Сибирский математический журнал
Июль—август, 2001. Том 42, № 4

УДК 517.98.23

ФОРМУЛА ДЛЯ ФУНКЦИЙ, РЕАЛИЗУЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛЫ

В. И. Половинкин

Аннотация: Выводится формула для функций u, реализующих функционалы l, принадлежащие пространству, сопряженному к $L_p^m(E_n)$, $p \in (1, \infty)$, в виде

$$(l, f) = \int\limits_{E_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} u^{(\alpha)}(x) f^{(\alpha)}(x)\, dx.$$

Здесь f — представитель $F \in L_p^m(E_n)$; u считается обладающей обобщенными производными порядка m, суммируемыми по n-мерному пространству E_n в степени $p(p-1)^{-1}$; носитель l не предполагается ограниченным. Библиогр. 8.

Статья продолжает работы [1–3], посвященные решению задачи о реализации линейных функционалов l в пространствах $L_p^m(E_n)$, $p \in (1, \infty)$, через билинейные дифференциальные формы порядка m, связанные с реализующими эти функционалы функциями u, производные которых порядка m суммируемы в степени $q = p(p-1)^{-1}$. В [3] выведена формула для производных $u^{(\alpha)}$, $|\alpha| = m$, в которых присутствуют свертки двух видов, обозначаемых там через $*$ и $\circ$. По обобщенным производным $u^{(\alpha)}$ можно найти u, используя алгоритм из [4, гл. 4, § 2].

В настоящей работе выводится как следствие результатов из [3] формула (7) для функций, реализующих линейные ограниченные функционалы в $L_p^m(E_n)$, которая содержит свертки только одного вида, обозначаемые через $\circ$.

Отметим, что финитность функционала l в данной статье не предполагается. Если же он финитен, то во всех рассматриваемых ниже случаях свертки, обозначаемые через $*$ и $\circ$, совпадают, и доказательства теорем настоящей работы могут быть упрощены, если воспользоваться результатами § 4, гл. XII из монографии [4].

Будем пользоваться некоторыми обозначениями и определениями из работы [3], не описывая их вновь или описывая кратко, главным образом в тех случаях, когда они являются распространенными.

Как и в [3], знак $*$ (не в верхнем индексе) будет обозначать свертку обобщенных функций в смысле [5], определенную с помощью их прямого произведения; $G(x)$ будет обозначать фундаментальное решение полигармонического уравнения

$$\Delta^m u = l, \tag{1}$$

пропорциональное $\|x\|^{2m-n}$ или $\|x\|^{2m-n} \ln \|x\|$, где $\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$; $\widehat{G}$ — финитная бесконечно дифференцируемая во всем пространстве

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00765).

E_n, кроме точки $x = 0$, функция, совпадающая в некоторой окрестности нуля с G; $\overline{G} = G - \widehat{G}$.

Через w_ε обозначим «шапочки» (ядра усреднения) из [5, с. 16], зависящие от параметров усреднения $\varepsilon > 0$.

Если символ Ψ обозначает некоторую функцию или распределение, то Ψ_ε будут обозначать средние функции, построенные с помощью ядра усреднения w_ε. Например, $\overline{G}_\varepsilon^{(\alpha)} = (\overline{G}^{(\alpha)})_\varepsilon = \overline{G}^{(\alpha)} * w_\varepsilon$.

Будем неоднократно пользоваться известными свойствами средних функций, сверток и кратных сверток функций и распределений, доказательства которых можно найти в [5].

Если Ω — область E_n, то через $W_p^m(\Omega)$ будем обозначать множество функций, обладающих в Ω суммируемыми в степени p обобщенными производными порядка m.

При $f \in W_p^m(\Omega)$ полагаем

$$\|f\|_{L_p^m(\Omega)} = \left[\int\limits_\Omega \left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!}(f^{(\alpha)}(x))^2\right)^{p/2} dx\right]^{1/p}.$$

Если Ω ограничена, то $W_p^m(\Omega)$ также будет рассматриваться как линейное нормированное пространство с нормой

$$\|f\|_{W_p^m(\Omega)} = \left[\|f\|_{L_p}^p + \|f\|_{L_p^m(\Omega)}^p\right]^{1/p}. \tag{2}$$

Приведем необходимые сведения и обозначения, связанные с интегральными представлениями С. Л. Соболева функций из $W_p^m(\Omega)$ [4, 6].

