Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2001. Том 42, № 5

УДК 517.953+517.983

ИЗОМОРФНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАСССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Г. В. Демиденко

Аннотация: Рассматривается класс матричных квазиэллиптических операторов вида

$$\mathscr{L}(D_x) = \begin{pmatrix} K & L(D_x) \\ M(D_x) & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in R_n.$$

Для этих операторов устанавливаются изоморфные свойства в специальных шкалах весовых соболевских пространств. Приводится пример использования полученных результатов для систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. Библиогр. 17.

Посвящается С. В. Успенскому
в честь его 70-летия

В работе рассматривается класс матричных квазиэллиптических операторов, введенный в монографии [1]:

$$\mathscr{L}(D_x) = \begin{pmatrix} K & L(D_x) \\ M(D_x) & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in R_n. \tag{0.1}$$

Для этих операторов устанавливаются изоморфные свойства в специальных шкалах весовых соболевских пространств. Приводится пример использования полученных результатов для систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной.

§ 1. Формулировка основных результатов

Будем предполагать, что матричный $\nu \times \nu$-оператор $\mathscr{L}(D_x)$ удовлетворяет следующим условиям.

Условие 1. Числовая $\mu \times \mu$-матрица K невырожденна, $1 \leq \mu < \nu$.

Условие 2. Существуют вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и число $s \in (0, 1)$, s/α_i, $1/\alpha_i \in \mathbb{N}$, такие, что символы матричных операторов $L(D_x)$ и $M(D_x)$ однородны относительно вектора α с показателями $1 - s$ и s соответственно, т. е.

$$L(c^\alpha i\xi) = c^{1-s}\, L(i\xi), \quad M(c^\alpha i\xi) = c^s\, M(i\xi), \quad c > 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99–01–00533 и 01–01–00609).

Условие 3. Равенство

$$\det(M(i\xi)K^{-1}L(i\xi)) = 0, \quad \xi \in R_n,$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\xi = 0$.

В качестве примера рассмотрим следующий оператор:

$$\mathscr{L}(D_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & D_{x_1} \\ 0 & 1 & 0 & D_{x_2} \\ 0 & 0 & 1 & D_{x_3} \\ D_{x_1} & D_{x_2} & D_{x_3} & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in R_3. \tag{1.1}$$

Оператор является эллиптическим по Дуглису — Ниренбергу, и для него, очевидно, $\nu = 4$, $\mu = 3$,

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L(D_x) = \begin{pmatrix} D_{x_1} \\ D_{x_2} \\ D_{x_3} \end{pmatrix}, \quad M(D_x) = (D_{x_1}, D_{x_2}, D_{x_3}),$$

$$\det(M(i\xi)K^{-1}L(i\xi)) = -|\xi|^2, \quad \alpha = (1/2, 1/2, 1/2), \quad s = 1/2.$$

Следовательно, для оператора (1.1) условия 1–3 выполнены.

Используя весовые соболевские пространства $W^r_{p,\sigma}(R_n)$, исследуемые в [2], для оператора $\mathscr{L}(D_x)$ можно установить некоторые утверждения, аналогичные доказанным в работе автора [3] для класса квазиэллиптических операторов с однородными символами. В этой работе мы докажем теоремы об изоморфизме оператора $\mathscr{L}(D_x)$ и о регулярности решений квазиэллиптических систем в R_n.

Согласно определению [2] норма в пространстве

$$W^r_{p,\sigma}(R_n), \quad r = (r_1, \dots, r_n), \quad r_i \in \mathbb{N}, \quad 1 < p < \infty, \quad \sigma \in R_1,$$

определяется следующим образом:

$$\big\| u(x), W^r_{p,\sigma}(R_n) \big\| = \sum_{0 \le \beta/r \le 1} \big\| (1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(1-\beta/r)} D^\beta_x u(x), L_p(R_n) \big\|,$$

где

$$\langle x \rangle^2 = \sum_{i=1}^n x_i^{2r_i}, \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), \quad \frac{\beta}{r} = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{r_i}.$$

В изотропном случае $r_1 = \ldots = r_n = r$ норма эквивалентна следующей:

$$\sum_{0 \le |\beta| \le r} \| (1 + |x|)^{-\sigma(r-|\beta|)} D^\beta_x u(x), L_p(R_n) \|.$$

В [2] доказано, что при $\sigma \le 1$ множество финитных бесконечно дифференцируемых функций всюду плотно в $W^r_{p,\sigma}(R_n)$. В дальнейшем мы будем рассматривать эти пространства в частном случае $\sigma = 1$. Отметим, что в изотропном случае при $p > n$, $\sigma = 1$ пространства такого типа были введены Л. Д. Кудрявцевым [4] (см. также обзор [5]).

Имеет место

Теорема 1. *Пусть* $r = (1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n)$, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$. *Если* $|\alpha|/p > 1$, *то оператор*

$$\mathscr{L}(D_x): \prod_1^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} W_{p,1}^{r}(R_n) \to \prod_1^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} L_p(R_n)$$

устанавливает изоморфизм.

Из теоремы, в частности, вытекает, что оператор (1.1) устанавливает изоморфизм

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & D_{x_1} \\ 0 & 1 & 0 & D_{x_2} \\ 0 & 0 & 1 & D_{x_3} \\ D_{x_1} & D_{x_2} & D_{x_3} & 0 \end{pmatrix} : \prod_1^3 W_{p,1}^1(R_3) \times W_{p,1}^2(R_3) \to \prod_1^3 W_{p,1}^1(R_3) \times L_p(R_3)$$

при $1 < p < 3/2$.

Приведем некоторые примеры использования этой теоремы.

Вначале рассмотрим систему уравнений в R_n:

$$Ku^+ + L(D_x)u^- = f^+(x), \quad M(D_x)u^+ = f^-(x). \tag{1.2}$$

В силу теоремы 1 система имеет единственное решение

$$u^+(x) \in \prod_1^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n), \quad u^-(x) \in \prod_{\mu+1}^{\nu} W_{p,1}^{r}(R_n) \tag{1.3}$$

для любой правой части

$$f^+(x) \in \prod_1^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n), \quad f^-(x) \in \prod_{\mu+1}^{\nu} L_p(R_n), \tag{1.4}$$

при этом имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{\mu} \left\| u_j^+(x), W_{p,1}^{sr}(R_n) \right\| + \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \left\| u_i^-(x), W_{p,1}^{r}(R_n) \right\| \\ \le c\left(\sum_{j=1}^{\mu} \left\| f_j^+(x), W_{p,1}^{sr}(R_n) \right\| + \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \left\| f_i^-(x), L_p(R_n) \right\| \right) \tag{1.5}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f^+(x)$, $f^-(x)$. Приведем теорему о регулярности решений системы (1.2).

Теорема 2. *Пусть* $r = (1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n)$, $l/\alpha_i \in \mathbb{N}$, $|\alpha|/p > 1$,

$$f^+(x) \in \prod_1^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n), \quad f^-(x) \in \prod_{\mu+1}^{\nu} W_{p}^{lr}(R_n),$$

при этом $D_x^{\beta} f^+(x) \in \prod\limits_1^{\mu} W_p^{lr}(R_n)$ *для любых* β, $\beta\alpha = s$. *Тогда для всех компонент решения имеют место следующие свойства:*

1) $D_x^{\beta} u^+(x) \in \prod\limits_1^{\mu} W_p^{lr}(R_n)$ *при* $\beta\alpha = s$;

2) $D_x^\gamma u^-(x) \in \prod\limits_{\mu+1}^{\nu} W_p^{lr}(R_n)$ *при* $\gamma\alpha = 1$.

Рассмотрим задачу Коши для системы, не разрешенной относительно производной по времени:

$$\begin{gathered} KD_t u^+ + K_1 u^+ + L(D_x)u^- = f^+(t,x), \\ M(D_x)u^+ = f^-(t,x), \quad t > 0,\ x \in R_n, \quad u^+|_{t=0} = u_0^+(x), \end{gathered} \tag{1.6}$$

где K, $L(D_x)$, $M(D_x)$ — соответствующие блоки оператора (0.1), K_1 — постоянная $\mu \times \mu$-матрица.

