для всех $n, t \in N$. На каждом шаге t конструкции будем добиваться, чтобы существовало бесконечное множество U такое, что

$$U \subseteq B - (A_t \cup Z_t) \wedge U \leq_e B. \tag{1}$$

Шаг 0. Полагаем $A_0 = Z_0 = \varnothing$. Ясно, что условие (1) выполнено.

Шаг $4n+1$. Пусть $t = 4n$ и $a = \min(B - (A_t \cup Z_t))$. Так как $B - A_t$ бесконечно и Z_t конечно, то $B - (A_t \cup Z_t) \neq \varnothing$ и такое a найдется. Полагаем $A_{t+1} = A_t \cup \{a\}$ и $Z_{t+1} = Z_t$. Ясно, что в этом случае выполнено (1). Шаги $4n+1$, $n \in N$, обеспечивают бесконечность множества A. Поскольку $A \subset B$, условие (i) будет в результате построения выполнено.

Шаг $4n+2$. Пусть $t = 4n+1$. Проверим, что

$$\Phi_n(B) \subseteq A_t \vee \Phi_n(B) \nsubseteq B. \tag{2}$$

Если (2) выполнено, то полагаем $A_{t+1} = A_t$ и $Z_{t+1} = Z_t$. Если (2) не выполнено, то

$$\exists z[z \in (\Phi_n(B) - A_t) \cap B]. \tag{3}$$

Пусть z^* — наименьшее z, удовлетворяющее условию (3). Полагаем $A_{t+1} = A_t$ и $Z_{t+1} = Z_t \cup \{z^*\}$. Ясно, что в любом случае условие (1) выполняется. Шаги $4n+2$, $n \in N$, обеспечивают выполнение (ii). В самом деле, если (2) выполнено, то либо $\Phi_n(B)$ — конечное множество, если $\Phi_n(B) \subseteq A_t$, и тогда $\Phi_n(B) \neq A$, либо $\exists x[x \in \Phi_n(B) - B]$, а так как $A \subseteq B$, то $\Phi_n(B) \neq A$. Если (2) не выполнено, то $z^* \in \Phi_n(B)$ и $z^* \notin A$, и тогда также $\Phi_n(B) \neq A$.

Шаг $4n+3$. Пусть $t = 4n+2$. Проверим, что

$$(\exists D \subseteq B)[D \cap Z_t = \varnothing \wedge \forall \alpha[\Phi_n(A_t \cup D) \neq \tau\alpha]]. \tag{4}$$

Если (4) выполнено, то пусть D^* имеет наименьший канонический индекс среди конечных множеств D, удовлетворяющих (4). Полагаем $A_{t+1} = A_t \cup D^*$ и $Z_{t+1} = Z_t$. Если (4) не выполнено, то $A_{t+1} = A_t$ и $Z_{t+1} = Z_t$. При этом, как легко увидеть, выполнено условие (1). Тогда

$$(\forall D \subseteq B)[D \cap Z_t = \varnothing \to \exists \alpha[\Phi_n(A_t \cup D) = \tau\alpha]] \tag{5}$$

и поэтому $\Phi_n(A)$ — однозначное множество.

Шаги $4n+3$ обеспечивают B-квазиминимальность множества A. В самом деле, пусть $g \leq_e A$. Тогда $\tau g = \Phi_n(A)$ для некоторого $n \in N$. Рассмотрим шаг $4n+3$. Ясно, что в этом случае (4) не выполнено. Покажем, что тогда $\Phi_n(B - Z_t)$ — однозначное множество. Если это неверно, то существуют $x, y', y'' \in N$ и конечное множество D такие, что $D \subseteq B - Z_t$ и $\langle x, y' \rangle, \langle x, y'' \rangle \in \Phi_n(A_t \cup D)$ и $y' \neq y''$. Тогда $\Phi_n(A_t \cup D)$ — неоднозначное множество, что противоречит предположению о выполнимости условия (5). Итак, $\Phi_n(B - Z_t)$ — однозначное множество. Так как $A \subseteq B - Z_t$, то $\tau g = \Phi_n(A) \subseteq \Phi_n(B - Z_t)$, следовательно, $\tau g = \Phi_n(B - Z_t)$. Поскольку Z_t — конечное множество, то $g \leq_e B - Z_t \leq_e B$. Таким образом, для A выполнено (iii).

Шаг $4n+4$. Пусть $t = 4n+3$. Проверим, что

$$(\exists D \subseteq B)[D \cap A_t = \varnothing \wedge Z_t \subseteq D \wedge |\Phi_n(B - D)| < \infty]. \tag{6}$$

Пусть D^* имеет наименьший канонический индекс среди D, удовлетворяющих (6). Полагаем $A_{t+1} = A_t$ и $Z_{t+1} = D^*$. Если (6) не выполнено, то

$$(\forall D \subseteq B)[D \cap A_t = \varnothing \wedge Z_t \subseteq D \to |\Phi_n(B - D)| = \infty]. \tag{7}$$

Определим тотальную функцию $g \le_e B$ так, чтобы $|\rho g| = \infty$ и $\rho g \subseteq \Phi_n(A_{t+1}) \subseteq \Phi_n(A)$. Для этого построим последовательности $\{g^k : k \in N\}$ начальных сегментов функции g, $\{Q^k : k \in N\}$ конечных множеств и $\{A_t^k : k \in N\}$ по шагам, причем $Q = \bigcup\limits_{k\in N} Q^k \le_e B$ — бесконечное подмножество $B - A_{t+1}$, где $A_{t+1} = A_t \cup \bigcup\limits_{k\in N} A_t^k$, которое подтверждает выполнимость условия (1).

Подшаг 0. Перечисляем W_n в стандартном порядке до тех пор, пока не встретим пару $\langle x^*, y^*\rangle$ такую, что $D_{y^*} \subseteq B - Z_t$. Полагаем $g^0 = \{\langle 0, x^*\rangle\}$ и $A_t^0 = D_{y^*}$. Заметим, что такая пара $\langle x^*, y^*\rangle$ обязана появиться в стандартном перечислении W_n, так как условие (7) должно быть выполнено, в частности, для $D = Z_t$. Пусть $U \le_e B$ — бесконечное подмножество $B - A_t$, существование которого следует из выполнимости условия (1). Перечисляем U (используя произвольное перечисление B) до тех пор, пока не найдем такое $u \in U$, что $u \notin A_t^0$. Такое u найдется, ибо A_t^0 — конечное, а U — бесконечное множества. Полагаем $Q^0 = \{u\}$.

Подшаг $k+1$. Пусть $g^k = \{\langle 0, g(0)\rangle, \dots, \langle k, g(k)\rangle\}$. Перечисляем W_n в стандартном порядке до тех пор, пока не встретим пару $\langle x^*, y^*\rangle$ такую, что $x^* > g(k)$ и $D_{y^*} \subseteq B - (Z_t \cup Q^k)$, $D_{y^*} \cap A_t = \varnothing$. Такая пара должна появиться обязательно, так как из выполнимости условия (7) следует, что $|\Phi_n(B - (Z_t \cup Q^k)| = \infty$ (для $D = Z_t \cup Q^k$). Полагаем $g(k+1) = x^*$ и $A_t^{k+1} = A_t^k \cup D_{y^*}$. Перечисляем U (используя произвольное перечисление B) до тех пор, пока не найдем такое $u \in U$, что

$$u \notin A_t^{k+1} \cup Z_t \cup Q^k. \tag{8}$$

Такое z найдется, поскольку конструкция гарантирует, что $|A_t^{k+1} \cup Z_t \cup Q^k| < \infty$, а U — бесконечное множество. Полагаем $Q^{k+1} = Q^k \cup \{u\}$.

