Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2002. Том 43, № 2

УДК 517.95

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДВУХ ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Н. И. Иванчов, Н. В. Пабыривска

Аннотация: Рассматривается обратная задача для одномерного параболического уравнения, в котором неизвестны зависящие от времени коэффициенты при производных по пространственной переменной. Установлены условия существования решения на некотором промежутке времени, длина которого зависит от исходных данных задачи. Единственность решения имеет место на всем промежутке времени. Библиогр. 9.

Обратные задачи одновременного определения нескольких неизвестных коэффициентов в параболических уравнениях в различных постановках исследовались в ряде работ. В случае, когда неизвестные коэффициенты являются функциями пространственных переменных, установлены условия существования и единственности решения [1]. Для задач нелинейной теплопроводности исследована единственность решения в случаях, когда неизвестными являются два старших коэффициента [2, 3] или старший и младший коэффициенты [4]. Вопросам единственности решения посвящена также работа [5], в которой неизвестными являются зависящие от времени старшие коэффициенты многомерного параболического уравнения без младших членов. Условия существования и единственности решения обратной задачи для одномерного уравнения теплопроводности с неизвестными зависящими от времени старшими коэффициентами установлены в [6]. Аналогичный результат для многослойной среды получен в работе [7].

В данной работе рассматривается задача одновременного определения зависящих от времени старшего и младшего коэффициентов в одномерном параболическом уравнении. Установлено существование решения на некотором промежутке времени, размеры которого определяются известными величинами, единственность же решения имеет место в целом.

1. Постановка задачи. В области $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим параболическое уравнение

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

с неизвестными коэффициентами $a(t)$ и $b(t)$. Зададим начальное условие

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le h, \tag{2}$$

краевые условия и условия переопределения

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(h,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(0,t) = \nu_1(t), \quad u(h,t) = \nu_2(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{4}$$

Определение. *Решением обратной задачи* (1)–(4) назовем тройку функций $(a(t), b(t),\ u(x,t))$ из класса $(H^{\gamma/2}[0,T])^2 \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{\Omega}_T), 0 < \gamma < 1$ [8, с. 16], которые удовлетворяют условиям (1)–(4), при этом $a(t) > 0$ на промежутке $[0,T]$.

2. Существование решения.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\varphi(x) \in H^{2+\gamma}[0,h]$, $\nu_i(t), \mu_i(t) \in H^{1+\gamma/2}[0,T]$, $i = 1, 2$, $c(x,t), f(x,t), c_x(x,t), f_x(x,t) \in H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{\Omega}_T)$;

2) $(\nu_1'(t) - f(0,t) - c(0,t)\nu_1(t))\mu_2(t) - (\nu_2'(t) - f(h,t) - c(h,t)\nu_2(t))\mu_1(t) > 0$, $\mu_1(t) \le 0$, $\mu_2(t) \ge 0$, $\mu_2(t) - \mu_1(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $\varphi''(x) > 0$, $x \in [0,h]$;

3) $\nu_1(0) = \varphi(0)$, $\nu_2(0) = \varphi(h)$, $\mu_1(0) = \varphi'(0)$, $\mu_2(0) = \varphi'(h)$.

Тогда существует решение задачи (1)–(4) *при* $x \in [0,h]$, $t \in [0,t_0]$, *где число* t_0, $0 < t_0 \le T$, *определяется исходными данными задачи.*

Доказательство. Пусть $(a(t), b(t), u(x,t))$ — решение задачи (1)–(4) в смысле данного выше определения. Из условия 1 теоремы и принадлежности $u(x,t)$ классу $H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{\Omega}_T)$ следует существование пределов всех входящих в уравнение (1) выражений при $x \to +0$ и $x \to h-0$. Переходя в уравнении (1) к пределам при $x \to +0$ и $x \to h-0$ и используя условия (3), (4), приходим к следующим равенствам:

$$\nu_1'(t) = a(t)u_{xx}(0,t) + b(t)\mu_1(t) + c(0,t)\nu_1(t) + f(0,t),$$

$$\nu_2'(t) = a(t)u_{xx}(h,t) + b(t)\mu_2(t) + c(h,t)\nu_2(t) + f(h,t).$$

Введем обозначение $w(x,t) = u_{xx}(x,t)$. Покажем, что при выполнении условий теоремы полученные равенства на некотором промежутке $[0,t_0]$ можно привести к виду