Теорема 3. *Пусть* $r = (1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n)$, $|\alpha|/p > 1$,

$$f^+(t,x) \in C\left([0,T];\ \prod_1^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n)\right), \quad f^-(t,x) \in C^1\left([0,T];\ \prod_{\mu+1}^{\nu} L_p(R_n)\right),$$

$$u_0^+(x) \in \prod_1^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n), \quad M(D_x)u_0^+(x) = f^-(0,x).$$

Тогда существует единственное решение задачи Коши (1.6)*:*

$$u^+(t,x) \in C^1\left([0,T];\ \prod_1^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n)\right), \quad u^-(t,x) \in C\left([0,T];\ \prod_{\mu+1}^{\nu} W_{p,1}^{r}(R_n)\right).$$

Пример. Рассмотрим задачу Коши для системы Соболева [6]

$$\begin{gathered} D_t u^+ - [u^+ \times w] + \nabla u^- = f^+(t,x), \\ \operatorname{div} u^+ = f^-(t,x), \quad t > 0,\ x \in R_3, \quad u^+|_{t=0} = u_0^+(x). \end{gathered} \tag{1.7}$$

Из теоремы 2, в частности, вытекает, что задача Коши (1.7) имеет единственное решение

$$u^+(t,x) \in C^1\left([0,T];\ \prod_1^{3} W_{p,1}^{1}(R_3)\right),\ u^-(t,x) \in C\big([0,T];\ W_{p,1}^{2}(R_3)\big),\ 1 < p < 3/2,$$

при любых

$$f^+(t,x) \in C\left([0,T];\ \prod_1^{3} W_{p,1}^{1}(R_3)\right), \quad f^-(t,x) \in C^1\left([0,T];\ L_p(R_3)\right),$$

$$u_0^+(x) \in \prod_1^{3} W_{p,1}^{1}(R_3), \quad \operatorname{div} u_0^+(x) = f^-(0,x).$$

Подчеркнем, что использование весовых соболевских пространств $W_{p,1}^r(R_3)$ играет очень важную роль для безусловной разрешимости задачи Коши. Если, например, решать задачу (1.7) в классе

$$u^+(t,x) \in C^1\left([0,T];\ \prod_1^{3} W_{p}^{1}(R_3)\right), \quad u^-(t,x) \in C\big([0,T];\ W_{p}^{2}(R_3)\big), \quad 1 < p < 3/2,$$

то для разрешимости необходимо налагать дополнительные условия на $f^+(t,x)$, $f^-(t,x)$, $u_0^+(x)$ (см. [1, гл. 3]). В частности, при $f^-(t,x)=0$, $u_0^+(x)=0$ необходимо, чтобы

$$\int\limits_{R_3} f^+(t,x)dx = 0.$$

Отметим, что впервые L_p-оценки решений системы Соболева были получены В. Н. Масленниковой [7].

Замечание 1. Некоторые результаты об изоморфных свойствах дифференциальных операторов содержатся в работах [8–12].

Замечание 2. Теорема 1 анонсирована в [13].

§ 2. Схема доказательства теоремы 1

Вначале покажем, что оператор $\mathscr{L}(D_x)$ отображает пространство

$$\prod_1^\mu W^{sr}_{p,1}(R_n) \times \prod_{\mu+1}^\nu W^r_{p,1}(R_n)$$

в пространство

$$\prod_1^\mu W^{sr}_{p,1}(R_n) \times \prod_{\mu+1}^\nu L_p(R_n).$$

По определению оператора (0.1) для любой вектор-функции

$$u(x) = \begin{pmatrix} u^+(x) \\ u^-(x) \end{pmatrix}, \quad u^+(x) \in \prod_1^\mu W^{sr}_{p,1}(R_n), \quad u^-(x) \in \prod_{\mu+1}^\nu W^r_{p,1}(R_n)$$

имеем

$$f(x) = \mathscr{L}(D_x)u(x),$$

где

$$f(x) = \begin{pmatrix} f^+(x) \\ f^-(x) \end{pmatrix}, \quad f^+(x) = Ku^+(x) + L(D_x)u^-(x), \quad f^-(x) = M(D_x)u^+(x).$$

Поскольку $u^-(x) \in \prod\limits_{\mu+1}^\nu W^r_{p,1}(R_n)$, по определению пространства $W^r_{p,1}(R_n)$ следует, что

$$(1+\langle x\rangle)^{-(1-\beta/r)} D_x^\beta u^-(x) \in \prod_{\mu+1}^\nu L_p(R_n), \quad 0 \le \beta/r \le 1.$$

Тогда в силу условия 2 имеем

$$(1+\langle x\rangle)^{-(s-\gamma/r)} D_x^\gamma L(D_x)u^-(x) \in \prod_1^\mu L_p(R_n), \quad 0 \le \gamma/r \le s,$$

а это эквивалентно тому, что

$$(1+\langle x\rangle_s)^{-(1-\gamma/(sr))} D_x^\gamma L(D_x)u^-(x) \in \prod_1^\mu L_p(R_n), \quad \langle x\rangle_s^2 = \sum_{i=1}^n x_i^{2sr_i}.$$

Следовательно, по определению пространства $W^{sr}_{p,1}(R_n)$ получаем $L(D_x)u^-(x) \in \prod\limits_1^\mu W^{sr}_{p,1}(R_n)$ и, значит, $f^+(x) \in \prod\limits_1^\mu W^{sr}_{p,1}(R_n)$. Так как $u^+(x) \in \prod\limits_1^\mu W^{sr}_{p,1}(R_n)$, то в силу условия 2 $M(D_x)u^+(x) \in \prod\limits_{\mu+1}^\nu L_p(R_n)$, т. е. $f^-(x) \in \prod\limits_{\mu+1}^\nu L_p(R_n)$.

Итак, образ оператора $\mathscr{L}(D_x)$ принадлежит пространству

$$\prod_1^\mu W^{sr}_{p,1}(R_n) \times \prod_{\mu+1}^\nu L_p(R_n).$$

Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что квазиэллиптическая система уравнений (1.2) имеет единственное решение (1.3) для любой правой части (1.4), при этом имеет место неравенство (1.5).

Отметим основные моменты доказательства разрешимости задачи (1.2).

Вначале построим последовательность приближенных решений (1.2), используя интегральное представление С. В. Успенского [14] суммируемых функций (см. также [1, гл. 1]):

$$\varphi(x) = \lim_{h\to 0}(2\pi)^{-n}\int\limits_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-1}\int\limits_{R_n}\int\limits_{R_n}\exp\left(i\frac{x-y}{v^\alpha}\xi\right)G(\xi)\varphi(y)\,d\xi dy dv, \tag{2.1}$$

где

$$G(\xi) = 2m\langle\xi\rangle^{2m}\exp(-\langle\xi\rangle^{2m}), \quad \langle\xi\rangle^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^{2/\alpha_i}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Для этого рассмотрим следующую систему с параметром $\xi \in R_n$:

$$Kv^+ + L(i\xi)v^- = \hat f^+(\xi), \quad M(i\xi)v^+ = \hat f^-(\xi),$$

получаемую формальным применением оператора Фурье к задаче (1.2) при условии, что вектор-функции $f^+(x)$, $f^-(x)$ бесконечно дифференцируемы и финитны. Учитывая условия 1–3, при $\xi \in R_n\backslash\{0\}$, очевидно, имеем

$$v^+(\xi) = K^{-1}(I - L(i\xi)N_0^{-1}(\xi)M(i\xi)K^{-1})\hat f^+(\xi) + K^{-1}L(i\xi)N_0^{-1}(\xi)\hat f^-(\xi), \tag{2.3}$$

$$v^-(\xi) = N_0^{-1}(\xi)M(i\xi)K^{-1}\hat f^+(\xi) - N_0^{-1}(\xi)\hat f^-(\xi), \tag{2.4}$$

где $N_0(\xi) = M(i\xi)K^{-1}L(i\xi)$. По аналогии с [1, гл. 3] построим вектор-функции

$$u_k^+(x) = (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{1/k}^k v^{-1}\int\limits_{R_n} e^{ix\xi}G(\xi v^\alpha)v^+(\xi)\,d\xi dv, \tag{2.5}$$

$$u_k^-(x) = (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{1/k}^k v^{-1}\int\limits_{R_n} e^{ix\xi}G(\xi v^\alpha)v^-(\xi)\,d\xi dv. \tag{2.6}$$

Из определения вектор-функций $v^+(\xi)$, $v^-(\xi)$ вытекает, что

$$Ku_k^+(x) + L(D_x)u_k^-(x) = f_k^+(x), \quad M(D_x)u_k^+(x) = f_k^-(x),$$

где

$$f_k^+(x) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{1/k}^k v^{-|\alpha|-1}\int\limits_{R_n}\int\limits_{R_n}\exp\left(i\frac{x-y}{v^\alpha}\xi\right)G(\xi)f^+(y)\,d\xi dy dv,$$

$$f_k^-(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-|\alpha|-1} \int\limits_{R_n} \int\limits_{R_n} \exp\Bigl(i\frac{x-y}{v^\alpha}\xi\Bigr) G(\xi) f^-(y)\, d\xi dy dv.$$

В силу интегрального представления (2.1) для любых $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ таких, что $0 \le \gamma/r \le s$, имеет место сходимость

$$\bigl\|(1+\langle x\rangle_s)^{-(1-\gamma/(sr))}\bigl(D_x^\gamma f_k^+(x) - D_x^\gamma f^+(x)\bigr),\, L_p(R_n)\bigr\| \to 0, \quad k\to\infty,$$

а также

$$\bigl\|f_k^-(x) - f^-(x),\, L_p(R_n)\bigr\| \to 0, \quad k\to\infty.$$

Следовательно, вектор-функции (2.5), (2.6) можно рассматривать в качестве приближенного решения системы (1.2).