Докажем, что если $B <_e \Phi_n(A)$, то $\Phi_n(A)$ не является e-иммунным множеством. Если на шаге $4n+4$ выполнено (6), то, так как $A \subseteq B - D^*$ и $\Phi_n(A) \subseteq \Phi_n(B - D^*)$, множество $\Phi_n(A)$ будет конечным и поэтому не e-иммунным множеством. Пусть теперь на шаге $4n+4$ выполнено условие (7). Тогда построим тотальную функцию g и множество $Q \le_e B$ такие, что $Q \subseteq B - A_{t+1}$. Так как построение g эффективно относительно произвольного перечисления B, имеем $g \le_e B \le_e \Phi_n(A)$. Из построения видно, что g — возрастающая функция, тем самым $|\rho g| = \infty$. Наконец, конечные множества D^*, выбранные на подшагах k, $k \in N$, являются подмножествами $A_{t+1} \subset A$, причем $\langle x^*, y^*\rangle \in W_n$, поэтому $g(k) = x^* \in \Phi_n(A)$ для всех $k \in N$ (конечно, x^* зависит от k). Таким образом, $\rho g \subseteq \Phi_n(A)$. Это означает, что $\Phi_n(A)$ не является e-иммунным множеством, т. е. выполнено условие (iii), и теорема доказана.

Из теоремы 1, в частности, следует, что существуют нетотальные e-степени, не содержащие e-иммунных множеств. Это дает ответ на вопрос из статьи [5]. Несмотря на теорему 1, можно доказать, что для любого ретрассируемого множества B существует несчетное семейство EI_B e-иммунных множеств, расположенных в L_e строго выше B. Докажем сначала следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любого ретрассируемого множества B существует счетный набор e-иммунных множеств $A_0, A_1, \dots, A_k, \dots$ таких, что $B <_e A$ и $A_k \nleq_e A_l$ для всех $k, l \in N$ и $k \neq l$.*

Доказательство. Пусть B — бесконечное ретрассируемое множество. Построим по шагам множества $A_0, A_1, \dots, A_k, \dots$ так, что

(i) $\forall k[|A_k| = \infty \wedge A_k \subseteq B]$,

(ii) $\forall k \forall g[g \leq_e A_k \wedge \rho g \subseteq A_k \to |\rho g| < \infty]$,

(iii) $\forall k \forall l[k \neq l \to A_k \not\leq_e A_l]$.

Заметим, что если A_k — бесконечное множество и $A_k \subseteq B$, то $B \leq_e A_k$ и $A_k \not\leq_e B$, так как в противном случае $A_k \leq_e B \leq_e A_l$ для некоторых $k \neq l$, что противоречит (iii). Если выполнено (ii), то A_k — e-иммунное множество.

Обозначим через A_{k_t} часть A_k, построенную к началу шага $t+1$. Пусть $A_k = \bigcup\limits_{t \in N} A_{k_t}$, $k \in N$. В ходе конструкции будет образовано вспомогательное множество Z, обозначим через Z_t конечную часть Z, построенную к началу шага $t+1$. Пусть $g_0, g_1, \dots, g_n, \dots$ — все тотальные функции, e-сводимые к B.

Шаг 0. Полагаем $A_{k_0} = \varnothing$ для всех $k \in N$ и $Z_0 = \varnothing$.

Шаг $t+1$. Пусть $t = \langle k, l, s \rangle$. Последовательно проверяя приведенные ниже условия, после определения $A_{k_{t+1}}$ переходим к шагу $t+2$.

Если $s = 3n$ и $|\rho g_n| < \infty$, то полагаем $A_{k_{t+1}} = A_{k_t} \cup \{x^*\}$ и $Z_{t+1} = Z_t$, где $x^* = \min(B - Z_t)$. Если ρg_n — бесконечное множество, то

$$\exists z[z \in \rho g_n - A_{k_t}]. \tag{1}$$

Пусть z^* — наименьшее z, удовлетворяющее (1). Полагаем $Z_{t+1} = Z_t \cup \{z^*\}$ и $A_{k_{t+1}} = A_{k_t} \cup \{x^*\}$, где $x^* = \min(B - Z_{t+1})$.

Если $s = 3n+1$, проверим, что

$$\exists D[D \subseteq B \wedge D \cap Z_t = \varnothing \wedge \forall \alpha[\Phi_n(A_{k_t} \cup D) \neq \tau\alpha]]. \tag{2}$$

Если (2) выполнено, то полагаем $A_{k_{t+1}} = A_{k_t} \cup D^*$, где D^* имеет наименьший канонический индекс среди D, удовлетворяющих (2), и $Z_{t+1} = Z_t$. Если (2) не выполнено, то

$$\forall D[D \subseteq B \wedge D \cap Z_t = \varnothing \to \exists \alpha[\Phi_n(A_{k_t} \cup D) = \tau\alpha]],$$

т. е. $\Phi_n(A_{k_t})$ является однозначным множеством для всех $t \in N$. В этом случае $\Phi_n(A_k) = \tau g$ для некоторой функции g.

Проверим

$$\exists D \exists m[D \subseteq B \wedge D \cap Z_t = \varnothing \wedge !\Phi_n(A_{k_t} \cup D)(m) \wedge \Phi_n(A_{k_t} \cup D)(m) \notin A_{k_t} \cup D]. \tag{3}$$

Если (3) выполнено, то полагаем $A_{k_{t+1}} = A_{k_t} \cup D^*$ и $Z_{t+1} = Z_t \cup \{\Phi_n(A_{k_t} \cup D^*)(m^*)\}$, где D^* имеет наименьший канонический индекс среди D, удовлетворяющих (3), и m^* — наименьшее m, удовлетворяющее (3) для $D = D^*$. В противном случае полагаем $A_{k_{t+1}} = A_{k_t}$ и $Z_{t+1} = Z_t$.

Если $s = 3n+2$, то проверим

$$\exists x \exists D[x \in \overline{A_{k_t}} \wedge D \subseteq B \wedge D \cap Z_t = \varnothing \wedge x \in \Phi_n(A_{l_t} \cup D) \cap B]. \tag{4}$$

Если (4) выполнено, то полагаем $A_{k_{t+1}} = A_{k_t}$ и $Z_{t+1} = Z_t \cup \{x^*\}$, где x^* — наименьшее x, удовлетворяющее (4), и $A_{l_{t+1}} = A_{l_t} \cup D^*$, где D^* имеет наименьший канонический индекс среди конечных множеств D, удовлетворяющих (4) для $x = x^*$. Если (4) не выполняется, то

$$\forall x \forall D[x \in \overline{A_{k_t}} \wedge D \subseteq B \wedge D \cap Z_t = \varnothing \to x \notin \Phi_n(A_{l_t} \cup D) \cap B]. \tag{5}$$

Пусть $x^* = \min(B - Z_t)$. Тогда полагаем $A_{k_{t+1}} = A_{k_t} \cup \{x^*\}$, $A_{l_{t+1}} = A_{l_t}$ и $Z_{t+1} = Z_t$.

Описание конструкции закончено. Покажем, что построенные множества A_k удовлетворяют условиям (i)–(iii) для всех $k \in N$. Из описания конструкции легко увидеть, что $A_{k_t} \subseteq A_{k_{t+1}} \subseteq B$ для всех $k, t \in N$, поэтому $A_k \subseteq B$ для всех $k \in N$ и условие (i) выполнено.

