Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 517.957

О НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ В ТЭТА–ФУНКЦИЯХ НЕ ГЛАВНО ПОЛЯРИЗОВАННЫХ АБЕЛЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

А. Е. Миронов

Аннотация: Получена формула разложения ограничения тэта-функции абелева многообразия на абелево подмногообразие по тэта-функциям этого подмногообразия. С помощью этой формулы решения дифференциальных уравнений в тэта-функциях Якоби, ограниченных на не главно поляризованные абелевы подмногообразия и их сдвиги, переписываются в тэта-функциях самих подмногообразий. Это показано на примерах уравнений иерархии CKP, системы Богоявленского и g_2^1-цепочки Тода. Библиогр. 14.

1. Введение

В работе мы покажем, как находить решения нелинейных уравнений в терминах тэта-функций не главно поляризованных абелевых многообразий.

Решения многих известных интегрируемых уравнений выражаются через тэта-функции связанных с ними римановых поверхностей (геодезические на эллипсоиде, волчок Ковалевской, уравнения Кортевега — де Фриза, Кадомцева — Петвиашвили и др., см. обзор [1]). В ряде задач, в которых риманова поверхность допускает голоморфную инволюцию, аргументы тэта-функции принадлежат многообразию Прима, подмногообразию якобиана римановой поверхности, и поэтому решения выражаются через тэта-функции этого многообразия Прима. Примовские тэта-формулы удобны тем, что тэта-функции зависят от меньшего числа переменных и качественный анализ их проще. К таким уравнениям относятся уравнения Веселова — Новикова и Ландау — Лифшица. При выводе примовских тэта-функциональных формул для их решений существенно используется то, что в этих случаях многообразие Прима главно поляризовано и поэтому, грубо говоря, имеет единственную тэта-функцию.

В то же время известны уравнения, для которых вся динамика сводится к не главно поляризованным подмногообразиям Прима, которые имеют тип поляризации $(1,\dots,1,2,\dots,2)$. Это, например, уравнения СКР (иерархии Кадомцева — Петвиашвили типа С) [2], уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной точки в ньютоновском поле с произвольным (однородным) квадратичным потенциалом, проинтегрированные О. И. Богоявленским [3], некоторые обобщенные цепочки Тода [4] и геодезические потоки на квадриках и $SO(4)$ [5, 6]. Известны и примеры интегрируемых систем, линеаризующихся на

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 00–01–00915 и 00–15–99252).

© 2001 Миронов А. Е.

абелевых многообразиях с поляризациями типов $(1,3)$ и $(1,6)$ ($g_2^{(1)}$-цепочка Тода и геодезический поток на $SO(4)$ со специальной метрикой, см. обзор [7]).

В теореме 1 мы покажем, что в пространстве тэта-функций на не главно поляризованном абелевом многообразии можно выбрать базис, состоящий из поднятий тэта-функций с характеристиками с изогенного главно поляризованного абелева многообразия. С помощью теоремы 2 формулы в тэта-функциях Якоби, ограниченных на абелевы подмногообразия и их сдвиги, переписываются в тэта-функциях самих подмногообразий. Мы демонстрируем это на примерах уравнений СКР, системы Богоявленского и $g_2^{(1)}$-цепочки Тода.

Автор благодарит И. А. Тайманова за постановку задачи, полезные обсуждения и замечания.

2. Тэта-функции не главно поляризованных абелевых многообразий

Обозначим через $M=\mathbb{C}^g/\Lambda$ абелево многообразие с формой Ходжа $\widetilde{\omega}$, где Λ — решетка в $\mathbb{C}^g$. Существуют вещественные координаты $x_1,\dots,x_{2g}$ в $\mathbb{C}^g$ и форма ω, когомологичная $\widetilde{\omega}$, которая имеет вид

$$\sum_{j=1}^{g}\delta_j\,dx_j\wedge dx_{g+j},$$

где δ_j — натуральные числа и δ_j делит δ_{j+1}. Решетка Λ в комплексном базисе, отвечающем координатам $\delta_1x_1,\dots,\delta_gx_g$, имеет вид $\Delta\mathbb{Z}^g+\Omega\mathbb{Z}^g$, где Δ — диагональная целочисленная матрица с диагональю $(\delta_1,\dots,\delta_g)$, Ω — симметричная $(g\times g)$-матрица с $\operatorname{Im}\Omega>0$. Набор чисел $(\delta_1,\dots,\delta_g)$ называется *типом поляризации* M и является инвариантом класса когомологий формы ω. Обозначим через $\mathscr{L}_M=\{\theta(z|\Lambda)\}$ пространство тэта-функций M, которые обладают свойствами периодичности:

$$\theta(z+\lambda|\Lambda)=\theta(z|\Lambda),\quad \lambda\in\Delta\mathbb{Z}^g, \tag{1}$$

$$\theta(z+\Omega e_j|\Lambda)=\exp(-\pi i\Omega_{jj}-2\pi iz_j)\theta(z|\Lambda), \tag{2}$$

где $e_j^\top=(0,\dots,1,\dots,0)$ (единица на j-м месте). Размерность пространства $\mathscr{L}_M$ равна $\delta_1\cdot\ldots\cdot\delta_g$ (см. например [8, 9]).