$$a(t) = ((\nu_1'(t) - f(0,t) - c(0,t)\nu_1(t))\mu_2(t) - (\nu_2'(t) - f(h,t) - c(h,t)\nu_2(t))\mu_1(t))(\mu_2(t)w(0,t) - \mu_1(t)w(h,t))^{-1}, \quad (5)$$

$$b(t) = (\nu_2'(t) - f(h,t) - c(h,t)\nu_2(t) - \nu_1'(t) + f(0,t) + c(0,t)\nu_1(t) + a(t)(w(0,t) - w(h,t)))(\mu_2(t) - \mu_1(t))^{-1}. \quad (6)$$

Для этого достаточно установить, что

$$\mu_2(t)w(0,t) - \mu_1(t)w(h,t) \ne 0, \quad t \in [0,t_0]. \quad (7)$$

Обозначим

$$G_k(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) + (-1)^k \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right), \quad k = 1, 2, \qquad \theta(t) = \int_0^t a(\tau)\,d\tau.$$

Легко видеть, что $G_k(x,t,\xi,\tau)$ является функцией Грина для уравнения теплопроводности $u_t = a(t)u_{xx}$ с краевыми условиями (4) при $k = 1$ и условиями (3) при $k = 2$. Положим $v(x,t) = u_x(x,t)$. Дифференцируя уравнение (1) и условие (2) по x и используя (3), находим, что функция $v(x,t)$ будет решением следующей задачи:

$$v_t = a(t)v_{xx} + b(t)v_x + c(x,t)v + c_x(x,t)u + f_x(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \quad (8)$$

$$v(x,0)=\varphi'(x), \quad 0\le x\le h, \tag{9}$$

$$v(0,t)=\mu_1(t), \quad v(h,t)=\mu_2(t), \quad 0\le t\le T. \tag{10}$$

При помощи соответствующих функций Грина сведем задачи (1)–(3) и (8)–(10) к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$u(x,t)=u_0(x,t)+\int_0^t\int_0^h (b(\tau)v(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))G_2(x,t,\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \tag{11}$$

$$v(x,t)=v_0(x,t)+\int_0^t\int_0^h (b(\tau)w(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+c_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau))G_1(x,t,\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \tag{12}$$

где

$$u_0(x,t)=\int_0^h \varphi(\xi)G_2(x,t,\xi,0)\,d\xi+\int_0^t\int_0^h f(\xi,\tau)G_2(x,t,\xi,\tau)\,d\xi d\tau$$
$$-\int_0^t \mu_1(\tau)a(\tau)G_2(x,t,0,\tau)\,d\tau+\int_0^t \mu_2(\tau)a(\tau)G_2(x,t,h,\tau)\,d\tau, \tag{13}$$

$$v_0(x,t)=\int_0^h \varphi'(\xi)G_1(x,t,\xi,0)\,d\xi+\int_0^t\int_0^h f_\xi(\xi,\tau)G_1(x,t,\xi,\tau)\,d\xi d\tau$$
$$+\int_0^t \nu_1(\tau)a(\tau)G_{1\xi}(x,t,0,\tau)\,d\tau-\int_0^t \nu_2(\tau)a(\tau)G_{1\xi}(x,t,h,\tau)\,d\tau. \tag{14}$$

Чтобы найти $w(x,t)$, продифференцируем (12) по x:

$$w(x,t)=v_{0x}(x,t)+\int_0^t\int_0^h (b(\tau)w(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+c_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau))G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\,d\xi d\tau. \tag{15}$$

При помощи интегрирования по частям представим выражение $v_{0x}(x,t)$ в виде

$$v_{0x}(x,t)=\int_0^h \varphi''(\xi)G_2(x,t,\xi,0)\,d\xi+\int_0^t\int_0^h f_\xi(\xi,\tau)G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\,d\xi d\tau$$
$$-\int_0^t \mu_1'(\tau)G_2(x,t,0,\tau)\,d\tau+\int_0^t \mu_2'(\tau)G_2(x,t,h,\tau)\,d\tau. \tag{16}$$