Шаги $t+1$, где $t = \langle k, l, s \rangle$ и $s = 3n$, гарантируют выполнение следующего условия для всех $k \in N$:

$$\forall n[\rho g_n \subseteq A_k \to |\rho g_n| < \infty].$$

Пусть g — тотальная функция и $g \leq_e A_k$, т. е. $\tau g = \Phi_n(A_k)$ для некоторого $n \in N$. Рассмотрим шаг $t+1$, где $t = \langle k, 0, s \rangle$ и $s = 3n+1$. Если (2) было выполнено, то $\Phi_n(A_k)$ не может быть однозначным множеством, поэтому

$$\forall D[D \subseteq B \wedge D \cap Z_t = \varnothing \to \exists \alpha[\Phi_n(A_{k_t} \cup D) = \tau \alpha]].$$

Ясно, что в этом случае $\Phi_n(B - Z_t)$ — однозначное множество. Так как $A_k \subseteq B - Z_t$, то $\tau g = \Phi_n(A_k) \subseteq \Phi_n(B - Z_t)$ и поэтому $\tau g = \Phi_n(B - Z_t)$. Другими словами, $g \leq_e B - Z_t \leq_e B$, тем самым $g = g_n$ для некоторого $n \in N$. Как было замечено выше, в этом случае $\rho g \subseteq A_k \to |\rho g| < \infty$ и условие (ii) выполнено.

Наконец, покажем, что $A_k \not\leq A_l$ для всех $k \neq l$. Предположим, что это неверно. Тогда $A_k = \Phi_n(A_l)$ для некоторого $n \in N$. Рассмотрим шаг $t+1$, где $t = \langle k, l, s \rangle$ и $s = 3n+2$. Если (4) выполнено, то $x^* \notin A_k$ и $x^* \in \Phi_n(A_{l_t} \cup D^*)$, следовательно, $x^* \in \Phi_n(A_l)$. Если (5) выполнено, то $x^* \in A_{k_{t+1}} \subseteq A_k \subseteq B$ и $\forall D[D \subseteq B \wedge D \cap Z_t = \varnothing \to x^* \notin \Phi_n(A_{l_t} \cup D) \cap B)]$, поэтому $\forall D[D \subseteq B \wedge D \cap Z_t = \varnothing \to x^* \notin \Phi_n(A_{l_t} \cup D)]$. Это означает, что $x^* \notin \Phi_n(A_l)$. В любом случае, $A_k \neq \Phi_n(A_l)$ и условие (iii) выполнено. Теорема доказана.

Следствие 1. *Существует несчетная возрастающая цепь e-иммунных множеств.*

Доказательство. Пусть A_0 — какое-либо e-иммунное множество и $\mathbf{J}(A_0)$ — e-скачок A_0. Тогда существует ретрассируемое множество $B_1 \equiv_e \mathbf{J}(A_0)$. Из теоремы 2 следует, что в этом случае существует e-иммунное множество A_1 такое, что $B_1 <_e A_1$. Следовательно, $A_0 <_e A_1$ и т. д. Пусть $\mathbf{C}$ — семейство всех возрастающих цепей e-иммунных множеств, частично упорядоченное по включению. Ясно, что $\mathbf{C} \neq \varnothing$. Каждая цепь элементов $\mathbf{C}$ имеет точную верхнюю грань в $\mathbf{C}$, а именно объединение всех возрастающих последовательностей e-иммунных множеств, образующих данную цепь. По лемме Цорна частично упорядоченное множество $\mathbf{C}$ должно иметь хотя бы один максимальный элемент $\mathbf{m}=\{M_s : s \in N\}$, где $M_0 <_e M_1 <_e \dots$ и M_s — e-иммунное множество для всех $s \in N$. Пусть $M = \{\langle s, x \rangle : x \in M_s\}$. Ясно, что $M_s \leq_e M$ для всех $s \in N$. Пусть $B \in \mathbf{J}(M)$ — ретрассируемое множество. Так как существует e-иммунное множество A такое, что $B <_e A$, то $M_s <_e A$ для всех $s \in N$, что противоречит максимальности $\mathbf{m}$. Следовательно, $\mathbf{m}$ — несчетное множество.

Следствие 2. *Для любого ретрассируемого множества B существует несчетная антицепь e-иммунных множеств, e-степени которых расположены в L_e выше $d_e(B)$.*

Доказательство. Трансформируем конструкцию теоремы 2 и с ее помощью докажем, что семейство EI_B всех e-иммунных множеств выше B содержит несчетную антицепь. Предположим, что антицепь в EI_B счетная, и пусть множества $A_0, A_1, \dots$ образуют эту антицепь. Построим e-иммунное множество C так, что $B <_e C$ и C и A_k несравнимы для всех $k \in N$. Пусть C_t — часть C, построенная на шаге t. Множество Z будет играть вспомогательную роль, через Z_t обозначим конечную часть Z, построенную на шаге t.

Шаг 0. Полагаем $C_0 = Z_0 = \varnothing$.

Шаг $t+1$. Пусть $t = \langle k, s\rangle$. Если $s = 4n$ и $|\rho g_n| < \infty$, то полагаем $C_{t+1} = C_t \cup \{x^*\}$ и $Z_{t+1} = Z_t$, где $x^* = \min(B - Z_t)$. Если ρg_n — бесконечное множество, то

$$\exists z[z \in \rho g_n - C_t]. \tag{1}$$

Пусть z^* — наименьшее z, удовлетворяющее (1). Полагаем $Z_{t+1} = Z_t \cup \{z^*\}$ и $C_{t+1} = C_t \cup \{x^*\}$, где $x^* = \min(B - Z_t)$.

Если $s = 4n+1$, то проверим, что

$$\exists D[D \subseteq B \wedge D \cap Z_t = \varnothing \wedge \forall \alpha[\Phi_n(C_t \cup D) \neq \tau\alpha]]. \tag{2}$$

Если (2) выполнено, то полагаем $C_{t+1} = C_t \cup D^*$, где D^* имеет наименьший канонический индекс среди D, удовлетворяющих (2), и $Z_{t+1} = Z_t$. В противном случае

$$\forall D[D \subseteq B \wedge D \cap Z_t = \varnothing \to \exists \alpha[\Phi_n(C_t \cup D) = \tau\alpha]], \tag{3}$$

т. е. $\Phi_n(C_t)$ — однозначное множество для всех $t \in N$. В этом случае $\Phi_n(C) = \tau g$ для некоторой функции g.

Проверим

$$\exists D \exists m[D \subseteq B \wedge D \cap Z_t = \varnothing \wedge ! \Phi_n(C_t \cup D)(m) \wedge \Phi_n(C_t \cup D)(m) \notin C_t \cup D]. \tag{4}$$

Если (4) выполнено, полагаем $C_{t+1} = C_t \cup D^*$ и $Z_{t+1} = Z_t \cup \{\Phi_n(C_t \cup D^*)(m^*)\}$, где D^* имеет наименьший канонический индекс среди D, удовлетворяющих (4), и m^* — наименьшее m, удовлетворяющее (4) для $D = D^*$. В противном случае полагаем $C_{t+1} = C_t \cup \{x^*\}$, где $x^* = \min(B - Z_t)$, и $Z_{t+1} = Z_t$.

Если $s = 4n+2$, то проверим, что

$$\exists x[x \in \overline{Z_t} \wedge x \in \Phi_n(A_k) \cap B]. \tag{5}$$

Если (5) выполнено, то полагаем $C_{t+1} = C_t$ и $Z_{t+1} = Z_t \cup \{x^*\}$, где x^* — наименьшее x, удовлетворяющее (5). В противном случае

$$\forall x[x \in \overline{Z_t} \to x \notin \Phi_n(A_k) \cap B].$$

Пусть $x^* = \min(B - Z_t)$. Положим $C_{t+1} = C_t \cup \{x^*\}$ и $Z_{t+1} = Z_t$.