Абелево многообразие называется *главно поляризованным*, если Δ — единичная матрица. Тэта-функция главно поляризованного абелева многообразия $\widetilde{M}=\mathbb{C}^g/\{\mathbb{Z}^g+\Omega\mathbb{Z}^g\}$ с характеристикой $[a,b]$ определяется абсолютно сходящимся рядом

$$\theta[a,b](z|\Omega)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^g}\exp(\pi i\langle(n+a),\Omega(n+a)\rangle+2\pi i\langle(n+a),(z+b)\rangle),$$

где $a,b\in\mathbb{C}^g$. Функция $\theta[a,b](z|\Omega)$ обладает свойствами периодичности:

$$\theta[a,b](z+m|\Omega)=\exp(2\pi i\langle a,m\rangle)\theta[a,b](z|\Omega),$$

$$\theta[a,b](z+\Omega m|\Omega)=\exp(-2\pi i\langle b,m\rangle-\pi i\langle m,\Omega m\rangle-2\pi i\langle m,z\rangle)\theta[a,b](z|\Omega),$$

где $m\in\mathbb{Z}^g$. Если характеристика $[a,b]$ рациональна, то тэта-функция с этой характеристикой определяет сечение линейного расслоения над $\widetilde{M}$.

Теорема 1. *Тэта-функции* $\theta[\Delta^{-1}\varepsilon, 0](z|\Omega)$, *где* $\varepsilon \in \mathbb{Z}^g/\Delta\mathbb{Z}^g$, *задают базис пространства* $\mathscr{L}_M$.

Доказательство. Из (1) следует, что тэта-функция $\theta(z|\Lambda) \in \mathscr{L}_M$ раскладывается в ряд Фурье

$$\theta(z|\Lambda) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} a_m \exp(2\pi i\langle m, \Delta^{-1}z\rangle).$$

Свойство (2) влечет рекуррентные соотношения на коэффициенты ряда

$$a_{m+\Delta e_j} = \exp(\pi i\Omega_{jj} + 2\pi i\langle m, \Delta^{-1}\Omega e_j\rangle)a_m. \tag{3}$$

Из (3) получаем, что тэта-функция определяется коэффициентами $\{a_m\}$, где $0 \le m_s < \delta_s$, $1 \le s \le g$. Обозначим через $\theta_\varepsilon(z|\Lambda)$ функцию, заданную абсолютно сходящимся рядом

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^g} a_{\varepsilon+\Delta m} \exp(2\pi i\langle \varepsilon + \Delta m, \Delta^{-1}z\rangle), \tag{4}$$

где $a_\varepsilon = \exp(\pi i\langle\Delta^{-1}\varepsilon, \Omega\Delta^{-1}\varepsilon\rangle)$ и $a_{\varepsilon+\Delta m}$ находятся по рекуррентным формулам (3). Функции θ_ε задают базис пространства $\mathscr{L}_M$. Рекуррентная система (3) разрешима в явном виде

$$a_{\varepsilon+\Delta m} = \exp(\pi i\langle m, \Omega m\rangle + 2\pi i\langle\Delta^{-1}\varepsilon, \Omega m\rangle + \pi i\langle\Delta^{-1}\varepsilon, \Omega\Delta^{-1}\varepsilon\rangle).$$

Тогда

$$\theta_\varepsilon(z|\Lambda) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \exp(\pi i\langle(m + \Delta^{-1}\varepsilon), \Omega(m + \Delta^{-1}\varepsilon)\rangle + 2\pi i\langle(m + \Delta^{-1}\varepsilon), z\rangle) \\ = \theta[\Delta^{-1}\varepsilon, 0](z|\Omega).$$

Теорема доказана.

Тэта-функции $\theta_\varepsilon = \theta[\Delta^{-1}\varepsilon, 0](z|\Omega)$ являются поднятиями тэта-функций с характеристиками с главно поляризованного абелева многообразия $\widetilde{M}$ при изогении $\xi : M \to \widetilde{M}$, $\xi(z) = z$, степени $\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_g$. Отметим, что наша конструкция зависит от выбора главно поляризованного абелева многообразия $\widetilde{M}$, изогенного M. При выборе другой изогении поднятия соответствующих тэта-функций с характеристиками также задают базис пространства $\mathscr{L}_M$.