Пусть C — фиксированный везде далее открытый шар в E_n; S — множество многочленов степени ниже m, которое считаем линейным нормированным пространством с нормой

$$\left\|\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha\right\|_S = \left[\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\sum_{|\alpha|=k}(a_\alpha)^2\frac{k!}{\alpha!}\right\}^{p/2}\right]^{1/p}.$$

Если Ω — область, Π — проектор, проектирующий $W_p^m(\Omega)$ в S, то на $W_p^m(\Omega)$ определим следующую норму, отличную от нормы (2):

$$\|f\|_{W_{p,1}^m(\Omega)} = \left[\|\Pi f\|_S^p + \|f\|_{L_p^m(\Omega)}^p\right]^{1/p}. \tag{3}$$

Теорема 1 ([4] или [6, гл. 6]). *Существуют проекционный оператор Π, проектирующий $W_p^m(E_n)$ на S, значения которого зависят только от сужений проектируемых функций на C, и функции $K_\alpha(x, y)$, $|\alpha| = m$, равные 0, если y не принадлежит выпуклой оболочке $x \cup C$, обладающие следующими свойствами.*

(a) *Имеет место разложение*

$$f = \Pi f + \Pi^* f \tag{4}$$

при $f \in W_p^m(E_n)$, где

$$(\Pi^* f)(x) = \sum_{|\alpha|=m}\int\limits_{E_n} K_\alpha(x, y) f^{(\alpha)}(y)\, dy. \tag{5}$$

(b) *Если Ω — ограниченная область, звездная относительно $C \subset \Omega$, то нормы* (2) *и* (3) *эквивалентны.*

Замечание 1. Функции K_α, $|\alpha| = m$, из (5) и оператор Π из (4) можно выписать в явном виде. Их выражения, которые можно найти в [4, 6], являются громоздкими.

Пусть функционал l определен на $f \in W_p^m(E_n)$. Тогда будем обозначать

$$(l \circ f)(x) = (l(y), f(x - y)).$$

Ниже свертка $l \circ f$ будет рассматриваться в случаях, когда она существует и является обобщенной функцией из $D'(E_n)$. Однако тогда нельзя утверждать, что существует $l * f$, поскольку как носители l, так и носители f будут, вообще говоря, неограниченными.

Если знак l обозначает линейный ограниченный функционал на $W_{p,1}^m(E_n)$, равный 0 на S, то им порожденный функционал на $L_p^m(E_n)$ также будет обозначаться через l.

Теорема 2. (a) *Для всякого функционала $l \in L_p^{m*}(E_n)$, $p \in (1, \infty)$, существует единственная с точностью до полиномиального слагаемого из S функция $u \in W_q^m(E_n)$ такая, что для всех $f \in W_p^m(E_n)$*

$$(l, f) = \int\limits_{E_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} u^{(\alpha)}(x) f^{(\alpha)}(x)\, dx. \tag{6}$$

(b) *Утверждению* (a) *теоремы удовлетворяет функция*

$$u(x) = (-1)^m \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{E_n} \sum_{|\alpha|=m} K_\alpha(x, y)(l \circ G_\varepsilon^{(\alpha)})(y)\, dy, \tag{7}$$

где K_α, $|\alpha| = m$, — функции из (5), *а сходимость в* (7) *понимается как сходимость в $W_{q,1}^m(E_n)$.*

Отметим, что формула (7) является новой и при $m = 1$, т. е. когда уравнение (1) является уравнением Лапласа.

Первое утверждение теоремы 2 доказано в [1]. Установим второе утверждение. Его доказательство будет опираться на следующие ниже теорему 3 и лемму 1, установленные в [3].

Теорема 3. *Справедливо равенство*

$$u^{(\alpha)} = (-1)^m (l \circ \overline{G}^{(\alpha)} + l * \widehat{G}^{(\alpha)}), \quad |\alpha| = m. \tag{8}$$

Лемма 1 [3]. *Существуют функции $g_\beta \in L_q(E_n)$, $|\beta| = m$, такие, что*
(a) *если $f \in W_p^m(E_n)$, то*

$$l \circ f = (-1)^m \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\beta!} g_\beta * (f * \delta^{(\beta)}); \tag{9}$$

(b) *при финитной $f \in D'(E_n)$*

$$l * f = (-1)^m \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\beta!} (g_\beta * \delta^{(\beta)}) * f. \tag{10}$$