Если $s = 4n+3$, то проверим, что

$$\exists D[D \subseteq B \wedge D \cap Z_t = \varnothing \wedge \Phi_n(C_t \cup D) \not\subseteq A_k]. \tag{6}$$

Если (6) выполнено, полагаем $C_{t+1} = C_t \cup D^*$ и $Z_{t+1} = Z_t$, где D^* имеет наименьший канонический индекс среди D, удовлетворяющих (6). В противном случае полагаем $C_{t+1} = C_t$ и $Z_{t+1} = Z_t$. В этом случае

$$\forall D[D \subseteq B \wedge D \cap Z_t = \varnothing \to \Phi_n(C_t \cup D) \subseteq A_k],$$

следовательно, $\Phi_n(\widetilde{B}) \subseteq A_k$, где $\widetilde{B} = B - Z_t$. Если $\Phi_n(C) = A_k$, то $\Phi_n(C) \subseteq \Phi_n(C_t \cup \widetilde{B}) \subseteq A_k$, поэтому $\Phi_n(C_t \cup \widetilde{B}) = A_k$, т. е. $A_k \leq_e C_t \cup \widetilde{B} \leq_e B$, что противоречит предположению, что $B <_e A_k$ для всех $k \in N$.

Из конструкции следует, что C — бесконечное подмножество ретрассируемого множества B, поэтому $B \leq_e C$. Шаги $t+1$, где $t = \langle k, s\rangle$, $s = 4n$ и $s = 4n+1$, обеспечивают e-иммунность множества C. Шаги $t+1$, где $t = \langle k, s\rangle$, $s = 4n+2$ и $s = 4n+3$, обеспечивают несравнимость C и A_k для всех $k \in N$. Заметим, что $C \not\leq_e B$, так как в противном случае $C \leq_e B \leq_e A_k$. Следствие доказано.

Пусть A_1 и A_2 — два произвольных e-иммунных множества. Рассмотрим $d_e(A_1 \oplus A_2)$ (напомним, что $A_1 \oplus A_2 = \{2x : x \in A_1\} \cup \{2x+1 : x \in A_2\}$). Верно ли, что $d_e(A_1 \oplus A_2)$ содержит обязательно e-иммунное множество? Заметим сначала, что если заменить «e-иммунное» на «иммунное» или «гипериммунное», то, как показал М. Г. Розинас [6], ответ на соответствующий вопрос положительный. Покажем, что для e-иммунных множеств в общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. Однако можно построить такие e-иммунные множества A_1 и A_2, что $A_1 \oplus A_2$ — e-иммунное множество. Дадим доказательства этих утверждений.

Теорема 3. *Существуют множества $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ такие, что A_n — e-иммунное для всех $n \in N$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$ и $\bigcup\limits_{n \in N} A_n = N$.*

Доказательство. Построим множества $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ так, что

(i) $\forall n \forall g[g \leq_e A_n \wedge \rho g \subseteq A_n \rightarrow |\rho g| < \infty]$;

(ii) $\forall k \forall l[k \neq l \rightarrow A_k \cap A_l = \varnothing]$;

(iii) $\bigcup\limits_{n \in N} A_n = N$.

Пусть A_{n_s} — часть A_n, построенная на шаге s. На каждом шаге s $A_{n_s} = \varnothing$ почти для всех $n \in N$ и $\bigcup\limits_{n \in N} A_{n_s}$ образует начальный сегмент N, т. е. $\bigcup\limits_{n \in N} A_{n_s} = \{0, \dots, z_s\}$ для некоторого z_s.

Шаг 0. Полагаем $A_{0_0} = \{0\}$ и $A_{n_0} = \varnothing$ для всех $n > 0$.

Шаг $s+1$. Проверим последовательно выполнимость приведенных ниже условий и после определения $A_{n_{s+1}}$ для всех $n \in N$ перейдем к следующему шагу.

Пусть $s = 2\langle k, l \rangle$. Если W_k конечно, то полагаем $A_{n_{s+1}} = A_{n_s}$ для всех $n \in N$. Если W_k бесконечно, то $\exists z[z \in W_k \wedge z > z_s]$. Пусть z^* — наименьшее такое z, и n^* — наименьшее n такое, что $A_{n_s} = \varnothing$. Полагаем $A_{n^*_{s+1}} = \{z_s + 1, \dots, z^*\}$, $A_{l_{s+1}} = \{z^* + 1\}$, $A_{n_{s+1}} = A_{n_s}$ для всех $n \in N - \{n^*, l\}$. В результате выполнения шагов s, где $s = 2\langle k, l \rangle$, получим, что $A_n \neq \varnothing$ и A_n — иммунное множество для всех $n \in N$.

Пусть $s = 2\langle k, l \rangle + 1$. Проверим

$$\exists D[\min D > z_s \wedge \forall \alpha[\Phi_k(A_{l_s} \cup D) \neq \tau\alpha]]. \tag{1}$$

Если (1) выполнено, то полагаем $A_{l_{s+1}} = A_{l_s} \cup D^*$, где D^* имеет наименьший канонический индекс среди конечных D, удовлетворяющих (1). Пусть $z^* = maxD$ и n^* — наименьшее n, для которого $A_{n_s} = \varnothing$. Полагаем $A_{n^*_{s+1}} = \{z_s + 1, \dots, z^*\} - D^*$ и $A_{n_{s+1}} = A_{n_s}$ для всех $n \in N - \{l, n^*\}$.

Если (1) не выполняется, то

$$\forall D[\min D > z_s \rightarrow \exists \alpha[\Phi_k(A_{l_s} \cup D) = \tau\alpha]].$$

В этом случае $\Phi_k(A)$ — однозначное множество для всех $A \subseteq A_{l_s} \cup N_{z_s}$, где $N_{z_s} = N - \{0, \dots, z_s\}$, т. е. $\Phi_k(A) = \tau g$ для некоторой функции g.

Проверим, выполнено ли условие

$$\exists D[\min D > z_s \wedge \rho\Phi_k(A_{l_s} \cup D) \not\subseteq A_{l_s} \cup D]. \tag{2}$$

Если (2) выполнено, то

$$\exists D \exists m[\min D > z_s \wedge ! \Phi_k(A_{l_s} \cup D)(m) \wedge \Phi_k(A_{l_s} \cup D)(m) \in \rho\Phi_k(A_{l_s} \cup D) - (A_{l_s} \cup D)]. \tag{3}$$

Полагаем $A_{l_{s+1}} = A_{l_s} \cup D^*$, где D^* имеет наименьший канонический индекс среди D, удовлетворяющих (3). Пусть m^* — наименьшее m, для которого выполнено (3) при $D = D^*$, $z^* = \max(A_{l_{s+1}} \cup \{\Phi_k(A_{l_s} \cup D^*)(m^*)\})$ и n^* — наименьшее n, для которого $A_{n_s} = \varnothing$. Полагаем $A_{n^*_{s+1}} = \{z_s + 1, \ldots, z^*\} - D^*$ и $A_{n_{s+1}} = A_{n_s}$ для всех $n \in N - \{l, n^*\}$. Заметим, что в этом случае если $\tau g = \Phi_k(A_l)$, то $g(m^*) \notin A_l$. Если (2) не выполнено, то полагаем $A_{n_{s+1}} = A_{n_s}$ для всех $n \in N$.

Описание конструкции завершено. Докажем, что построенные множества удовлетворяют условиям (i)–(iii). Легко заметить, что конструкция обеспечивает выполнимость (ii) и (iii). Кроме того, как отмечено выше, A_n — иммунное множество для всех $n \in N$.