Найдем разложение ограничения тэта-функции абелева многообразия на абелево подмногообразие по тэта-функциям этого подмногообразия. Форма кривизны расслоения, ассоциированного с положительным дивизором, является формой Ходжа, следовательно, любой положительный дивизор на абелевом многообразии задает поляризацию на нем.

Обозначим через $\widetilde{M} = \mathbb{C}^g/\{\widetilde{\Delta}\mathbb{Z}^g + \widetilde{\Omega}\mathbb{Z}^g\}$ абелево многообразие, через $M \subset \widetilde{M}$ абелево подмногообразие. Пусть пересечение тэта-дивизора $\widetilde{M}$ (нулей тэта-функции $\theta(\cdot|\widetilde{\Omega})$) с M задает тип поляризации $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ на M. Тогда ограничение $\theta(\cdot|\widetilde{\Omega})$ на M является тэта-функцией M, следовательно, существует изоморфизм $\varphi : \mathbb{C}^n/\{\Delta\mathbb{Z}^n + \Omega\mathbb{Z}^n\} \to M$, где Δ — диагональная матрица с диагональю $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$, Ω — некоторая симметричная матрица с $\operatorname{Im}\Omega > 0$, такой, что $\theta(\varphi(z)|\widetilde{\Omega})$ является тэта-функцией $\mathbb{C}^n/\{\Delta\mathbb{Z}^n + \Omega\mathbb{Z}^n\}$. Пусть $\varphi(z) = \Phi z$, где

Φ — некоторая $(n\times g)$-матрица, $z^\top=(z_1,\dots,z_n)$. Из того, что $\theta(\varphi(z)|\widetilde{\Omega})$ является тэта-функцией $\mathbb{C}^n/\{\Delta\mathbb{Z}^n+\Omega\mathbb{Z}^n\}$, вытекает включение $\Phi\Delta\subset\widetilde{\Delta}\mathbb{Z}^g$ и равенство $\Phi\Omega=\widetilde{\Omega}P$, где P — некоторая целочисленная $(n\times g)$-матрица. Так как

$$\begin{aligned}\theta(\varphi(z+\Omega e_j)|\widetilde{\Omega})&=\theta(\varphi(z)+\widetilde{\Omega}Pe_j|\Omega)\\&=\exp(-\pi i\langle e_j,P^\top\widetilde{\Omega}Pe_j\rangle-2\pi i\langle e_j,P^\top\Phi z\rangle)\theta(\varphi(z)|\widetilde{\Omega}),\end{aligned}$$

то $P^\top\Phi$ — единичная $(n\times n)$-матрица, следовательно, $\Omega=P^\top\widetilde{\Omega}P$.

Теорема 2. *Справедлива формула*

$$\theta(\varphi(z)-\gamma|\widetilde{\Omega})=\sum_{\varepsilon\in\mathbb{Z}^n/\Delta\mathbb{Z}^n}c_\varepsilon\theta[\Delta^{-1}\varepsilon,0](z-P^\top\gamma|\Omega),$$

где $\gamma^\top=(\gamma_1,\dots,\gamma_g)$,

$$\begin{aligned}c_\varepsilon=\sum_{m\in\mathbb{Z}^g\,|\,\Phi^\top m=\Delta^{-1}\varepsilon}&\exp(\pi i\langle m,\widetilde{\Omega}m\rangle-2\pi i\langle m,\gamma\rangle\\&+2\pi i\langle\varepsilon,\Delta^{-1}P^\top\gamma\rangle-\pi i\langle\Delta^{-1}\varepsilon,\Omega\Delta^{-1}\varepsilon\rangle).\end{aligned}$$

Доказательство. Так как

$$\theta(\varphi(z+\lambda)-\gamma|\widetilde{\Omega})=\theta(\varphi(z)-\gamma|\widetilde{\Omega}),\quad\lambda\in\Delta\mathbb{Z}^n,$$

$$\begin{aligned}\theta(\varphi(z+\Omega e_j)-\gamma|\widetilde{\Omega})&=\theta(\varphi(z)+\widetilde{\Omega}Pe_j-\gamma|\widetilde{\Omega})\\&=\exp(-\pi i\langle Pe_j,\widetilde{\Omega}Pe_j\rangle-2\pi i\langle Pe_j,\Phi z-\gamma\rangle)\theta(\varphi(z)-\gamma|\widetilde{\Omega})\\&=\exp(-\pi i\langle e_j,\Omega e_j\rangle-2\pi i\langle e_j,z-P^\top\gamma\rangle)\theta(\varphi(z)-\gamma|\widetilde{\Omega}),\end{aligned}$$