Легко проверить, что

$$\int_0^h \varphi''(\xi)G_2(x,t,\xi,0)\,d\xi\ge\min_{[0,h]}\varphi''(x)>0. \tag{17}$$

С учетом (17) из (15), (16) вытекает существование некоторого промежутка $[0, t_0]$, $0 < t_0 \le T$, на котором

$$\mu_2(t)w(0,t) - \mu_1(t)w(h,t) \ge \frac{1}{2}\min_{[0,T]}(\mu_2(t) - \mu_1(t))\min_{[0,h]}\varphi''(x) > 0. \qquad (18)$$

Следовательно, условие (7) выполнено, и задача (1)–(4) сводится к системе уравнений (5), (6), (11), (12), (15). С другой стороны, из способа получения системы уравнений (5), (6), (11), (12), (15) следует, что если $(a(t), b(t), u(x,t), v(x,t), w(x,t)) \in (H^{\gamma/2}[0,t_0])^2 \times (H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{\Omega}_{t_0}))^3$, $a(t) > 0$, $t \in [0, t_0]$, — ее решение, то $(a(t), b(t), u(x,t))$ будет решением обратной задачи (1)–(4) в смысле данного выше определения. Действительно, используя свойство единственности решения систем интегральных уравнений Вольтерра второго рода, легко убедиться в том, что $v(x,t) = u_x(x,t)$, $w(x,t) = u_{xx}(x,t)$ и, следовательно, функция $u(x,t)$ является решением уравнения

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \int\limits_0^t\int\limits_0^h (b(\tau)u_\xi(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))G_2(x,t,\xi,\tau)\,d\xi d\tau.$$

С учетом (13) и условия 1 теоремы это означает, что $u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega_{t_0}) \cap H^{2+\gamma,\gamma/2}(\overline{\Omega}_{t_0})$ — решение задачи (1)–(3). Принимая во внимание условия теоремы и то, что $a(t), b(t) \in H^{\gamma/2}[0,t_0]$, из теоремы существования [8, с. 364, теорема 5.3] получаем, что функция $u(x,t)$ обладает требуемой гладкостью: $u(x,t) \in H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{\Omega}_{t_0})$. Выполнение условий (4) следует из системы уравнений (5), (6).

Перейдем к исследованию системы уравнений (5), (6), (11), (12), (15). Применим к указанной системе уравнений теорему Шаудера о неподвижной точке вполне непрерывного оператора. Сначала установим априорные оценки решений системы уравнений (5), (6), (11), (12), (15). При произвольных непрерывных на $[0, T]$ функциях $a(t) > 0$ и $b(t)$ для решений задач (1), (2), (4) и (8)–(10) соответственно имеют место оценки [8]

$$|u(x,t)| \le M_1 < \infty, \quad |v(x,t)| \le M_2 < \infty, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_T, \qquad (19)$$

где постоянные $M_i > 0$, $i = 1, 2$, определяются только исходными данными.

Учитывая (18), из уравнения (5) приходим к оценке

$$a(t) \le A_1 < \infty, \quad 0 \le t \le t_0, \qquad (20)$$

где постоянная $A_1 > 0$ определяется известными величинами. Из уравнения (6) получаем оценку

$$|b(t)| \le C_1 + C_2 a(t)W(t), \qquad (21)$$

где $W(t) = \max\limits_{x\in[0,h]}|w(x,t)|$. Исходя из явного вида функции Грина, из (15) с учетом (16), (19) и (21) выводим неравенство

$$W(t) \le C_3 + C_4\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} + C_5\int\limits_0^t \frac{W(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} + C_6\int\limits_0^t \frac{a(\tau)W^2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}. \quad (22)$$

С другой стороны, из уравнения (5) находим

$$a(t) \ge \frac{C_7}{W(t)}, \qquad (23)$$

где $C_7 > 0$ — известная постоянная. Используя вытекающее из (23) неравенство $1 \le \frac{1}{C_7} a(t)W(t)$, из (22) имеем

$$W(t) \le C_3 + C_8 \int\limits_0^t \frac{a(\tau)W(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_9 \int\limits_0^t \frac{a(\tau)W^2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},$$