Проверим, что A_n удовлетворяет условию (i) для всех $n \in N$. Пусть g — тотальная функция и $g \le_e A_l$. Тогда $\tau g = \Phi_k(A_l)$ для некоторого $k \in N$. Рассмотрим шаг $s + 1$, где $s = 2\langle k, l\rangle + 1$. Случай (1) не может быть выполнен, так как в противном случае $\Phi_k(A_l)$ — неоднозначное множество. Если имеет место случай (2), то $g(m^*) \notin A_l$ и, следовательно, $\rho g \not\subseteq A_l$.

Предположим, что условие (2) не выполнено. Тогда

$$\forall D[\min D > z_s \to \rho\Phi_k(A_{l_s} \cup D) \subseteq A_{l_s} \cup D]. \tag{4}$$

В этом случае $\rho g = \rho\Phi_k(A_l) \subseteq A_l$. В противном случае $\exists D[D \subseteq A_l \wedge \rho\Phi_k(D) \not\subseteq A_l]$, т. е.

$$\exists D \exists m[\min D > z_s \wedge !\Phi_k(A_{l_s} \cup D)(m) \wedge \Phi_k(A_{l_s} \cup D)(m) \in \rho\Phi_k(A_{l_s} \cup D) - A_l]$$

и поэтому $\Phi_k(A_{l_s} \cup D)(m) \in \rho\Phi_k(A_{l_s} \cup D) - (A_{l_s} \cup D)$. Это противоречит нашему предположению, что (3) не выполнено. Итак, $A_l \subseteq A_{l_s} \cup N_{z_s}$, поэтому $\tau g = \Phi_k(A_l) \subseteq \Phi_k(A_{l_s} \cup N_{z_s})$. Как отмечалось выше, $\Phi_k(A_{l_s} \cup N_{z_s})$ — однозначное множество, тем самым $\tau g = \Phi_k(A_{l_s} \cup N_{z_s})$ и $g \le_e A_{l_s} \cup N_{z_s}$. Так как A_{l_s} конечно и N_{z_s} коконечно, то g — общерекурсивная функция. Поскольку $\rho g \subseteq A_l$ и A_l — иммунное множество, то ρg — конечное множество. Теорема доказана.

Следствие 3. *Для любого $m > 0$, $m \in N$, существует конечная последовательность e-иммунных множеств $A_0, \ldots, A_m$ такая, что $A_i \cap A_j = \varnothing$ для всех $i \ne j$ и $A_0 \cup \cdots \cup A_m = N$.*

Доказательство. Пусть $m > 0$, построим множества $A_0, \ldots, A_m$ с помощью конструкции из доказательства теоремы 3 так, чтобы они удовлетворяли условиям (i)–(iii).

Шаг 0. Полагаем $A_{0_0} = \{0\}$ и $A_{n_0} = \varnothing$ для всех $0 < n \le m$.

Шаг $s + 1$. Пусть $s = 2\langle k, l\rangle$ или $s = 2\langle k, l\rangle + 1$. Если $l > m$, то полагаем $A_{n_{s+1}} = A_{n_s}$ для всех $n \le m$. Если $l \le m$, то повторим шаг $s + 1$ из доказательства теоремы 3, заменяя условие $n \in N$ на $n \le m$ и условие выбора n^* следующим условием: $n^* = \min\{n : n \le m \wedge n \ne l\}$. Следствие доказано.

Пусть A_0 и A_1 — e-иммунные множества, построенные с помощью следствия 3 для $m = 1$. Очевидно, что в этом случае $d_e(A_0 \oplus A_1)$ — тотальная e-степень, и, следовательно, по предложению 1(в) любое $C \in d_e(A_0 \oplus A_1)$ не является e-иммунным множеством. Заметим, что множества A_0 и A_1 несравнимы относительно $\le_e$. В самом деле, если, например, $A_0 \le_e A_1$, то $A_0 \oplus A_1 \equiv_e A_1$ и $d_e(A_0 \oplus A_1) = d_e(A_1)$. Но $d_e(A_1)$ является нетотальной e-степенью, в то же время $d_e(A_0 \oplus A_1)$ является тотальной e-степенью, что невозможно. Для множеств, построенных при доказательстве теоремы 3, можно утверждать, что A_i и $\bigcup\limits_{j \ne i} A_j$ несравнимы для всех $i \in N$.

Тривиально утверждение: если $A_0 \leq_e A_1$ и A_1 e-иммунное или $A_1 \leq_e A_0$ и A_0 e-иммунное, то $d_e(A_0 \oplus A_1)$ содержит e-иммунное множество. Дадим нетривиальный пример, т. е. построим такие e-иммунные множества A_0 и A_1, что они несравнимы относительно $\leq_e$ и $d_e(A_0 \oplus A_1)$ содержит e-иммунное множество. Для этого докажем сначала вспомогательное утверждение, которое имеет самостоятельное значение.

Теорема 4. *Для любого множества B существуют B-квазиминимальные множества A_0 и A_1 такие, что $A_0 \nleq_e A_1$ и $A_1 \nleq_e A_0$ и $d_e(A_0 \oplus A_1)$ содержит B-квазиминимальное множество.*

Доказательство. Построим множества A_0 и A_1 так, что

(i) A_0 и A_1 — B-квазиминимальные множества;

(ii) $A_0 \nleq_e A_1 \wedge A_1 \nleq_e A_0$;

(iii) $\exists Q[Q \equiv_e A_0 \oplus A_1 \wedge Q$ — B-квазиминимальное$]$.

Пусть $I = \{0, 1\}$. Для всех $i \in I$ введем обозначения: C_i^t — часть множества C_i, построенная к концу шага t, причем $C_i^t = \{i\} \times D$ для некоторого конечного множества D и $C_i^t \subseteq C_i^{t+1}$ для всех $t \in N$. Таким образом, C_0 и C_1 рекурсивно отделимы. Конструкция обеспечит бесконечность множества C_i для всех $i \in I$. В ходе конструкции возникнет множество Z, для которого $Z \cap \bigcup\limits_{i \in I} C_i = \varnothing$. Обозначим через Z^t часть Z, построенную к концу шага t, причем $Z^t \subseteq Z^{t+1}$ для всех $t \in N$. Ясно, что в этом случае $Z^t \cap C_i^l = \varnothing$ для всех $t, l \in N$ и $i \in I$. Пусть $A_i = B \oplus C_i$, $i \in I$.

Шаг 0. Полагаем $C_i^0 = Z^0 = \varnothing$ для всех $i \in I$.

Шаг $4n+1$. Пусть $t = 4n$. Проверим для всех $i \in I$

$$\Phi_n(B) \subseteq B \oplus \{0, \ldots, z_i^*\}, \tag{1}$$

где $z_i^* = \max C_i^t$. Если (1) выполнено для данного i, то полагаем $C_i^{t+1} = C_i^t$ и $Z^{t+1} = Z^t$. В противном случае

$$\exists z[z \in \Phi_n(B) - (B \oplus \{0, \ldots, z_i^*\})] \tag{2}$$

Если такое z имеет вид $2y$ или $2\langle i', y\rangle + 1$, где $i' \neq i$, то полагаем $C_i^{t+1} = C_i^t$ и $Z^{t+1} = Z^t$. Если $z = 2\langle i, y\rangle + 1$, то пусть $z^* = 2\langle i, y^*\rangle + 1$ — наименьшее такое z, удовлетворяющее (2). Тогда полагаем $C_i^{t+1} = C_i^t$ и $Z^{t+1} = Z^t \cup \{\langle i, y^*\rangle\}$.