то функция $\theta(\varphi(z)-\gamma|\widetilde{\Omega})$ является тэта-функцией абелева многообразия M аргумента $z-P^\top\gamma$ и, следовательно, раскладывается по базисным тэта-функциям (4). Разложение в ряд Фурье функции $\theta(\varphi(z)-\gamma|\widetilde{\Omega})$ имеет вид

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^g}\exp(\pi i\langle m,\widetilde{\Omega}m\rangle+2\pi i\langle m,\Phi z-\gamma\rangle).$$

Из (4) следует, что коэффициент при $\exp(2\pi i\langle\Delta^{-1}\varepsilon,z-P^\top\gamma\rangle)$ в этом разложении равен $c_\varepsilon\exp(\pi i\langle\Delta^{-1}\varepsilon,\Omega\Delta^{-1}\varepsilon\rangle)$. Отсюда получаем формулу для c_ε. Теорема доказана.

3. Теорема о разложении тэта-функции Прима

Мы ограничимся здесь случаем, когда не главно поляризованное абелево многообразие M является многообразием Прима.

Пусть Γ — риманова поверхность с инволюцией $\sigma:\Gamma\to\Gamma$ с $2(n+1)$ неподвижными точками $Q_0,\dots,Q_{2n+1}$, $n>0$, и $\pi:\Gamma\to\Gamma_0=\Gamma/\sigma$ — проекция. Род Γ равен $2g+n$, где g — род Γ_0. Поверхность Γ обладает каноническим базисом циклов

$$a_1,\dots,a_{g+n},\tilde a_1,\dots,\tilde a_g,b_1,\dots,b_{g+n},\tilde b_1,\dots,\tilde b_g$$

таким, что

$$\sigma(a_\alpha)+\tilde a_\alpha=\sigma(b_\alpha)+\tilde b_\alpha=0,\quad1\le\alpha\le g,$$
$$\sigma(a_j)+a_j=\sigma(b_j)+b_j=0,\quad g+1\le j\le g+n.$$

Базису циклов отвечает канонический базис абелевых дифференциалов

$$u_1, \dots, u_{g+n}, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_g,$$

для которого выполнены соотношения

$$\sigma^* u_\alpha + \tilde{u}_\alpha = 0, \quad \sigma^* u_j + u_j = 0, \quad 1 \le \alpha \le g, \quad g+1 \le j \le g+n.$$

Циклы $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ проектируются в канонический базис циклов на Γ_0. Поверхность Γ_0 обладает каноническим базисом абелевых дифференциалов $\widetilde{\omega}_1, \dots, \widetilde{\omega}_g$ таким, что $\pi^*(\widetilde{\omega}_k) = u_k - \tilde{u}_k$, $1 \le k \le g$. Через T обозначим матрицу периодов $\widetilde{\omega}_k$, $T_{jk} = \int\limits_{\pi(b_j)} \widetilde{\omega}_k$, $1 \le j,\ k \le g$. Напомним, что $\int\limits_{\pi(a_j)} \widetilde{\omega}_k = \delta_{jk}$ ввиду выбора базисных циклов и базисных абелевых дифференциалов. Обозначим через $J = \mathbb{C}^{2g+n}/\{\mathbb{Z}^{2g+n} + \Omega\mathbb{Z}^{2g+n}\}$ многообразие Якоби поверхности Γ, где Ω — матрица периодов базисных дифференциалов поверхности Γ, через $A : \Gamma \to J$ вложение Абеля с базисной точкой Q_0. Дифференциалы

$$\omega_\alpha = u_\alpha + \tilde{u}_\alpha, \quad \omega_j = u_j, \quad 1 \le \alpha \le g, \quad g+1 \le j \le g+n,$$

образуют базис абелевых дифференциалов Прима $\sigma^*\omega_k = -\omega_k$, $1 \le k \le g+n$. Инволюция σ индуцирует инволюцию $\sigma_* : J \to J$,

$$\sigma_*(z_1, \dots, z_g, z_{g+1}, \dots, z_{g+n}, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_g) = -(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_g, z_{g+1}, \dots, z_{g+n}, z_1, \dots, z_g).$$

Многообразием Прима называется абелево подмногообразие

$$Pr = \{z \in J \mid \sigma_*(z) = -z\} \subset J.$$

Через $\varphi : \mathbb{C}^{g+n}/\Lambda \to Pr$ обозначим изоморфизм

$$\varphi(z_1, \dots, z_{g+n}) = (1/2z_1, \dots, 1/2z_g, z_{g+1}, \dots, z_{g+n}, 1/2z_1, \dots, 1/2z_{g+n}),$$

где $\Lambda = \Delta\mathbb{Z}^{g+n} + \Pi\mathbb{Z}^{g+n}$, Δ — диагональная матрица с диагональю $(2, \dots, 2, 1, \dots, 1)$ (n единиц), Π — симметричная матрица с $\operatorname{Im}\Pi > 0$, компоненты которой равны

$$\Pi_{\alpha k} = 2\int\limits_{b_\alpha} \omega_k, \quad 1 \le \alpha \le g, \quad 1 \le k \le g+n,$$

$$\Pi_{jk} = \int\limits_{b_j} \omega_k, \quad g+1 \le j \le g+n, \quad 1 \le k \le g+n.$$

Многообразие Pr не главно поляризовано и размерность пространства тэта-функций Прима равна 2^g.