Отметим, что в силу условий 1–3 вектор-функции (2.3), (2.4) могут иметь особенности только при $\xi = 0$. Поскольку все элементы матриц в (2.3), (2.4) являются однородными относительно вектора α с показателями однородности $q \in [-1, 0]$, то эти особенности имеют вид $O(\langle\xi\rangle^q)$. Поэтому в силу определения (2.2) вектор-функции $u_k^+(x)$, $u_k^-(x)$ будут бесконечно дифференцируемыми. Очевидно, можно указать натуральное число m_1 такое, что при $m \ge m_1$ в (2.2) эти вектор-функции будут суммируемыми в любой степени $p \ge 1$. Для этого достаточно взять m_1 таким, чтобы для функций $k(\xi) \in C^\infty(R_n\setminus\{0\})$, однородных относительно вектора α с показателем однородности q, выполнялось неравенство

$$\Bigl|\int\limits_{R_n} e^{ix\xi}\langle\xi\rangle^{2m_1} e^{-\langle\xi\rangle^{2m_1}} k(\xi)\, d\xi\Bigr| \le c(1+\langle x\rangle)^{-(|\alpha|+1)}, \quad x\in R_n.$$

В дальнейшем будем считать, что в (2.2) $m \ge m_1$.

Перепишем формулы (2.5), (2.6) в операторном виде

$$\begin{pmatrix} u_k^+(x) \\ u_k^-(x)\end{pmatrix} = P_k f(x), \quad f(x) = \begin{pmatrix} f^+(x) \\ f^-(x)\end{pmatrix}.$$

В следующем параграфе будет доказано, что при условии $|\alpha|/p > 1$ справедливы оценки

$$\sum_{j=1}^{\mu}\bigl\|u_{k,j}^+(x),\, W_{p,1}^{sr}(R_n)\bigr\| + \sum_{i=\mu+1}^{\nu}\bigl\|u_{k,i}^-(x),\, W_{p,1}^{r}(R_n)\bigr\|$$
$$\le c\Biggl(\sum_{j=1}^{\mu}\bigl\|f_j^+(x),\, W_{p,1}^{sr}(R_n)\bigr\| + \sum_{i=\mu+1}^{\nu}\bigl\|f_i^-(x),\, L_p(R_n)\bigr\|\Biggr) \quad (2.7)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f^+(x)$, $f^-(x)$ и k, а также установлена сходимость

$$\sum_{j=1}^{\mu}\bigl\|u_{k_1,j}^+(x) - u_{k_2,j}^+(x),\, W_{p,1}^{sr}(R_n)\bigr\|$$
$$+ \sum_{i=\mu+1}^{\nu}\bigl\|u_{k_1,i}^-(x) - u_{k_2,i}^-(x),\, W_{p,1}^{r}(R_n)\bigr\| \to 0, \quad k_1, k_2\to\infty. \quad (2.8)$$

Отсюда в силу полноты пространства $\prod\limits_{1}^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n) \times \prod\limits_{\mu+1}^{\nu} W_{p,1}^{r}(R_n)$ следует, что существует линейный непрерывный оператор

$$P: \prod_{1}^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} L_p(R_n) \;\to\; \prod_{1}^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} W_{p,1}^{r}(R_n),$$

определенный на финитных вектор-функциях по формуле

$$Pf(x) = \lim_{k\to\infty} P_k f(x), \quad f(x) = \begin{pmatrix} f^+(x) \\ f^-(x) \end{pmatrix},$$

и вектор-функция

$$u(x) = \begin{pmatrix} u^+(x) \\ u^-(x) \end{pmatrix} = Pf(x)$$

будет решением системы (1.2). Ввиду плотности множества финитных вектор-функций в $\prod\limits_{1}^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n) \times \prod\limits_{\mu+1}^{\nu} L_p(R_n)$ (см. [2]) по теореме о продолжении по непрерывности оператор P можно единственным образом продолжить на все пространство $\prod\limits_{1}^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n) \times \prod\limits_{\mu+1}^{\nu} L_p(R_n)$ с сохранением нормы. Для продолженного оператора будем использовать то же обозначение P.

Из неравенства (2.7) следует, что линейные операторы

$$P_k: \prod_{1}^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} L_p(R_n) \;\to\; \prod_{1}^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} W_{p,1}^{r}(R_n)$$

являются непрерывными и последовательность $\{\|P_k\|\}$ ограничена: $\|P_k\| \le c$. Следовательно, по теореме Банаха — Штейнгауза сходимость $P_k f(x) \to Pf(x)$ при $k \to \infty$ имеет место для любой вектор-функции $f(x)$:

$$f^+(x) \in \prod_{1}^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n), \quad f^-(x) \in \prod_{\mu+1}^{\nu} L_p(R_n).$$

Из сказанного выше вытекает существование решения $u(x)$ системы (1.2):

$$u^+(x) \in \prod_{1}^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n), \quad u^-(x) \in \prod_{\mu+1}^{\nu} W_{p,1}^{r}(R_n),$$

для любой правой части $f(x)$:

$$f^+(x) \in \prod_{1}^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n), \quad f^-(x) \in \prod_{\mu+1}^{\nu} L_p(R_n),$$

и для него выполняется оценка (1.5).

Единственность решения системы (1.2) в рассматриваемом пространстве при условии $|\alpha|/p > 1$ доказывается по аналогии с [1, 3].

Итак, линейный оператор

$$\mathscr{L}(D_x): \prod_{1}^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} W_{p,1}^{r}(R_n) \;\to\; \prod_{1}^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} L_p(R_n)$$

непрерывен, область его значений совпадает со всем пространством

$$\prod_{1}^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} L_p(R_n),$$

ядро нулевое, и оператор P является обратным. Тем самым оператор $\mathscr{L}(D_x)$ устанавливает изоморфизм.

Из проведенных рассуждений следует, что для полного доказательства теоремы 1 нужно получить оценку (2.7) и установить сходимость (2.8). Этим вопросам посвящен следующий параграф.

§ 3. Оценки приближенных решений

Для получения оценок приближенных решений системы (1.2) вектор-функции (2.5), (2.6) перепишем в следующем виде:

$$u_k^+(x) = u_k^{+,+}(x) + u_k^{+,-}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{R_n} e^{ix\xi} G(\xi v^\alpha)(v^{+,+}(\xi) + v^{+,-}(\xi))\, d\xi dv,$$

$$u_k^-(x) = u_k^{-,+}(x) + u_k^{-,-}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{R_n} e^{ix\xi} G(\xi v^\alpha)(v^{-,+}(\xi) + v^{-,-}(\xi)) d\xi dv,$$

где

$$v^{+,+}(\xi) = K^{-1}(I - L(i\xi)N_0^{-1}(\xi)M(i\xi)K^{-1})\hat{f}^+(\xi),$$

$$v^{+,-}(\xi) = K^{-1}L(i\xi)N_0^{-1}(\xi)\hat{f}^-(\xi), \quad v^{-,+}(\xi) = N_0^{-1}(\xi)M(i\xi)K^{-1}\hat{f}^+(\xi),$$

$$v^{-,-}(\xi) = N_0^{-1}(\xi)\hat{f}^-(\xi), \quad N_0(\xi) = M(i\xi)K^{-1}L(i\xi).$$

Вначале проведем оценки старших производных вектор-функций $u_k^+(x)$, $u_k^-(x)$.