Шаг $4n+2$. Пусть $t = 4n+1$. Проверим для всех $i \in I$

$$\exists D\big[\{i\} \times D \cap Z^t = \varnothing \wedge \forall \alpha\big[\Phi_n\big(B \oplus \big(C_i^t \cup \{i\} \times D\big)\big) \neq \tau\alpha\big]\big]. \tag{3}$$

Если для данного i условие (3) выполнено, то пусть D^* имеет наименьший канонический индекс среди D, удовлетворяющих (3). Полагаем $C_i^{t+1} = C_i^t \cup \{i\} \times D^*$ и $Z^{t+1} = Z^t$. Если (3) не выполнено, то $C_i^{t+1} = C_i^t$ и $Z^{t+1} = Z^t$.

Шаг $4n+3$. Пусть $t = 4n+2$ и $z_i^* = \min\{z : \langle i, z\rangle \notin C_i^t \cup Z^t\}$. Полагаем $C_i^{t+1} = C_i^t \cup \{\langle i, z_i^*\rangle\}$ и $Z^{t+1} = Z^t$ для всех $i \in I$.

Шаг $4n+4$. Пусть $t = 4n+3$, проверим для всех $i \in I$

$$\exists D\big[\{i\} \times D \cap Z^t = \varnothing \wedge \Phi_n\big(B \oplus \big(C_i^t \cup \{i\} \times D\big)\big) \nsubseteq B \oplus \big(C_{1-i}^t \cup Z^t\big)\big]. \tag{4}$$

Если для данного i условие (4) выполнено, то пусть D^* имеет наименьший канонический индекс среди D, удовлетворяющих (4), и z^* — наименьшее z такое, что при $D = D^*$

$$z \in \Phi_n\big(B \oplus \big(C_i^t \cup \{i\} \times D^*\big)\big) - B \oplus \big(C_{1-i}^t \cup Z^t\big).$$

Если z^* имеет вид $2y$ или $2\langle i', y\rangle + 1$ для некоторого y и $i' \neq 1-i$, то полагаем $C_i^{t+1} = C_i^t \cup D^*$ и $Z^{t+1} = Z^t$. Если $z^* = 2\langle 1-i, y^*\rangle + 1$, то полагаем $C_i^{t+1} = C_i^t \cup D^*$ и $Z^{t+1} = Z^t \cup \{\langle 1-i, y^*\rangle\}$. Если (4) не выполнено, т. е.

$$\forall D[\{i\} \times D \cap Z^t = \varnothing \to \Phi_n(B \oplus (C_i^t \cup \{i\} \times D)) \subseteq B \oplus (C_{1-i}^t \cup Z^t)], \qquad (5)$$

то полагаем $C_i^{t+1} = C_i^t$ и $Z^{t+1} = Z^t$. Описание конструкции закончено.

Докажем, что A_0 и A_1 удовлетворяют условиям (i)–(iii). Так как $A_i = B \oplus C_i$, то $B \leq_e A_i$. Шаги $4n+1$, $n \in N$, обеспечивают $A_i \not\leq_e B$ для всех $i \in I$. Шаги $4n+2$ и $4n+3$, $n \in N$ обеспечивают B-квазиминимальность A_i для всех $i \in I$. Таким образом, условие (i) выполнено.

Докажем, что выполнено (ii). Предположим, что $A_0 \leq_e A_1$, т. е. $A_0 = \Phi_n(A_1)$ для некоторого $n \in N$. Рассмотрим шаг $4n+4$. Если на этом шаге выполнено (4) для $i = 1$, то

$$z^* \in \Phi_n\big(B \oplus \big(C_1^t \cup \{1\} \times D^*\big)\big) - B \oplus \big(C_0^t \cup Z^t\big),$$

поэтому $z^* \in \Phi_n(B \oplus C_1) = \Phi_n(A_1)$ и z^* никогда не попадет в A_0, следовательно, в этом случае $A_0 \neq \Phi_n(A_1)$. Тогда должно быть выполнено условие (5) для $i = 1$. Легко проверить, что в этом случае $\Phi_n(B \oplus C_1) \subseteq B \oplus (C_0^t \cup Z^t)$. Тогда $\{x : 2x+1 \in \Phi_n(B \oplus C_1)\}$ — конечное множество, но $\{x : 2x+1 \in B \oplus C_0\}$ — бесконечное, следовательно, $A_0 = B \oplus C_0 \neq \Phi_n(B \oplus C_1) = \Phi_n(A_1)$, что противоречит первоначальному предположению. Итак, $A_0 \not\leq_e A_1$. Аналогично проверяется, что $A_1 \not\leq_e A_0$ и (ii) выполнено.

Докажем, наконец, что выполнено условие (iii). Так как C_0 и C_1 рекурсивно отделимы, то $A_0 \oplus A_1 = (B \oplus C_0) \oplus (B \oplus C_1) \equiv_e B \oplus (C_0 \cup C_1)$. Докажем, что $Q = B \oplus (C_0 \cup C_1)$ является B-квазиминимальным множеством. Пусть $f \leq_e Q$, т. е. $\tau f = \Phi_n(Q)$ для некоторого $n \in N$. Рассмотрим шаг $4n+2$. Условие (3) не может быть выполнено ни для какого $i \in I$, ибо в противном случае $\Phi_n(B \oplus (C_0 \cup C_1))$ неоднозначно. Ясно, что в этом случае, например, $\Phi_n(B \oplus (C_0 \cup \{1\} \times \widetilde{N}))$ — однозначное множество, где $\widetilde{N} = N - \{x : \langle 1, x\rangle \in Z^t\}$. Итак, имеем $\tau f = \Phi_n(B \oplus (C_0 \cup C_1)) \subseteq \Phi_n(B \oplus (C_0 \cup \{1\} \times \widetilde{N}))$, тогда $\tau f = \Phi_n(B \oplus (C_0 \cup \{1\} \times \widetilde{N}))$, т. е. $f \leq_e B \oplus (C_0 \cup \{1\} \times \widetilde{N}) \leq_e B \oplus C_0 = A_0$. Так как A_0 B-квазиминимально, то $f \leq_e B$ и (iii) доказано.

Следствие 4. *Существуют несравнимые относительно $\leq_e$ e-иммунные множества A_0 и A_1 такие, что $d_e(A_0 \oplus A_1)$ содержит e-иммунное множество.*

Доказательство. Пусть B — e-иммунное множество, A_0 и A_1 — B-квазиминимальные множества, построенные при доказательстве теоремы 4. Тогда $d_e(A_0 \oplus A_1)$ — B-квазиминимальная e-степень, в частности, $A_0 \oplus A_1$ — B-квазиминимальное множество. По предложению 2 существуют e-иммунные множества C_0, C_1 и C такие, что $A_0 \equiv_e C_0$, $A_1 \equiv_e C_1$ и $A_0 \oplus A_1 \equiv_e C$. При этом $C_0 \not\leq_e C_1$ и $C_1 \not\leq_e C_0$ и $d_e(C_0 \oplus C_1) = d_e(A_0 \oplus A_1)$ содержит e-иммунное множество C, что и требовалось доказать.

Обозначим через **I** класс иммунных множеств, **EI** — класс e-иммунных множеств, **EHI** — класс e-гипериммунных множеств, **Q** — класс квазиминимальных множеств. Ясно, что **EHI**$\subseteq$**EI** $\subseteq$**I** и **I**$\cap$**Q**$\subseteq$**EI**. Докажем, что все включения строгие.