Из теорем 1 и 2 выводим следующий результат.

Теорема 3. *Тэта-функции $\theta[\Delta^{-1}\varepsilon, 0](z|\Pi)$ задают базис пространства тэта-функций Прима, где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_g, 0, \dots, 0)$ (n нулей), $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$. Справедлива формула разложения по тэта-функциям Прима:*

$$\theta(\varphi(z) - \gamma|\Omega) = \sum_{\varepsilon} c_\varepsilon \theta[\Delta^{-1}\varepsilon, 0](z - \tilde{\gamma}|\Pi), \tag{5}$$

где $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{g+n}, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_g)$, $\tilde{\gamma} = (\gamma_1 + \tilde{\gamma}_1, \dots, \gamma_g + \tilde{\gamma}_g, \gamma_{g+1} \dots, \gamma_{g+n})$,

$$c_\varepsilon = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i\langle m_\varepsilon, \Omega m_\varepsilon\rangle + \pi i\langle \varepsilon, \tilde{\gamma}\rangle - 2\pi i\langle m_\varepsilon, \gamma\rangle - \pi i\langle \Delta^{-1}\varepsilon, \Pi\Delta^{-1}\varepsilon\rangle), \tag{6}$$

через m_ε *мы обозначили вектор* $(m_1,\dots,m_g,0,\dots,0,\varepsilon_1-m_1,\dots,\varepsilon_g-m_g)$ *(*n *нулей).*

В [10, предложение 5.5] получена формула, связывающая тэта-функции с характеристиками главно поляризованных абелевых многообразий J, $\mathbb{C}^g/\{\mathbb{Z}^g+T\mathbb{Z}^g\}$ и $\mathbb{C}^{g+n}/\{\mathbb{Z}^{g+n}+\Pi\mathbb{Z}^{g+n}\}$. Из нее вытекает другой вывод формулы (5) и следует, что константы c_ε (из теоремы 3) равны $\theta[\tilde\varepsilon,0](\hat\delta|2T)$, где $\tilde\gamma=(\tilde\gamma_1-\gamma_1,\dots,\tilde\gamma_g-\gamma_g)$, $\tilde\varepsilon=\frac{1}{2}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_g)$.

4. Приложения

4.1. Иерархия СКР. Эта иерархия определяется бесконечной системой уравнений Лакса

$$[\partial_n-B_n,\partial_m-B_m]=0,\quad m,n=1,3,5,\dots,$$

на коэффициенты операторов

$$B_n=\partial^n+\sum_{i=0}^{n-2}u_{ni}\partial^i,$$

которые зависят от бесконечного числа переменных $x=t_1,t_3,t_5,\dots$, причем должно выполняться равенство $B_n^*=-B_n$, где B_n^* — формально сопряженный оператор к B_n, $\partial=\partial/\partial x$, $\partial_n=\partial/\partial t_n$. Существует псевдодифференциальный оператор

$$L=\partial+\frac{V}{2}\partial^{-1}+\sum_{k=2}^{\infty}V_k\partial^{-k}$$

такой, что $B_k=(L^k)^+$, где $(L^k)^+$ — дифференциальная часть L^k, функции V_k выражаются через V и ее производные. Первые два оператора иерархии имеют вид

$$B_3=\partial^3+\frac{3}{2}V\partial+\frac{3}{4}\partial V,\quad B_5=\partial^5+\frac{5}{2}V\partial^3+\frac{15}{4}\partial V\partial^2+W\partial+\frac{\partial W}{2}+\frac{5}{8}\partial^3 V,$$

где

$$W=\frac{1}{3\partial^2 V}\left(\frac{\partial^6 V}{3}+5V\partial^4 V+\frac{45}{4}\partial V\partial^3 V+15(\partial^2 V)^2+\frac{15}{2}V(\partial V)^2\right.$$
$$\left.+\frac{15}{2}V^2\partial^2 V-\frac{5}{3}\partial_3^2 V-\frac{5}{3}\partial_3\partial^3 V-5\partial_3 V\partial V-\frac{5}{2}V\partial_3\partial V+3\partial_5\partial V\right).$$