Лемма 3.1. *Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta\alpha = s$. Тогда имеют место оценки*

$$\sum_{j=1}^{\mu} \big\| D_x^\beta u_{k,j}^{+,+}(x),\, L_p(R_n) \big\| \le c \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{\gamma\alpha = s} \big\| D_x^\gamma f_j^+(x),\, L_p(R_n) \big\|, \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{\mu} \big\| D_x^\beta u_{k,j}^{+,-}(x),\, L_p(R_n) \big\| \le c \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \big\| f_i^-(x),\, L_p(R_n) \big\| \tag{3.2}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f^+(x)$, $f^-(x)$ и k, при этом

$$\sum_{j=1}^{\mu} \big\| D_x^\beta u_{k_1,j}^+(x) - D_x^\beta u_{k_2,j}^+(x),\, L_p(R_n) \big\| \to 0, \quad k_1, k_2 \to \infty. \tag{3.3}$$

Доказательство. Из определения вектор-функции $u_k^{+,+}(x)$ имеем

$$D_x^\beta u_k^{+,+}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{R_n} e^{ix\xi} G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta v^{+,+}(\xi)\, d\xi dv$$

$$= (2\pi)^{-n} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{R_n} \biggl(\int\limits_{R_n} \exp(i(x-y)\xi) G(\xi v^{\alpha}) d\xi \biggr) F_{\beta}^{+}(y)\, dy dv, \quad (3.4)$$

где

$$F_{\beta}^{+}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R_n} \exp(iys)(is)^{\beta} K^{-1} \bigl(I - L(is) N_0^{-1}(s) M(s) K^{-1} \bigr) \hat{f}^{+}(s)\, ds.$$

В силу свойств представления (2.1) (см. [1, гл. 1]) получаем оценку

$$\sum_{j=1}^{\mu} \bigl\| D_x^{\beta} u_{k,j}^{+,+}(x),\, L_p(R_n) \bigr\| \le c \sum_{j=1}^{\mu} \bigl\| F_{\beta,j}^{+}(x),\, L_p(R_n) \bigr\|.$$

Согласно условиям 1–3 элементы матрицы $L(is)N_0^{-1}(s)M(is)$ однородны относительно вектора α степени 0. Тогда, поскольку $\beta\alpha = s$, используя теорему о мультипликаторах [15], приходим к неравенству

$$\sum_{j=1}^{\mu} \bigl\| F_{\beta,j}^{+}(x),\, L_p(R_n) \bigr\| \le c_{\beta} \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{\gamma\alpha = s} \bigl\| D_x^{\gamma} f_j^{+}(x),\, L_p(R_n) \bigr\|$$

с константой c_{β}, не зависящей от $f^{+}(x)$. Отсюда вытекает оценка (3.1).

Из определения вектор-функции $u_k^{+,-}(x)$ имеем

$$D_x^{\beta} u_k^{+,-}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{R_n} e^{ix\xi} G(\xi v^{\alpha}) (i\xi)^{\beta} v^{+,-}(\xi)\, d\xi dv$$

$$= (2\pi)^{-n} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{R_n} \biggl(\int\limits_{R_n} \exp(i(x-y)\xi) G(\xi v^{\alpha}) d\xi \biggr) F_{\beta}^{-}(y)\, dy dv, \quad (3.5)$$

где

$$F_{\beta}^{-}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R_n} \exp(iys)(is)^{\beta} K^{-1} L(is) N_0^{-1}(s) \hat{f}^{-}(s)\, ds.$$

Как и выше, из свойств представления (2.1) вытекает оценка

$$\sum_{j=1}^{\mu} \bigl\| D_x^{\beta} u_{k,j}^{+,-}(x),\, L_p(R_n) \bigr\| \le c \sum_{j=1}^{\mu} \bigl\| F_{\beta,j}^{-}(x),\, L_p(R_n) \bigr\|.$$

Из условий 1–3 следует

$$L(c^{\alpha} is) N_0^{-1}(c^{\alpha} s) = c^{-s} L(is) N_0^{-1}(s), \quad c > 0,$$

а поскольку $\beta\alpha = s$, в силу теоремы о мультипликаторах [15] имеем неравенство

$$\sum_{j=1}^{\mu} \bigl\| F_{\beta,j}^{-}(x),\, L_p(R_n) \bigr\| \le c_{\beta} \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \bigl\| f_i^{-}(x),\, L_p(R_n) \bigr\|$$

с константой c_{β}, не зависящей от $f^{-}(x)$. Отсюда приходим к оценке (3.2).

Из определения вектор-функции $u_k^{+}(x)$ в силу представления (2.1) и формул (3.4), (3.5) вытекает сходимость (3.3). Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta\alpha = 1$. Тогда имеют место оценки*

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu} \left\| D_x^\beta u_{k,i}^{-,+}(x),\, L_p(R_n) \right\| \le c \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{\gamma\alpha=s} \left\| D_x^\gamma f_j^+(x),\, L_p(R_n) \right\|, \tag{3.6}$$

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu} \left\| D_x^\beta u_{k,i}^{-,-}(x),\, L_p(R_n) \right\| \le c \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \left\| f_i^-(x),\, L_p(R_n) \right\| \tag{3.7}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f^+(x)$, $f^-(x)$ и k, при этом

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu} \left\| D_x^\beta u_{k_1,i}^-(x) - D_x^\beta u_{k_2,i}^-(x),\, L_p(R_n) \right\| \to 0, \quad k_1, k_2 \to \infty. \tag{3.8}$$

Доказательство. Из определения вектор-функции $u_k^{-,+}(x)$ имеем

$$\begin{aligned} D_x^\beta u_k^{-,+}(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{1/k}^{k} v^{-1} \int_{R_n} e^{ix\xi} G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta v^{-,+}(\xi)\, d\xi dv \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{1/k}^{k} v^{-1} \int_{R_n} \left(\int_{R_n} \exp(i(x-y)\xi) G(\xi v^\alpha)\, d\xi \right) \Phi_\beta^+(y)\, dy dv, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где

$$\Phi_\beta^+(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R_n} \exp(iys)(is)^\beta N_0^{-1}(s) M(is) K^{-1} \hat{f}^+(s)\, ds.$$

В силу свойств представления (2.1) получаем оценку

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu} \left\| D_x^\beta u_{k,i}^{-,+}(x),\, L_p(R_n) \right\| \le c \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \left\| \Phi_{\beta,i}^+(x),\, L_p(R_n) \right\|.$$

Из условий 1–3 следует равенство

$$N_0^{-1}(c^\alpha s) M(c^\alpha is) = c^{-1+s} N_0^{-1}(s) M(is), \quad c > 0,$$

а поскольку $\beta\alpha = 1$, используя теорему о мультипликаторах [15], приходим к неравенству

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu} \left\| \Phi_{\beta,i}^+(x),\, L_p(R_n) \right\| \le c_\beta \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{\gamma\alpha=s} \left\| D_x^\gamma f_j^+(x),\, L_p(R_n) \right\|$$

с константой c_β, не зависящей от $f^+(x)$. Отсюда вытекает оценка (3.6).

Из определения вектор-функции $u_k^{-,-}(x)$, очевидно, имеем

$$\begin{aligned} D_x^\beta u_k^{-,-}(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{1/k}^{k} v^{-1} \int_{R_n} e^{ix\xi} G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta v^{-,-}(\xi)\, d\xi dv \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{1/k}^{k} v^{-1} \int_{R_n} \left(\int_{R_n} \exp(i(x-y)\xi) G(\xi v^\alpha)\, d\xi \right) \Phi_\beta^-(y)\, dy dv, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где

$$\Phi^-_\beta(y) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R_n} \exp(iys)(is)^\beta N_0^{-1}(s)\hat{f}^-(s)\,ds.$$

Как и ранее, в силу свойств представления (2.1) получаем

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu} \bigl\| D_x^\beta u^{-}_{k,i}(x),\, L_p(R_n) \bigr\| \le c \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \bigl\| \Phi^-_{\beta,i}(x),\, L_p(R_n) \bigr\|.$$

Из условий 1–3 следует равенство

$$N_0^{-1}(c^\alpha s) = c^{-1} N_0^{-1}(s), \quad c > 0,$$

а поскольку $\beta\alpha = 1$, по теореме о мультипликаторах [15] имеем неравенство

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu} \|\Phi^-_{\beta,i}(x),\, L_p(R_n)\| \le c_\beta \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \|f^-_i(x),\, L_p(R_n)\|$$

с константой c_β, не зависящей от $f^-(x)$. Отсюда вытекает оценка (3.7).