Теорема 5. *Существует иммунное квазиминимальное и не гипериммунное множество.*

Доказательство. Построим по шагам множество A так, чтобы

(i) $\forall n[|W_n| = \infty \to W_n \cap \bar{A} \neq \varnothing]$;

(ii) $\forall f[f \leq_e A \to f$ общерекурсивная функция];

(iii) $\forall k[|A \cap \{0, \dots, 2k\}| \geq k]$.

Заметим, что если выполнено условие (i), то A иммунное, если выполнено (ii), то A квазиминимальное, и если выполнено (iii), то A — бесконечное, не гипериммунное множество.

Шаг 0. Полагаем $a_0 = 0$ и $A_0 = \{a_0\}$.

Шаг $2n+1$. Пусть $2n = s$, A_s — часть A, построенная к концу шага s, и $a_0 < a_1 < \dots < a_{k_s}$ — прямой пересчет A_s. Если W_n — конечное множество, то переходим к следующему шагу. Пусть W_n — бесконечное рекурсивно перечислимое множество. Тогда существует $x^* = \min\{x : x \in W_n \wedge x > a_{k_s}\}$. Полагаем $A_{s+1} = A_s \cup \{a_{k_s} + 1, \dots, x^* - 1, x^* + 1\}$.

Ясно, что если $|A_s \cap \{0, \dots, 2k\}| \geq k$, то $|A_{s+1} \cap \{0, \dots, 2k\}| \geq k$ для всех $k \leq k_s$. Проверим, что в этом случае $|A_{s+1} \cap \{0, \dots, 2(k+1)\}| \geq k+1$ для всех k таких, что $k_s < k \leq k_{s+1}$. В самом деле, даже если $a_{k_s} = 2k$, то $a_{k_{s+1}} = a_{k_s} + 1$, если $x^* \neq a_{k_s} + 1$, или $a_{k_{s+1}} = a_{k_s} + 2$, если $x^* = a_{k_s} + 1$. В любом случае $a_{k_{s+1}} \leq 2k + 2$ и $|A_{s+1} \cap \{0, \dots, 2(k+1)\}| \geq k + 1$. Кроме того, шаги $2n+1$, $n \in N$, гарантируют выполнение условия (i).

Шаг $2n+2$. Пусть $s = 2n+1$. Обозначим $Z_s = \{0, \dots, a_{k_s}\} - A_s$. Пусть F такое конечное множество, что

$$F \subseteq A_s \vee [F \cap Z_s = \varnothing \wedge \forall k[k \leq k_s + d \to |(A_s \cup F) \cap \{0, \dots, 2k\}| \geq k]],$$

где $d = |F - A_s|$. Проверим

$$\exists F \forall \alpha [\Phi_n(A_s \cup F) \neq \tau\alpha]. \tag{1}$$

Если (1) выполнено, то пусть F^* имеет наименьший канонический индекс среди F, удовлетворяющих (1). Полагаем $A_{s+1} = A_s \cup F^*$. В противном случае полагаем $A_{s+1} = A_s$.

Докажем, что в результате будет построено квазиминимальное множество A. Пусть $f \leq_e A$, т. е. $\tau f = \Phi_n(A)$ для некоторого $n \in N$. В этом случае условие (1) на шаге $2n+2$ не выполняется. Докажем, что тогда $\Phi_n(\overline{Z_s})$ — однозначное множество. Если это не так, то существует конечное множество $D \subseteq \overline{Z_s}$ такое, что $\Phi_n(D)$ — неоднозначное множество. Ясно, что $D \not\subseteq A_s$, в частности, $D \neq \varnothing$ и $D \cap Z_s = \varnothing$. Пусть $m = \max D$. Тогда $m > a_{k_s}$. Обозначим $d = |D - A_s|$ и рассмотрим $F = D \cup \{a_{k_s}+1, \dots, m\}$. Так как $|A_s \cap \{0, \dots, 2k\}| \geq k$ для всех $k \leq k_s$, то $|(A_s \cup F) \cap \{0, \dots, 2k\}| \geq k$ для всех $k \leq k_s + d$. Следовательно, условие (1) должно в этом случае выполняться, что противоречит предположению. Итак, $\Phi_n(\overline{Z_s})$ — однозначное множество и $A \subseteq \overline{Z_s}$, поэтому $\tau f = \Phi_n(A) \subseteq \Phi_n(\overline{Z_s})$. Отсюда $\tau f = \Phi_n(\overline{Z_s})$, и так как $\overline{Z_s}$ — рекурсивное множество, то f — общерекурсивная функция и условие (ii) выполнено.

Наконец, на каждом шаге конструкции множество A строится таким образом, чтобы было выполнено (iii), и теорема доказана.

Следствие 5. *Существует e-иммунное не e-гипериммунное множество.*

Итак, **EHI**$\subset$**EI**. То, что **EI**$\subset$**I**, тривиально, так как любая ненулевая тотальная e-степень содержит иммунное множество, но e-иммунные множества в силу предложения 1(в) не могут принадлежать тотальным e-степеням. В следующей теореме дадим нетривиальный пример.

Теорема 6. *Существует не e-иммунное иммунное множество, принадлежащее нетотальной e-степени.*

Сначала докажем лемму.

Лемма. *Существует тотальная, нерекурсивная функция f, такая, что τf иммунное и ρf — бесконечное множества.*

Доказательство. Пусть значения $f(0), \ldots, f(x_n)$ уже определены. Если W_{n+1} конечно, то полагаем $f(x_n+1) = 0$. Если W_{n+1} — бесконечное рекурсивно перечислимое множество, то пусть x^* — наименьшее x такое, что $x > x_n \wedge \exists y[\langle x, y\rangle \in W_{n+1} \wedge y > \max\{f(0), \ldots, f(x_n)\}$. Обозначим через y^* наименьшее такое y. Полагаем $f(x^*) = y^*+1$ и $f(x) = 0$ для всех x, лежащих между x_n и x^*. Таким образом, если W_{n+1} — бесконечное рекурсивно перечислимое множество, то $W_{n+1} \not\subseteq \tau f$, так как $\langle x^*, y^*\rangle \in W_{n+1} - \tau f$. Кроме того, из построения видно, что ρf — бесконечное множество. Ясно, что f — нерекурсивная функция, и лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть f — тотальная функция, построенная при доказательстве леммы, и $C = \tau f$. Тогда существует C-квазиминимальное множество B, т. е. $C <_e B$ и $\forall g[g \leq_e B \to g \leq_e C]$. Так как $d_e(C)$ — тотальная e-степень и $d_e(C) < d_e(B)$, существует иммунное множество $B_1 \in d_e(B)$. В самом деле, поскольку $d_e(C)$ — тотальная ненулевая e-степень, $d_e(C)$ содержит ретрассируемое множество [3], которое в нашем случае является иммунным. Свойство e-степени содержать иммунное множество, как показано в [6], наследуется вверх в L_e.

Обозначим $A = \tau f \oplus B_1$. Докажем, что A удовлетворяет условию теоремы. Сначала проверим, что A — иммунное множество. Пусть $W \subseteq A = \tau f \oplus B_1$ — произвольное рекурсивно перечислимое множество. Обозначим $V_1 = \{x : 2x \in W\}$ и $V_2 = \{x : 2x+1 \in W\}$. Ясно, что V_1 и V_2 рекурсивно перечислимые, $W = V_1 \oplus V_2$, $V_1 \subseteq \tau f$ и $V_2 \subseteq B_1$. По построению τf и B_1 — оба иммунные множества, поэтому V_1 и V_2 — оба конечные множества и тогда W также конечное множество. Итак, A иммунно.