Первое уравнение иерархии имеет вид

$$\partial_3 V=\frac{6}{5}\partial W-\frac{7}{2}\partial^3 V-3V\partial V.$$

Выразим функцию V (решение иерархии СКР) через тэта-функции многообразия Прима. Пусть Γ — риманова поверхность с инволюцией $\sigma:\Gamma\to\Gamma$ с $2(n+1)$ неподвижными точками $Q_0,\dots,Q_{2n+1}$, $n>0$. Фиксируем неспециальный дивизор $D=P_1+\dots+P_{2g+n}$ на Γ и полином R. Выберем в окрестности точки Q_1 локальный параметр k^{-1} такой, что $k\sigma=-k$. Одноточечной функцией Бейкера — Ахиезера со спектральными данными $\{\Gamma,Q_1,D,k^{-1},R(k)\}$ называется функция $\psi(P)$, $P\in\Gamma$, определяемая (с точностью до пропорциональности) следующими свойствами [11]:

1) $\psi(P)$ мероморфна на $\Gamma\backslash Q_1$, множество ее полюсов совпадает с D;

2) в окрестности Q_1 функция $\psi(P)\exp(-R(k))$ аналитична.

Теорема A [2]. *Если для неспециального положительного дивизора D выполнено соотношение*

$$D + \sigma D \sim C_\Gamma + 2Q_1,$$

где C_Γ — канонический класс на Γ, то одноточечная функция Бейкера — Ахиезера, построенная по спектральным данным $\{\Gamma, Q_1, D, k^{-1}, xk + t_3k^3 + t_5k^5 + \dots\}$, является собственной функцией операторов иерархии СКР

$$B_m\psi = \partial_m\psi.$$

Напомним, что C_Γ — класс линейной эквивалентности дивизора нулей и полюсов некоторой мероморфной 1-формы. Условие теоремы означает, что существует мероморфная 1-форма ω_1 с нулями в $D+\sigma D$ и полюсом второго порядка в Q_1.

Пусть ω_s — дифференциал Прима второго рода с единственным полюсом порядка $s+1$ (s — нечетное число) в точке Q_1 и с нулевыми a и $\tilde{a}$-периодами. Через U_s обозначим вектор $(U_{s1}, \dots, U_{sg}, U_{s\,g+1}, \dots, U_{s\,g+n}, U_{s1}, \dots, U_{sg})$, где $U_{s_j} = \int\limits_{b_j} \omega_s$. Функция Бейкера — Ахиезера $\psi(x, t_3, t_5, \dots; P)$ имеет вид [11]

$$\exp\left(2\pi i x \int\limits_{Q_0}^{P} \omega_1 + 2\pi i t_3 \int\limits_{Q_0}^{P} \omega_3 + 2\pi i t_5 \int\limits_{Q_0}^{P} \omega_5 + \dots\right) \times \frac{\theta(A(P) - A(D) - K_\Gamma + xU_1 + t_3U_3 + t_5U_5 + \dots |\Omega)}{\theta(A(P) - A(D) - K_\Gamma|\Omega)},$$

где $K_\Gamma = -\frac{1}{2}A(C_\Gamma)$ — вектор римановых констант, $\theta(.|\Omega)$ — тэта-функция многообразия Якоби поверхности Γ. Из разложения в степенной ряд функции ψ в окрестности точки Q_1 получается

Следствие 1 (из теоремы A). *Конечнозонные решения* СКР *имеют вид*

$$V(x, t_3, t_5, \dots) = 2\partial^2 \log\theta(xU_1 + t_3U_3 + t_5U_5 + \dots - \gamma|\Omega),$$

где $\gamma = A(D) + K_\Gamma$.

Из теоремы 3 выводим следующее утверждение.

Теорема 4. *Конечнозонные решения* СКР *выражаются через тэта-функции Прима по формуле*

$$V(x, t_3, t_5, \dots) = 2\partial^2 \log \sum_{\varepsilon} c_\varepsilon \theta[\Delta^{-1}\varepsilon, 0](x\tilde{u}_1 + t_3\widetilde{U}_3 + t_5\widetilde{U}_5 + \dots - \tilde{\gamma}|\Pi),$$

где $\widetilde{U}_s = (2U_{s1}, \dots, 2U_{sg}, U_{s\,g+1}, \dots, U_{s\,g+n})$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_g, 0, \dots, 0)$ (n нулей), $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$ и c_ε находятся по формуле (6).

Интересно было бы объяснить решения СКР через секущие абелевых многообразий. Для солитонных уравнений, интегрируемых в тэта-функциях многообразий Якоби, это сделано в [12], а для интегрируемых в тэта-функциях главно поляризованных многообразий Прима — в [13] (см. также [9]).