Перейдем непосредственно к доказательству утверждения (b) теоремы 2. Исследуем средние функции слагаемых из правой части формулы (8). Функции $\overline{G}_\varepsilon^{(\alpha)}$ принадлежат $W_p^m(E_n)$ при $|\alpha| = m$. Поэтому из (9) имеем

$$(-1)^m(l \circ \overline{G}^{(\alpha)})_\varepsilon = \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\beta!}(g_\beta * (\overline{G}^{(\alpha)} * \delta^{(\beta)}))_\varepsilon$$
$$= \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\beta!}(g_\beta * \overline{G}^{(\alpha+\beta)})_\varepsilon = \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\beta!}(g_\beta * \overline{G}^{(\alpha+\beta)}) * w_\varepsilon. \quad (11)$$

Лемма 2. *При $|\alpha| = |\beta| = m$ функции $|g_\beta| * |\overline{G}^{(\alpha+\beta)}|$ суммируемы на E_n.*

Справедливость леммы следует из того, что $g_\beta \in L_q(E_n)$, $\overline{G}^{(\alpha+\beta)} \in L_p^m(E_n)$ при $|\alpha| = |\beta| = m$, и интегрального неравенства Гёльдера.

Лемма 3. *При $|\alpha| = |\beta| = m$ существуют двойные свертки $g_\beta * \overline{G}^{(\alpha+\beta)} * w_\varepsilon$ и повторные свертки $(g_\beta * \overline{G}^{(\alpha+\beta)}) * w_\varepsilon$.*

Данное утверждение непосредственно следует из леммы 2, а также финитности и ограниченности функций w_ε.

Из леммы 3 вытекает, что для слагаемых из правой части (11) верны равенства

$$(g_\beta * \overline{G}^{(\alpha+\beta)}) * w_\varepsilon = g_\beta * (\overline{G}^{(\alpha+\beta)} * w_\varepsilon) = g_\beta * \overline{G}_\varepsilon^{(\alpha+\beta)} = g_\beta * (\overline{G}_\varepsilon^{(\alpha)} * \delta^{(\beta)}).$$

Отсюда, а также из формул (9) и (11) вытекает, что

$$(l \circ \overline{G}^{(\alpha)})_\varepsilon = l \circ \overline{G}_\varepsilon^{(\alpha)}. \quad (12)$$

Исследуем средние функции второго слагаемого правой части (8). При обосновании преобразований сверток будем учитывать, что все рассматриваемые сверточные сомножители, кроме, может быть, функций g_β, $|\beta| = m$, финитны.

Так как $\widehat{G}_\varepsilon^{(\alpha)} \in W_p^m(E_n)$ при $|\alpha| = m$, из (10) имеем

$$(-1)^m(l * \widehat{G}^{(\alpha)})_\varepsilon = \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\beta!}((g_\beta * \delta^{(\beta)}) * \widehat{G}^{(\alpha)})_\varepsilon = \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\beta!}(g_\beta * \widehat{G}^{(\alpha+\beta)})_\varepsilon$$
$$= \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\beta!}(g_\beta * \widehat{G}^{(\alpha+\beta)}) * w_\varepsilon = \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\beta!} g_\beta * \widehat{G}_\varepsilon^{(\alpha+\beta)}$$
$$= \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\beta!} g_\beta * (\widehat{G}_\varepsilon^{(\alpha)} * \delta^{(\beta)}) = (-1)^m l \circ \widehat{G}_\varepsilon^{(\alpha)}.$$

Отсюда, а также из формул (8) и (12) вытекает, что

$$u_\varepsilon^{(\alpha)} = (-1)^m\big(l \circ \overline{G}_\varepsilon^{(\alpha)} + l \circ \widehat{G}_\varepsilon^{(\alpha)}\big)(-1)^m = (-1)^m l \circ G_\varepsilon^{(\alpha)}, \quad |\alpha| = m. \quad (13)$$

Будем теперь, используя интегральные представления С. Л. Соболева и функции $u_\varepsilon^{(\alpha)}$, строить функцию u, удовлетворяющую утверждениям теоремы 2.