Докажем, что A не является e-иммунным множеством. Пусть $f_1(x) = 2\langle x, f(x)\rangle$. Ясно, что $f_1 \equiv_e f \leq_e A$ и $\rho f_1 \subseteq A$. Кроме того, ρf_1 бесконечно, так как τf бесконечно.

Наконец, докажем, что $d_e(A)$ нетотальна. Предположим, что существует тотальная функция g такая, что $g \equiv_e A$. Так как $f <_e B_1$ и $g \leq_e A = \tau f \oplus B_1$, то $g \leq_e B_1$, поэтому $g \leq_e B$ и $g \leq_e f$ и, следовательно, $B_1 \not\leq_e g$. Пусть $A \leq_e g$. Тогда $\tau f \oplus B_1 \leq_e g$ и $B_1 \leq_e g$, что невозможно. Теорема доказана.

Одним из традиционных вопросов в теории сводимостей является вопрос о внутреннем строении степеней. Рассмотрим одно усиление e-сводимости, введенное Д. Г. Скордевым [7]: множество A *pc-сводимо к B посредством частично рекурсивной функции* ϕ, если $\forall x[x \in A \iff x \in \delta\phi \wedge D_{\phi(x))} \subseteq B]$. Будем писать $A \leq_{pc} B$, если существует частично рекурсивная функция ϕ, для которой A pc-сводится к B посредством ϕ. Как обычно, $d_{pc}(A) = \{B : B \leq_{pc} A \wedge A \leq_{pc} B\}$ — *pc-степень* множества A. Очевидно, что $A \leq_{pc} B \to A \leq_e B$, поэтому произвольная e-степень состоит из некоторой совокупности pc-степеней. Если e-степень $d_e(A)$ содержит более, чем одну pc-степень, то говорят, что $d_e(A)$ *распадается на pc-степени.* Ясно, что $\mathbf{0}$ не распадается на pc-степени, т. е. состоит из единственной pc-степени. С. Д. Захаров [8] показал, что существуют ненулевые e-степени, состоящие из единственной pc-степени.

Теорема 7. *Неквазиминимальная e-степень, содержащая e-иммунное множество, распадается на pc-степени.*

Доказательство. Пусть A — e-иммунное множество, принадлежащее неквазиминимальной e-степени. Тогда существует нерекурсивная тотальная функция $f \leq_e A$. (На самом деле $f <_e A$.) Докажем, что в этом случае $\tau f \not\leq_{pc} A$. Допустим, что это неверно и $\tau f \leq_{pc} A$, тогда для некоторой частично рекурсивной функции ϕ

$$\forall z[z \in \tau f \iff !\phi(z) \wedge D_{\phi(z)} \subseteq A].$$

Пусть $D \subseteq A$ — конечное множество. Укажем эффективную процедуру относительно произвольного перечисления A, с помощью которой можно построить конечное множество $\varnothing \neq D^* \subseteq A$ такое, что $D^* \cap D = \varnothing$. В этом случае A не может быть e-иммунным множеством. В самом деле, так как $f \leq_e A$, то, используя произвольный пересчет A, эффективно перечислим последовательно элементы τf: $\langle 0, f(0)\rangle, \langle 1, f(1)\rangle, \dots, \langle n, f(n)\rangle, \dots$. Вычислим $\phi(\langle 0, f(0)\rangle), \phi(\langle 1, f(1)\rangle), \dots$, причем эти значения определены, так как $\tau f \subseteq \delta\phi$. Докажем, что $\exists n[D_{\phi(\langle n, f(n)\rangle)} \not\subseteq D]$. В противном случае $\forall n[D_{\phi(\langle n, f(n)\rangle)} \subseteq D \subseteq A]$. Тогда $\forall z[z \in \tau f \iff !\phi(z) \wedge D_{\phi(z)} \subseteq D \subseteq A]$, откуда следует, что τf — рекурсивно перечислимое множество; противоречие с нерекурсивностью f. Полагаем $D^* = D_{\phi(\langle n^*, f(n^*)\rangle)} - D$, где n^* — наименьшее n, для которого $D_{\phi(\langle n, f(n)\rangle)} \not\subseteq D$. Ясно, что $D^* \neq \varnothing$ и $D^* \subseteq D_{\phi(\langle n^*, f(n^*)\rangle)} \subseteq A$.

Определим тотальную функцию g. Возьмем сначала $D = \varnothing$, тогда найдем D^* с помощью процедуры, описанной выше. Пусть $D^* = \{y_0, \dots, y_k\}$. Полагаем $g(0) = y_0, \dots, g(k) = y_k$. Предположим, что значения $g(0), \dots, g(m)$ уже определены. Возьмем $D = \{g(0), \dots, g(m)\}$ и найдем D^*. Пусть $D^* = \{y_{m+1}, \dots, y_{m+l}\}$, где $l \geq 1$, полагаем $g(m+1) = y_{m+1}, \dots, g(m+l) = y_{m+l}$. Ясно, что $g \leq_e A$, $\rho g \subseteq A$ и $|\rho g| = \infty$. Следовательно, A не является e-иммунным множеством, что противоречит предположению.

Итак, $\tau f \not\leq_{pc} A$. Пусть $B = \tau f \times A$. Так как $\tau f \leq_e A$, то $B \equiv_e A$. Докажем, что $B \not\leq_{pc} A$. Предположим, что $B \leq_{pc} A$ посредством частично рекурсивной функции ϕ, т. е.

$$\forall z \forall y[\langle z, y\rangle \in B \iff z \in \tau f \wedge y \in A \iff !\phi(\langle z, y\rangle) \wedge D_{\phi(\langle z, y\rangle)} \subseteq A].$$

Рассмотрим частично рекурсивную функцию $\psi(z) = \phi(\langle z, a\rangle)$, где $a \in A$ — фиксированный элемент. Имеем

$$\forall z[\langle z, a\rangle \in B \iff z \in \tau f \wedge a \in A \iff z \in \tau f \iff !\phi(\langle z, a\rangle) \wedge D_{\phi(\langle z, a\rangle)} \subseteq A \iff !\psi(z) \wedge D_{\psi(z)} \subseteq A],$$

т. е. $\tau f \leq_{pc} A$, что противоречит выбору f. Итак, $B \not\leq_{pc} A$. В то же время, $A \leq_1 B$ и, следовательно, $A <_{pc} B$. Таким образом, $d_e(A)$ содержит по крайней мере две pc-степени $d_{pc}(A)$ и $d_{pc}(B)$, причем $d_{pc}(A) < d_{pc}(B)$. Теорема доказана.

В заключение сформулируем оставшийся открытым вопрос: существует ли e-иммунное множество A такое, что $d_e(\overline{A})$ является тотальной e-степенью?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1967.
2. *Медведев Ю. Т.* Степени трудности массовых проблем // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. С. 501–504.

3. *Case J.* Enumeration reducibility and partial degrees // Ann. Math. Logic. 1971. V. 4. P. 419–439.
4. *Sasso L. P.* A servey of partial degrees // J. Symbolic Logic. 1975. V. 40. P. 130–140.
5. *Солон Б. Я.* E-гипериммунные множества // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 2. С. 211–214.
6. *Розинас М. Г.* Частичные степени иммунных и гипериммунных множеств // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 5. С. 866–870.
7. *Скордев С. Д.* О частичной конъюнктивной сводимости // Тез. II Всесоюз. конф. по мат. логике. М., 1972. С. 43–44.
8. *Захаров С. Д.* О внутреннем строении e-степеней // Тез. IX Всесоюз. конф. по мат. логике. Л., 1988. С. 61.

Статья поступила 1 марта 1998 г.

г. Иваново
Ивановский гос. химико-технологический университет, кафедра высшей математики
solon@icti.ivanovo.su