4.2. Задача о вращении твердого тела. Вращение твердого тела S вокруг неподвижной точки $O \in S$ в системе координат r_1, r_2, r_3, вращающейся вместе с S в ньютоновском поле с потенциалом φ, описывается обобщенными уравнениями Эйлера [3]:

$$\dot{M} = M \times \omega + \frac{\partial U}{\partial \alpha} \times \alpha + \frac{\partial U}{\partial \beta} \times \beta + \frac{\partial U}{\partial \gamma} \times \gamma, \tag{7}$$

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \omega, \quad \dot{\beta} = \beta \times \omega, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega,$$
$$U(\alpha,\beta,\gamma) = \int_S \rho(r)\varphi(\langle r,\alpha\rangle,\langle r,\beta\rangle,\langle r,\gamma\rangle)\, dr_1 dr_2 dr_3,$$

где $\rho(r)$ — плотность тела S в точке $r = (r_1, r_2, r_3)$, α, β, γ — ортонормированный базис неподвижной системы координат, M и ω — векторы кинетического момента и угловой скорости, которые связаны соотношениями

$$M_i = \sum_{k=1}^{3} I_{ik}\omega_k,$$

где I_{ik} — компоненты тензора инерции тела S во вращающейся системе координат

$$I_{ik} = \int_S \rho(r)\left(\delta_{ik}\sum_{j=1}^{3} r_j^2 - r_i r_k\right) dr_1 dr_2 dr_3.$$

С помощью изоморфизма алгебры Ли $\mathbb{R}^3$ относительно векторного произведения и алгебры кососимметрических (3×3)-матриц относительно коммутатора в [3] показано, что из (7) следуют матричные уравнения

$$\left[L, \frac{\partial}{\partial t} + Q\right] = 0, \quad L = BE^2 + ME + u, \quad Q = \omega - EI,$$

где u, B — некоторые симметрические матрицы, E — произвольный параметр, кососимметрические матрицы и векторы, которые соответствуют друг другу при этом изоморфизме, мы обозначаем для простоты одними и теми же символами. Обозначим через Γ гладкое пополнение поверхности, заданной в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$\det(BE^2 + ME + u - w1) = 0.$$

Риманова поверхность Γ не является гиперэллиптической и допускает голоморфную инволюцию $\sigma : \Gamma \to \Gamma$, $\sigma(w, E) = (w, -E)$. Род поверхности Γ равен 4, поверхность $\Gamma_0 = \Gamma/\sigma$ является эллиптической, инволюция σ имеет 6 неподвижных точек. Размерность многообразия Прима равна трем, компоненты угловой скорости $\omega_i^j(t)$ равны

$$A_i^j \exp\bigl(t\xi_i^j\bigr)\frac{\theta\bigl(tU + z_i^j|\Omega\bigr)}{\theta(tU + z_0|\Omega)},$$

где константы A_i^j, ξ_i^j и векторы z_i^j, $z_0 \in J(\Gamma)$, $U \in Pr(\Gamma)$ определены в [3]. Из теоремы 3 выводим следующий результат.

Теорема 5. *Компоненты угловой скорости выражаются через тэта-функции Прима по формуле*

$$\omega_i^j(t) = A_i^j \exp\bigl(t\xi_i^j\bigr)\frac{c_0\theta\bigl(t\widetilde{U} + \tilde{z}_i^j|\Pi\bigr) + c_1\theta[\Delta^{-1}\varepsilon_1, 0]\bigl(t\widetilde{U} + \tilde{z}_i^j|\Pi\bigr)}{c_0'\theta(t\widetilde{U} + \tilde{z}|\Pi) + c_1'\theta[\Delta^{-1}\varepsilon_1, 0](t\widetilde{U} + \tilde{z}|\Pi)},$$

где $\varepsilon_1 = (1,0,0)$, $\Delta = (2,1,1)$, *константы* c_*, c_*' *находятся по формуле* (6).

4.3. $g_2^{(1)}$-Цепочка Тода. Эта цепочка описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} p_i^2 + \exp(q_2 - q_1) + \exp(q_3 - q_2) + \exp\frac{1}{3}(q_1 + q_2 - 2q_3),$$

которая заменой координат сводится к системе

$$\dot{Y} = CX, \quad \dot{X}^\top = (x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3), \tag{8}$$

где $X^\top(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $Y^\top(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$, C — матрица Картана $g_2^{(1)}$-алгебры Ли Каца — Муди, равная