Из определения вектор-функции $u_k^-(x)$ в силу представления (2.1) и формул (3.9), (3.10) следует сходимость (3.8). Лемма доказана.

Для получения оценок производных $D_x^\beta u_k^+(x)$, $0 \le \beta\alpha < s$, $D_x^\gamma u_k^-(x)$, $0 \le \gamma\alpha < 1$, рассмотрим функции

$$\mathscr{K}_h(x) = \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-1} \int\limits_{R_n} e^{ix\xi} G(\xi v^\alpha) k(\xi)\, d\xi dv, \quad 0 < h < 1, \tag{3.11}$$

где функция $k(\xi) \in C^\infty(R_n \backslash \{0\})$ однородная относительно вектора α с показателем однородности $q < 0$. Производные функции $k(\xi)$ удовлетворяют оценкам

$$\bigl| D_\xi^\beta k(\xi) \bigr| \le c_\beta \langle \xi \rangle^{q - \beta\alpha}, \quad \xi \ne 0, \tag{3.12}$$

где $c_\beta > 0$ — постоянные.

Следующая лемма является аналогом леммы 2 из [3].

Лемма 3.3. *Пусть $|\alpha| + q > 0$. Тогда существует m_0 такое, что если $m \ge m_0$ в определении (2.2) функции $G(\xi)$, то имеет место равномерная оценка*

$$\langle x \rangle^{|\alpha|+q} |\mathscr{K}_h(x)| \le c, \quad x \in R_n, \tag{3.13}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от h.

Доказательство. Учитывая однородность функции $k(\xi)$ относительно α, из определения (3.11) при $x \ne 0$ с помощью замены $v = \omega\langle x \rangle$ получаем

$$\langle x \rangle^{|\alpha|+q} \mathscr{K}_h(x) = \langle x \rangle^{|\alpha|+q} \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-q-1} \int\limits_{R_n} \exp\Bigl(i \frac{xs}{v^\alpha}\Bigr) G(s) k(s)\, ds dv$$

$$= \int\limits_{h\langle x \rangle^{-1}}^{(h\langle x \rangle)^{-1}} \omega^{-|\alpha|-q-1} \int\limits_{R_n} \exp\Bigl(i \frac{x's}{\omega^\alpha}\Bigr) G(s) k(s)\, ds d\omega, \quad x' = \frac{x}{\langle x \rangle^\alpha}.$$

Обозначим

$$K(z) = \int\limits_{R_n} \exp(izs) G(s) k(s)\, ds.$$

В силу условий на функцию $k(s)$ существует m_0 такое, что если в определении (2.2) $m \geq m_0$, то для функции $K(z)$ выполняется неравенство

$$|K(z)| \leq c^*(1 + \langle z \rangle)^{-|\alpha|}, \quad z \in R_n,$$

где $c^* > 0$ — некоторая константа, которую можно указать, используя константы $c_\beta > 0$ из (3.12). Следовательно,

$$\langle x \rangle^{|\alpha|+q} |\mathscr{K}_h(x)| \leq \int\limits_{h\langle x \rangle^{-1}}^{(h\langle x \rangle)^{-1}} \omega^{-|\alpha|-q-1} |K(x'/\omega^\alpha)|\, d\omega$$

$$\leq c^* \int\limits_0^\infty \omega^{-|\alpha|-q-1}(1 + \omega^{-1})^{-|\alpha|}\, d\omega \leq c^* \int\limits_0^1 \omega^{-q-1}\, d\omega + c^* \int\limits_1^\infty \omega^{-|\alpha|-q-1}\, d\omega.$$

Отсюда, поскольку $q < 0$, $|\alpha| + q > 0$, вытекает неравенство (3.13). Лемма доказана.

В дальнейшем мы будем иметь дело с интегралами вида (3.11) при $q \in [-1, 0]$. В этом случае, как следует из доказательства леммы 3.3, можно взять $m_0 = m_1$ (см. § 2).

Проведем теперь оценки остальных производных вектор-функций $u_k^+(x)$, $u_k^-(x)$.

Лемма 3.4. *Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta\alpha < s$ и $|\alpha|/p > 1$. Тогда имеют место неравенства*

$$\sum_{j=1}^{\mu} \big\| \langle x \rangle_s^{-(1-\beta\alpha/s)} D_x^\beta u_{k,j}^{+,+}(x),\, L_p(R_n) \big\| \leq c \sum_{j=1}^{\mu} \big\| f_j^+(x),\, W_{p,1}^{sr}(R_n) \big\|, \tag{3.14}$$

$$\sum_{j=1}^{\mu} \big\| \langle x \rangle_s^{-(1-\beta\alpha/s)} D_x^\beta u_{k,j}^{+,-}(x),\, L_p(R_n) \big\| \leq c \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \big\| f_i^-(x),\, L_p(R_n) \big\| \tag{3.15}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f^+(x)$, $f^-(x)$ и k, при этом

$$\sum_{j=1}^{\mu} \big\| (1 + \langle x \rangle_s)^{-(1-\beta\alpha/s)} \big(D_x^\beta u_{k_1,j}^+(x) - D_x^\beta u_{k_2,j}^+(x) \big),\, L_p(R_n) \big\| \to 0, \quad k_1, k_2 \to \infty. \tag{3.16}$$

Доказательство. Обозначим $r_l = 1/\alpha_l$. Из определения вектор-функции $u_k^{+,+}(x)$, очевидно, имеем

$$D_x^\beta u_k^{+,+}(x) = \sum_{l=1}^{n} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{R_n} e^{ix\xi} G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta \langle \xi \rangle^{-2} \xi_l^{2r_l} v^{+,+}(\xi)\, d\xi dv$$

$$= \sum_{l=1}^{n} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{R_n} e^{ix\xi} G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta \langle \xi \rangle^{-2} \xi_l^{(2-s)r_l} i^{-sr_l}$$

$$\times K^{-1}\big(I - L(i\xi)N_0^{-1}(\xi)M(i\xi)K^{-1}\big)\widehat{D_l^{sr_l} f^+}(\xi)\,d\xi dv$$

$$= \sum_{l=1}^{n}(2\pi)^{-n}\int\limits_{1/k}^{k} v^{-1}\int\limits_{R_n}\Bigg(\int\limits_{R_n} e^{i(x-y)\xi}G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta\langle\xi\rangle^{-2}\xi_l^{(2-s)r_l}i^{-sr_l}$$

$$\times K^{-1}\big(I - L(i\xi)N_0^{-1}(\xi)M(i\xi)K^{-1}\big)\,d\xi\Bigg)D_{y_l}^{sr_l} f^+(y)\,dydv. \quad (3.17)$$

Введем обозначение

$$\mathscr{K}_{k,l}(x) = \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1}\int\limits_{R_n} e^{ix\xi}G(\xi v^\alpha)k_l(\xi)\,d\xi dv,$$

$$k_l(\xi) = (i\xi)^\beta\langle\xi\rangle^{-2}\xi_l^{(2-s)r_l}i^{-sr_l}K^{-1}\big(I - L(i\xi)N_0^{-1}(\xi)M(i\xi)K^{-1}\big). \quad (3.18)$$

Тогда

$$D_x^\beta u_k^{+,+}(x) = \sum_{l=1}^{n}(2\pi)^{-n}\int\limits_{R_n}\mathscr{K}_{k,l}(x-y)D_{y_l}^{sr_l} f^+(y)\,dy.$$

Как уже отмечалось, элементы матрицы $L(is)N_0^{-1}(s)M(is)$ однородны относительно вектора α степени 0. Поэтому все элементы матрицы $k_l(\xi)$ однородны относительно вектора α с показателем однородности $q = \beta\alpha - s < 0$. Поскольку $|\alpha|/p > 1$, $1 > s > 0$, $\beta\alpha \geq 0$, то $|\alpha| + q > 0$. Следовательно, применяя лемму 3.3, получим неравенство

$$\sum_{j=1}^{\mu}\big\|\langle x\rangle_s^{-(1-\beta\alpha/s)}D_x^\beta u_{k,j}^{+,+}(x), L_p(R_n)\big\|$$

$$\leq c\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{l=1}^{n}\Bigg\|\langle x\rangle^q\int\limits_{R_n}\langle x-y\rangle^{-|\alpha|-q}\big|D_{y_l}^{sr_l} f_j^+(y)\big|\,dy, L_p(R_n)\Bigg\|$$

$$\leq c'\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{l=1}^{n}\Bigg\|\int\limits_{R_n}\prod_{i=1}^{n}|x_i|^{q/|\alpha|}|x_i - y_i|^{-1-q/|\alpha|}\big|D_{y_l}^{sr_l} f_j^+(y)\big|\,dy,\ L_p(R_n)\Bigg\|.$$

Из условий леммы имеем $1/p > -q/|\alpha| > 0$, поэтому в силу неравенства Харди — Литтлвуда [16] получаем оценку (3.14).