Аналогично лемме 2 из [3] доказывается, что $\big\{u_\varepsilon^{(\alpha)}\big\}_{|\alpha|=m}$ при каждом $\varepsilon > 0$ является обобщенным градиентом порядка m. При этом надо учитывать, что если $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, то

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u_\varepsilon^{(\alpha)}(x)) = \frac{\partial}{\partial x_i}(u^{(\alpha)} * w_\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_i} u^{(\alpha)} * w_\varepsilon.$$

Обозначим
$$u_\varepsilon(x) = \int\limits_{E_n} \sum_{|\alpha|=m} K_\alpha(x,y) u_\varepsilon^{(\alpha)}(y)\,dy, \tag{14}$$
где все K_α — функции из формулы (5).

Из определения функций u_ε вытекает, что если Π, Π^* — операторы из равенств (4) и (5), то
$$\Pi u_\varepsilon = 0, \quad u_\varepsilon = \Pi^* u_\varepsilon. \tag{15}$$
Так как $u^{(\alpha)} \in L_q(E_n)$ при $|\alpha| = m$, имеем
$$\left\| u^{(\alpha)} - u_\varepsilon^{(\alpha)} \right\|_{L_q(E_n)} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0, \quad |\alpha| = m. \tag{16}$$
Из формулы (16) получаем, что
$$\| u - u_\varepsilon \|_{L_q^m(E_n)} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{17}$$
Формулы (15) и (17) показывают, что если функция u в (16) выбрана так, что
$$\Pi u = 0 = \Pi u_\varepsilon,$$
то
$$\| u - u_\varepsilon \|_{W_{q,1}^m} \to 0, \quad \text{если } \varepsilon \to 0.$$

Отсюда, а также из равенств (13) и (14) вытекает теорема 2.

Замечание 2. Пусть шар C содержится в ограниченной области Ω, звездной относительно него. Тогда из теорем 1 и 2, а также из неравенств
$$\|f\|_{W_{q,1}^m(\Omega)} \le \|f\|_{W_{q,1}^m(E_n)},$$
верных для любых $f \in W_q^m(E_n)$, следует, что формула (7) справедлива в смысле сходимости в линейных нормированных пространствах $W_{q,1}^m(\Omega)$, $W_q^m(\Omega)$. Так как Ω, удовлетворяющая приведенным выше условиям, произвольна, равенство (7) верно почти всюду в E_n.

Замечание 3. Разнообразные теоремы вложений для пространств типов W_p^m или L_p^m обеспечивают справедливость равенств (7) для сходимости во многих линейных нормированных пространствах, в частности, в весовых пространствах функций, заданных во всем E_n; $Y_{p,\gamma,\kappa}^{(m)}$, $Y_{p,\gamma,\kappa}^{(0)}$ [4, гл. V] при соответствующем выборе параметров m, p, γ, κ.

Теорема 2 допускает следующую эквивалентную формулировку в терминах теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Теорема 4. *Если $l \in L_p^{m*}(E_n)$, то дифференциальное уравнение в обобщенных функциях* (1) *имеет решение $u \in W_q^m(E_n)$, единственное в этом классе с точностью до полиномиального слагаемого из S, которое дается формулой* (7).

Существование решения (1) в классе обобщенных функций известно давно [7, теорема 4.4.6]. Его наличие в классе $W_q^m(E_n)$ показано в [1]. Нахождение формулы для него не представляет трудности, когда существует $(l * G) \in W_q^m(E_n)$, например, если l финитен. В теореме 4 не предполагается даже существования $l * G \in D'(E_n)$.

Результаты этой работы впервые доложены на конгрессе ИНПРИМ-98, однако в тезисах соответствующего доклада [8] формула (7) не приводилась.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Половинкин В. И.* О реализации функционалов ошибок кубатурных формул в пространствах типа L_p^m // Краевые задачи для уравнения с частными производными. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988. С. 125–136.
2. *Половинкин В. И.* О реализации финитных функционалов в $L_p^m(E_n)$ // Теоремы вложения и их приложения к задачам математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН СССР, 1989. С. 137–139.
3. *Половинкин В. И.* Реализация функционалов на пространствах $L_p^m(E_n)$ // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 166–172.
4. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
5. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
6. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
7. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
8. *Половинкин В. И.* О реализации функционалов на пространствах $L_p^m(E_n)$ // Третий сибирский конгресс по прикладной математике (ИНПРИМ-98), посвященный памяти С. Л. Соболева (1908–1989): Тез. докл. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1998. Т. 1. С. 89.

Статья поступила 26 января 1999 г.

Половинкин Владимир Ильич
Красноярский гос. технический университет, кафедра прикладной математики,
ул. Киренского, 26, Красноярск 660074
polovinkin@fivt.kgtu.runnet.r