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Система (8) допускает представление Лакса

$$\dot{A_\mu} = [A_\mu, B_\mu], \tag{9}$$

где

$$A_\mu = \begin{pmatrix} b_1 & a_2 & \mu^{-1}a_3 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & \sqrt{2}a_1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu a_3 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & \sqrt{2}a_1 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}a_1 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & -\mu^{-1}a_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}a_1 & 0 & -b_2 & -a_2 \\ 0 & 0 & -a_1 & 0 & -\mu a_3 & -a_2 & -b_1 \end{pmatrix},$$

$$B_\mu = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & -\mu^{-1}a_3 & 0 & -a_1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 0 & \sqrt{2}a_1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -\sqrt{2}a_1 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}a_1 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^{-1}a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}a_1 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & -a_1 & 0 & -\mu a_3 & a_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_1 = \frac{i}{2}\sqrt{x_3}, \quad a_2 = \frac{i}{2}\sqrt{x_2}, \quad a_3 = \frac{i}{2}\sqrt{x_1},$$

$$b_1 = \frac{y_1 + y_3}{4}, \quad b_2 = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{4}, \quad b_1 = \frac{3y_1 + y_3}{4}.$$

Из (9) следует, что операторы A_μ и $\partial_t + B_\mu$ коммутируют, следовательно, оператор A_μ отображает семимерное ядро оператора $\partial_t + B_\mu$ в себя. Отсюда вытекает, что собственные числа оператора A_μ не зависят от времени. Поэтому характеристический полином $Q(\mu, \lambda) = \det(A_\mu - \lambda E)$ матрицы A_μ не зависит от времени:

$$Q(\mu, \lambda) = \lambda(H_1(X, Y)(1/\mu + \mu) - \lambda^6 - H_2(X, Y)\lambda^4 - H_3(X, Y)\lambda^2 - H_4(X, Y)).$$

Коэффициенты $H_i(X, Y) = c_i$ (функции от компонент A_μ) являются интегралами движения. Обозначим через Γ гладкое пополнение кривой, заданной в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$c_1(1/\mu + \mu) = \lambda^6 + c_2\lambda^4 + c_3\lambda^2 + c_4. \tag{10}$$

Спектральная кривая Γ допускает две инволюции

$$\tau : (\mu, \lambda) \to (1/\mu, \lambda), \quad \sigma : (\mu, \lambda) \to (\mu, -\lambda).$$

Инволюция τ является гиперэллиптической с неподвижными точками $P_i(1, \lambda_i)$, $1 \le i \le 6$, где λ_i — корень уравнения $\lambda^6 + c_2\lambda^4 + c_3\lambda^2 + c_4 - 2c_1 = 0$, и $P_j(-1, \lambda_j)$,

$7 \leq j \leq 12$, где λ_j — корень уравнения $\lambda^6+c_2\lambda^4+c_3\lambda^2+c_4+2c_1=0$. Инволюция σ имеет 4 неподвижные точки: $R_1(\mu_1, 0)$, $R_2(\mu_2, 0)$, $R_3(0, \infty)$ и $R_4(\infty, \infty)$, где μ_1 и μ_2 — корни уравнения $c_1(1/\mu+\mu)=c_4$, R_3 и R_4 — бесконечно удаленные точки кривой, заданной уравнением (10). Конечнозонные решения уравнения (9) выражаются через тэта-функции многообразия Якоби J кривой Γ (см. [14]). Обмотка тора J, возникающая при этом, пробегает двумерное абелево подмногообразие M с типом поляризации (1,3) [4, 7], которое содержится в многообразии Прима инволюции σ. Следовательно, по теореме 2 решения уравнения (9) могут быть выражены через тэта-функции абелева многообразия M.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П.* Интегрируемые системы. I // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 4. С. 179–285.
2. *Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T.* Transformation groups for soliton equations // J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. P. 3813–3818.
3. *Богоявленский О. И.* Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 5. С. 883–938.
4. *Adler M., Van Moerbeke P.* Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties, and representation theory // Adv. Math. 1980. V. 38. P. 318–379.
5. *Audin M.* Courbes algebriques et systemes integrables: geodesiques des quadriques // Expositiones Math. 1994. V. 12. P. 193–226.
6. *Haine L.* Geodesic flow on $SO(4)$ and Abelian surfaces // Math. Ann. 1983. V. 263. P. 435–472.
7. *Van Moerbeke P.* Introduction to algebraic integrable systems and their Painleve analysis // Proc. symp. in pure mathematics. 1989. V. 49, part 1. P. 107–131.
8. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.
9. *Тайманов И. А.* Секущие абелевых многообразий, тэта-функции и солитонные уравнения // Успехи мат. наук. 1997. Т. 52, № 1. С. 149–224.
10. *Fay J. D.* Theta functions on Riemann surfaces. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1973. (Lecture Notes in Math.; 352).
11. *Кричевер И. М.* Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, № 6. С. 183–208.
12. *Мамфорд Д.* Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.
13. *Тайманов И. А.* Тэта-функции Прима и иерархии нелинейных уравнений // Мат. заметки. 1991. Т. 50, № 1. С. 98–107.
14. *Кричевер И. М.* Нелинейные уравнения и эллиптические кривые // Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 23. С. 79–136.

Статья поступила 16 мая 2000 г.

г. Новосибирск