Докажем (3.15). Из определения вектор-функции $u_k^{+,-}(x)$ имеем

$$D_x^\beta u_k^{+,-}(x) = (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{1/k}^{k} v^{-1}\int\limits_{R_n} e^{ix\xi}G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta K^{-1}L(i\xi)N_0^{-1}(\xi)\widehat{f^-}(\xi)\,d\xi dv$$

$$= (2\pi)^{-n}\int\limits_{1/k}^{k} v^{-1}\int\limits_{R_n}\Bigg(\int\limits_{R_n} e^{i(x-y)\xi}G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta K^{-1}L(i\xi)N_0^{-1}(\xi)\,d\xi\Bigg)f^-(y)\,dydv.$$

Ввиду условий 1–3 все элементы матрицы $(i\xi)^\beta K^{-1}L(i\xi)N_0^{-1}(\xi)$ однородны относительно вектора α с показателем однородности $q = \beta\alpha - s < 0$. Поэтому по аналогии с предыдущим имеем оценку

$$\sum_{j=1}^{\mu}\big\|\langle x\rangle_s^{-(1-\beta\alpha/s)}D_x^\beta u_{k,j}^{+,-}(x), L_p(R_n)\big\|$$

$$\leq c' \sum_{l=\mu+1}^{\nu} \Big\| \int\limits_{R_n} \prod_{i=1}^{n} |x_i|^{q/|\alpha|} |x_i - y_i|^{-1-q/|\alpha|} |f_l^-(y)|\, dy,\, L_p(R_n) \Big\|,$$

и в силу неравенства Харди — Литтлвуда получим оценку (3.15).

Для доказательства сходимости (3.16) нужно установить, что для любого $j = 1, \dots, \mu$ имеют место сходимости

$$\big\|(1+\langle x\rangle_s)^{-(1-\beta\alpha/s)}\big(D_x^\beta u_{k_1,j}^{+,+}(x) - D_x^\beta u_{k_2,j}^{+,+}(x)\big),\, L_p(R_n)\big\| \to 0, \tag{3.19}$$

$$\big\|(1+\langle x\rangle_s)^{-(1-\beta\alpha/s)}\big(D_x^\beta u_{k_1,j}^{+,-}(x) - D_x^\beta u_{k_2,j}^{+,-}(x)\big),\, L_p(R_n)\big\| \to 0 \tag{3.20}$$

при $k_1, k_2 \to \infty$.

Докажем (3.19). В силу представления (3.17) и обозначения (3.18) для матрицы $k_l(\xi) = (k_l^{j,i}(\xi))$ достаточно рассмотреть функцию

$$w_k(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{R_n} \bigg(\int\limits_{R_n} e^{i(x-y)\xi} G(\xi v^\alpha) k_l^{j,i}(\xi)\, d\xi \bigg) D_{y_l}^{sr_l} f_i^+(y)\, dy dv$$

и доказать сходимость

$$\|(1+\langle x\rangle_s)^{-(1-\beta\alpha/s)}(w_{k_1}(x) - w_{k_2}(x)),\, L_p(R_n)\| \to 0, \quad k_1, k_2 \to \infty. \tag{3.21}$$

Имеем

$$\|(1+\langle x\rangle_s)^{-(1-\beta\alpha/s)}(w_{k_1}(x) - w_{k_2}(x)),\, L_p(R_n)\|$$
$$\leq \bigg| \int\limits_{1/k_1}^{1/k_2} v^{-1} \bigg\| (1+\langle x\rangle_s)^{-(1-\beta\alpha/s)} \int\limits_{R_n} \bigg(\int\limits_{R_n} e^{i(x-y)\xi} G(\xi v^\alpha) k_l^{j,i}(\xi)\, d\xi \bigg)$$
$$\times D_{y_l}^{sr_l} f_i^+(y)\, dy,\, L_p(R_n) \bigg\|\, dv \bigg| + \bigg| \int\limits_{k_1}^{k_2} v^{-1} \bigg\| (1+\langle x\rangle_s)^{-(1-\beta\alpha/s)}$$
$$\times \int\limits_{R_n} \bigg(\int\limits_{R_n} e^{i(x-y)\xi} G(\xi v^\alpha) k_l^{j,i}(\xi)\, d\xi \bigg) D_{y_l}^{sr_l} f_i^+(y)\, dy,\, L_p(R_n) \bigg\|\, dv \bigg| = I_{k_1,k_2}^1 + I_{k_1,k_2}^2.$$

Рассмотрим первое слагаемое. Поскольку функции $k_l^{j,i}(\xi)$ однородны относительно вектора α с показателем однородности $q = \beta\alpha - s < 0$, то, применяя неравенство Юнга, имеем

$$I_{k_1,k_2}^1 \leq \bigg| \int\limits_{1/k_1}^{1/k_2} v^{-1} \bigg\| \int\limits_{R_n} \bigg(\int\limits_{R_n} e^{i(x-y)\xi} G(\xi v^\alpha) k_l^{j,i}(\xi)\, d\xi \bigg) D_{y_l}^{sr_l} f_i^+(y)\, dy,\, L_p(R_n) \bigg\|\, dv \bigg|$$
$$\leq \bigg| \int\limits_{1/k_1}^{1/k_2} v^{-1} \bigg\| \int\limits_{R_n} e^{ix\xi} G(\xi v^\alpha) k_l^{j,i}(\xi)\, d\xi,\, L_1(R_n) \bigg\|\, dv \bigg| \big\| D_{y_l}^{sr_l} f_i^+(y),\, L_p(R_n) \big\|$$
$$= \bigg| \int\limits_{1/k_1}^{1/k_2} v^{-1-q}\, dv \bigg| \bigg\| \int\limits_{R_n} e^{ix\xi} G(\xi) k_l^{j,i}(\xi)\, d\xi,\, L_1(R_n) \bigg\| \big\| D_{y_l}^{sr_l} f_i^+(y),\, L_p(R_n) \big\|.$$

Учитывая, что $q<0$, получаем

$$I^1_{k_1,k_2}\to 0,\quad k_1,k_2\to\infty.$$

Рассмотрим второе слагаемое $I^2_{k_1,k_2}$. Используя неравенства

$$\langle x-y\rangle(1+\langle x\rangle)^{-1}\le a(1+\langle y\rangle),\quad \langle x\rangle_s^{-(1-\beta\alpha/s)}\le a\langle x\rangle^q,\quad q=\beta\alpha-s<0,$$

имеем

$$I^2_{k_1,k_2}\le\left|\int\limits_{k_1}^{k_2}v^{-1}\left\|(1+\langle x\rangle)^q\int\limits_{R_n}\left(\int\limits_{R_n}e^{i(x-y)\xi}G(\xi v^\alpha)k_l^{j,i}(\xi)\,d\xi\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\times D^{sr_l}_{y_l}f_i^+(y)\,dy,\,L_p(R_n)\right\|\,dv\right|\le c\left|\int\limits_{k_1}^{k_2}v^{-1}\right\|\int\limits_{R_n}\langle x-y\rangle^q$$

$$\times\left|\int\limits_{R_n}e^{i(x-y)\xi}G(\xi v^\alpha)k_l^{j,i}(\xi)\,d\xi\right|(1+\langle y\rangle)^{-q}\left|D^{sr_l}_{y_l}f_i^+(y)\right|dy,\,L_p(R_n)\left\|\,dv\right|.$$

Применяя неравенство Юнга и учитывая однородность функций $k_l^{j,i}(\xi)$ относительно вектора α с показателем однородности q, получим

$$I^2_{k_1,k_2}\le c\left|\int\limits_{k_1}^{k_2}v^{-1}\left\|\langle x\rangle^q\int\limits_{R_n}e^{ix\xi}G(\xi v^\alpha)k_l^{j,i}(\xi)\,d\xi,\,L_p(R_n)\right\|\,dv\right|$$

$$\times\left\|(1+\langle y\rangle)^{-q}\left|D^{sr_l}_{y_l}f_i^+(y)\right|,\,L_1(R_n)\right\|=c\left|\int\limits_{k_1}^{k_2}v^{-1-|\alpha|/p'}\,dv\right|$$

$$\times\left\|\langle x\rangle^q\int\limits_{R_n}e^{ix\xi}G(\xi)k_l^{j,i}(\xi)\,d\xi,\,L_p(R_n)\right\|\left\|(1+\langle y\rangle)^{-q}\left|D^{sr_l}_{y_l}f_i^+(y)\right|,\,L_1(R_n)\right\|.$$

Поскольку

$$|\alpha|/p'>0,\quad |\alpha|/p>1,\quad 1>-q>0,$$

и функции $f_i^+(y)$ финитные, то

$$I^2_{k_1,k_2}\to 0,\quad k_1,k_2\to\infty.$$

Из проведенных рассуждений вытекает (3.21) и, следовательно, (3.19). Аналогичным образом доказывается (3.20).

Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Пусть $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$, $\beta\alpha<1$ и $|\alpha|/p>1$. Тогда имеют место неравенства*

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu}\left\|\langle x\rangle^{-(1-\beta\alpha)}D_x^\beta u^{-,+}_{k,i}(x),\,L_p(R_n)\right\|\le c\sum_{j=1}^{\mu}\|f_j^+(x),\,W^{sr}_{p,1}(R_n)\|,\tag{3.22}$$

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu}\left\|\langle x\rangle^{-(1-\beta\alpha)}D_x^\beta u^{-,-}_{k,i}(x),\,L_p(R_n)\right\|\le c\sum_{i=\mu+1}^{\nu}\left\|f_i^-(x),\,L_p(R_n)\right\|\tag{3.23}$$

с константой $c>0$, не зависящей от $f^+(x)$, $f^-(x)$ и k, при этом

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu}\left\|(1+\langle x\rangle)^{-(1-\beta\alpha)}\left(D_x^\beta u^-_{k_1,i}(x)-D_x^\beta u^-_{k_2,i}(x)\right),\,L_p(R_n)\right\|\to 0,\quad k_1,k_2\to\infty. \tag{3.24}$$

Доказательство. Из определения вектор-функции $u_k^{-,+}(x)$ имеем

$$D_x^\beta u_k^{-,+}(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{1/k}^{k}v^{-1}\int\limits_{R_n}e^{ix\xi}G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta N_0^{-1}(\xi)(M(i\xi)K^{-1}f^+(\xi))\,d\xi dv$$

$$=(2\pi)^{-n}\int\limits_{1/k}^{k}v^{-1}\int\limits_{R_n}\biggl(\int\limits_{R_n}e^{i(x-y)\xi}G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta N_0^{-1}(\xi)\,d\xi\biggr)M(D_y)K^{-1}f^+(y)\,dydv.$$

Как уже отмечалось, из условий 1–3 следует, что $N_0^{-1}(c^\alpha\xi)=c^{-1}N_0^{-1}(\xi)$, $c>0$, поэтому все элементы матрицы $(i\xi)^\beta N_0^{-1}(\xi)$ однородны относительно вектора α с показателем однородности $q=\beta\alpha-1<0$. Поскольку $|\alpha|/p>1$, $1>\beta\alpha\geq 0$, то $|\alpha|+q>0$. Следовательно, применяя лемму 3.3 и учитывая условие 2, получим

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu}\left\|\langle x\rangle^{-(1-\beta\alpha)}D_x^\beta u^{-,+}_{k,i}(x),L_p(R_n)\right\|$$

$$\leq c\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{\gamma\alpha=s}\biggl\|\langle x\rangle^q\int\limits_{R_n}\langle x-y\rangle^{-|\alpha|-q}\bigl|D_y^\gamma f_j^+(y)\bigr|\,dy,\,L_p(R_n)\biggr\|$$

$$\leq c'\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{\gamma\alpha=s}\biggl\|\int\limits_{R_n}\prod_{i=1}^{n}|x_i|^{q/|\alpha|}|x_i-y_i|^{-1-q/|\alpha|}\bigl|D_y^\gamma f_j^+(y)\bigr|\,dy,\,L_p(R_n)\biggr\|.$$

Из условий леммы имеем $1/p>-q/|\alpha|>0$, поэтому в силу неравенства Харди — Литтлвуда получаем оценку (3.22).

Докажем (3.23). Из определения вектор-функции $u_k^{-,-}(x)$ выводим

$$D_x^\beta u_k^{-,-}(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{1/k}^{k}v^{-1}\int\limits_{R_n}e^{ix\xi}G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta N_0^{-1}(\xi)f^-(\xi)\,d\xi dv$$

$$=(2\pi)^{-n}\int\limits_{1/k}^{k}v^{-1}\int\limits_{R_n}\biggl(\int\limits_{R_n}e^{i(x-y)\xi}G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta N_0^{-1}(\xi)\,d\xi\biggr)f^-(y)\,dydv.$$

Поскольку все элементы матрицы $(i\xi)^\beta N_0^{-1}(\xi)$ однородны относительно вектора α с показателем однородности $q=\beta\alpha-1<0$, то, как и выше, применяя лемму 3.3, получим

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu}\left\|\langle x\rangle^{-(1-\beta\alpha)}D_x^\beta u^{-,-}_{k,i}(x),L_p(R_n)\right\|$$

$$\leq c\sum_{i=\mu+1}^{\nu}\biggl\|\langle x\rangle^q\int\limits_{R_n}\langle x-y\rangle^{-|\alpha|-q}|f_i^-(y)|\,dy,\,L_p(R_n)\biggr\|$$

$$\leq c' \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \left\| \int\limits_{R_n} \prod_{i=1}^{n} |x_i|^{q/|\alpha|} |x_i - y_i|^{-1-q/|\alpha|} |f_i^-(y)|\, dy,\, L_p(R_n) \right\|.$$

Отсюда в силу неравенства Харди — Литтлвуда вытекает (3.23).

Доказательство (3.24) проводится точно так же, как (3.16). Лемма доказана.

Из доказанных лемм непосредственно следуют оценка (2.7) и сходимость (2.8) для приближенных решений системы (1.2), на которые мы опирались в § 2, доказывая теорему 1.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Из доказательства теоремы 1 следует, что нам достаточно оценить соответствующие производные вектор-функций $u_k^+(x)$, $u_k^-(x)$.

Лемма 4.1. *Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta\alpha = l + s$. Тогда имеют место оценки*

$$\sum_{j=1}^{\mu} \left\| D_x^\beta u_{k,j}^{+,+}(x),\, L_p(R_n) \right\| \leq c \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{\gamma\alpha = l+s} \left\| D_x^\gamma f_j^+(x),\, L_p(R_n) \right\|, \tag{4.1}$$

$$\sum_{j=1}^{\mu} \left\| D_x^\beta u_{k,j}^{+,-}(x),\, L_p(R_n) \right\| \leq c \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \sum_{\gamma\alpha = l} \left\| D_x^\gamma f_i^-(x),\, L_p(R_n) \right\| \tag{4.2}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f^+(x)$, $f^-(x)$ и k, при этом

$$\sum_{j=1}^{\mu} \left\| D_x^\beta u_{k_1,j}^+(x) - D_x^\beta u_{k_2,j}^+(x),\, L_p(R_n) \right\| \to 0, \quad k_1, k_2 \to \infty. \tag{4.3}$$

Доказательство. Для производных $D_x^\beta u_k^{+,+}(x)$ справедливо представление (3.4). Поскольку элементы матрицы $L(is)N_0^{-1}(s)M(is)$ однородны относительно вектора α с нулевым показателем однородности и $\beta\alpha = l + s$, то, используя теорему о мультипликаторах [15], по аналогии с доказательством леммы 3.1 получаем неравенство (4.1).

Для производных $D_x^\beta u_k^{+,-}(x)$ справедливо представление (3.5). Как уже отмечалось, элементы матрицы $L(is)N_0^{-1}(s)$ однородны относительно вектора α с показателем однородности $-s$, а поскольку $\beta\alpha = l + s$, в силу теоремы о мультипликаторах [15] имеем неравенство

$$\sum_{j=1}^{\mu} \left\| F_{\beta,j}^-(x),\, L_p(R_n) \right\| \leq c_\beta \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \sum_{\gamma\alpha = l} \left\| D_x^\gamma f_i^-(x),\, L_p(R_n) \right\|$$

с константой c_β, не зависящей от $f^-(x)$. Отсюда получаем (4.2).

Из определения вектор-функции $u_k^+(x)$ в силу представления (2.1) и формул (3.4), (3.5) вытекает сходимость (4.3). Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta\alpha = l + 1$. Тогда имеют место оценки*

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu} \left\| D_x^\beta u_{k,i}^{-,+}(x),\, L_p(R_n) \right\| \leq c \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{\gamma\alpha = l+s} \left\| D_x^\gamma f_j^+(x),\, L_p(R_n) \right\|, \tag{4.4}$$

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu} \left\| D_x^\beta u_{k,i}^{-,-}(x),\, L_p(R_n) \right\| \leq c \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \sum_{\gamma\alpha=l} \left\| D_x^\gamma f_i^-(x),\, L_p(R_n) \right\| \tag{4.5}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f^+(x)$, $f^-(x)$ и k, при этом

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu} \left\| D_x^\beta u_{k_1,i}^-(x) - D_x^\beta u_{k_2,i}^-(x),\, L_p(R_n) \right\| \to 0, \quad k_1, k_2 \to \infty. \tag{4.6}$$

Доказательство. Для производных $D_x^\beta u_k^{-,+}(x)$ справедливо представление (3.9). Как отмечалось, элементы матрицы $N_0^{-1}(s)M(is)$ однородны относительно вектора α с показателем однородности $s-1$. По условию $\beta\alpha = l+1$, поэтому из теоремы о мультипликаторах [15] выводим неравенство

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu} \left\| \Phi_{\beta,i}^+(x),\, L_p(R_n) \right\| \leq c_\beta \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{\gamma\alpha=l+s} \left\| D_x^\gamma f_j^+(x),\, L_p(R_n) \right\|$$

с константой c_β, не зависящей от $f^+(x)$. Отсюда по аналогии с доказательством леммы 3.2 получаем оценку (4.4).

Для производных $D_x^\beta u_k^{-,-}(x)$ справедливо представление (3.10). Элементы матрицы $N_0^{-1}(s)$ однородны относительно вектора α с показателем однородности -1. Поскольку $\beta\alpha = l+1$, то в силу теоремы о мультипликаторах [15] имеем оценку

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu} \|\Phi_{\beta,i}^-(x),\, L_p(R_n)\| \leq c_\beta \sum_{i=\mu+1}^{\mu} \sum_{\gamma\alpha=l} \|D_x^\gamma f_i^-(x),\, L_p(R_n)\|$$

с константой c_β, не зависящей от $f^-(x)$. Отсюда получаем неравенство (4.5).

Из определения вектор-функции $u_k^-(x)$ в силу представления (2.1) и формул (3.9), (3.10) вытекает сходимость (4.6). Лемма доказана.

В § 2 доказано существование решения $u(x)$ системы (1.2) в пространстве (1.3), при этом

$$\sum_{j=1}^{\mu} \left\| u_k^+(x) - u^+(x),\, W_{p,1}^{sr}(R_n) \right\| + \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \left\| u_k^-(x) - u^-(x),\, W_{p,1}^{r}(R_n) \right\| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Из леммы 4.1, 4.2 следует, что решение имеет обобщенные производные:

$$D_x^\beta u^+(x) \in \prod_1^{\mu} W_p^{lr}(R_n), \quad \beta\alpha = s, \quad D_x^\gamma u^-(x) \in \prod_{\mu+1}^{\nu} W_p^{lr}(R_n), \quad \gamma\alpha = 1.$$

Теорема доказана.

§ 5. Приложение к системам соболевского типа

В этом параграфе, опираясь на теорему об изоморфизме оператора $\mathscr{L}(D_x)$, мы докажем теорему 3.

По аналогии с [1, гл. 3] перепишем задачу Коши (1.6) в эквивалентном виде:

$$KD_t u^+ + K_1 u^+ + L(D_x) D_t \left(\int_0^t u^- ds \right) = f^+(t,x),$$

$$M(D_x)u^+ = f^-(t,x), \quad t>0,\ x\in R_n, \quad u^+|_{t=0} = u_0^+(x).$$

Учитывая условия теоремы 3, эту задачу можно переписать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} K & L(D_x) \\ M(D_x) & 0 \end{pmatrix} D_t \begin{pmatrix} u^+ \\ \int_0^t u^- ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^+ \\ \int_0^t u^- ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^+(t,x) \\ D_t f^-(t,x) \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{pmatrix} u^+ \\ \int_0^t u^- ds \end{pmatrix}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} u_0^+(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда в силу теоремы 1 вытекает однозначная разрешимость задачи (1.6) и можно получить явную формулу решения. Действительно, применяя обратный оператор $(\mathscr{L}(D_x))^{-1}$, задачу Коши можно переписать в виде

$$D_t \begin{pmatrix} u^+ \\ \int_0^t u^- ds \end{pmatrix} + (\mathscr{L}(D_x))^{-1} \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^+ \\ \int_0^t u^- ds \end{pmatrix} = (\mathscr{L}(D_x))^{-1} \begin{pmatrix} f^+(t,x) \\ D_t f^-(t,x) \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{pmatrix} u^+ \\ \int_0^t u^- ds \end{pmatrix}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} u_0^+(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ввиду теоремы 1 линейный оператор

$$\mathscr{B} = (\mathscr{L}(D_x))^{-1} \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$: \prod_1^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} W_{p,1}^{r}(R_n) \ \to\ \prod_1^{\mu} W_{p,1}^{sr}(R_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} W_{p,1}^{r}(R_n)$$

непрерывен. Следовательно, задача Коши однозначно разрешима в указанных классах, и решение можно записать в виде (см., например, [17])

$$\begin{pmatrix} u^+(t,x) \\ \int_0^t u^-(s,x) ds \end{pmatrix} = e^{-t\mathscr{B}} \begin{pmatrix} u_0^+(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{-(t-s)\mathscr{B}} (\mathscr{L}(D_x))^{-1} \begin{pmatrix} f^+(s,x) \\ D_s f^-(s,x) \end{pmatrix} ds.$$

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. *Демиденко Г. В.* О весовых соболевских пространствах и интегральных операторах, определяемых квазиэллиптическими уравнениями // Докл. РАН. 1994. Т. 334, № 4. С. 420–423.
3. *Демиденко Г. В.* О квазиэллиптических операторах в R_n // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1028–1037.
4. *Кудрявцев Л. Д.* Теоремы вложения для классов функций, определенных на всем пространстве или полупространстве // I: Мат. сб. 1966. Т. 69, N 4. С. 616–639; II: Мат. сб. 1966. Т. 70, N 1. С. 3–35.
5. *Кудрявцев Л. Д., Никольский С. М.* Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 26. С. 5–157. (Итоги науки и техники).
6. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.

7. *Масленникова В. Н.* Оценки в L_p и асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для системы Соболева // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1968. Т. 103. С. 117–141.
8. *Cantor M.* Elliptic operators and the decomposition of tensor fields // Bull. Amer. Math. Soc. 1981. V. 5, N 3. P. 235–262.
9. *Choquet-Bruhat Y., Christodoulou D.* Elliptic systems in $H_{s,\sigma}$ spaces on manifolds which are Euclidean at infinity // Acta Math. 1981. V. 146, N 1/2. P. 129–150.
10. *Lockhart R. B., McOwen R. C.* Elliptic differential operators on noncompact manifolds // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1985. V. 12, N 3. P. 409–447.
11. *Amrouche C., Girault V., Giroire J.* Espaces de Sobolev avec poids et equation de Laplace dans R^n (partie I) // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. 1992. V. 315. P. 269–274.
12. *Hile G. N., Mawata C. P.* The behavior of the heat operator on weighted Sobolev spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1998. V. 350, N 4. P. 1407–1428.
13. *Демиденко Г. В.* Изоморфные свойства одного класса дифференциальных операторов // Четвертый сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике, посвященный памяти М. А. Лаврентьева. Тез. докл. Ч. 1. Новосибирск: Ин-т математики РАН, 2000. С. 123–124.
14. *Успенский С. В.* О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов // Тр. Мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. 1972. Т. 117. С. 292–299.
15. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. 1969. Т. 105. С. 89–167.
16. *Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. П.* Неравенства. М.: Изд–во иностр. лит., 1948.
17. *Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

Статья поступила 2 февраля 2001 г.

Демиденко Геннадий Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
demidenk@math.nsc.ru