или

$$W(t) \le C_3 + C_{10} \int\limits_0^t \frac{a(\tau)(W(\tau)+1/2)^2\,d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Обозначая $W_1(t) = W(t) + \frac{1}{2}$, приходим к неравенству

$$W_1(t) \le C_{11} + C_{10} \int\limits_0^t \frac{a(\tau)W_1^2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{24}$$

Для оценки интеграла

$$\int\limits_0^t \frac{a(\tau)W_1^2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}$$

возведем неравенство (24) в квадрат, заменим t на σ, умножим левую и правую части неравенства на $a(\sigma)/\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}$ и проинтегрируем его от 0 до t. Используя неравенство Коши, получим

$$\int\limits_0^t \frac{a(\sigma)W_1^2(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} \le 2C_{11}^2 \int\limits_0^t \frac{a(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} + 2C_{10}^2 \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\sigma \frac{a(\tau)W_1^2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}} \right)^2 \frac{a(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}.$$

Учитывая оценку (20) и применяя неравенство Коши — Буняковского, приведем полученное неравенство к виду

$$\int\limits_0^t \frac{a(\sigma)W_1^2(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} \le C_{12} + C_{13} \int\limits_0^t \frac{a(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} \int\limits_0^\sigma \frac{a(\tau)W_1^4(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}}.$$

Изменим порядок интегрирования в последнем слагаемом и учтем легко проверяемое равенство

$$\int\limits_\tau^t \frac{a(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{(\theta(t)-\theta(\sigma))(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}} = \pi,$$

вследствие чего приходим к оценке

$$\int\limits_0^t \frac{a(\sigma)W_1^2(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} \le C_{12} + C_{14} \int\limits_0^t W_1^4(\tau)\,d\tau \tag{25}$$

с известными положительными постоянными C_{12}, C_{14}.

При помощи (25) неравенство (24) приведем к виду

$$W_1(t) \le C_{15} + C_{16} \int\limits_0^t W_1^4(\tau)\, d\tau. \tag{26}$$

Обозначая правую часть (26) через $V(t)$, приходим к неравенству

$$V'(t) \le C_{16} V^4(t).$$

Разделим последнее неравенство на $V^4(t)$, заменим t на σ и проинтегрируем по σ от 0 до t. Принимая во внимание, что $V(0) = C_{15}$, получаем оценку

$$V(t) \le \frac{C_{15}}{\sqrt[3]{1 - 3C_{15}^3 C_{16} t}}, \quad t \in [0, t_0], \tag{27}$$

при условии, что число t_0, $0 < t_0 \le T$, выбрано таким образом, что

$$1 - 3C_{15}^3 C_{16} t_0 > 0. \tag{28}$$

Тогда

$$V(t) \le C_{17}, \quad t \in [0, t_0].$$

Возвращаясь к неизвестной функции $W(t)$, находим

$$|W(t)| \le M_3 < \infty, \quad t \in [0, t_0]. \tag{29}$$

Наличие оценок (20), (29) позволяет из (23) и (21) получить оценки

$$a(t) \ge A_0 > 0, \quad |b(t)| \le B_0 < \infty, \quad t \in [0, t_0], \tag{30}$$

с известными постоянными A_0, B_0. Следовательно, априорные оценки решений системы уравнений (5), (6), (11), (12), (15) установлены.

Определим длину промежутка $[0, t_0]$. Число t_0, $0 < t_0 \le T$, должно удовлетворять условию (28) и, кроме того, быть таким, чтобы на промежутке $[0, t_0]$ имело место неравенство (18). В свою очередь, выполнение неравенства (18) обеспечивается следующим неравенством:

$$\frac{1}{2} \min_{[0,T]} (\mu_2(t) - \mu_1(t)) \min_{[0,h]} \varphi''(x) \ge \Bigg| \mu_2(t) \Bigg(\int\limits_0^t \int\limits_0^h f_\xi(\xi,\tau) G_{1x}(0,t,\xi,\tau)\, d\xi d\tau$$

$$- \int\limits_0^t \mu_1'(\tau) G_2(0,t,0,\tau)\, d\tau + \int\limits_0^t \mu_2'(\tau) G_2(0,t,h,\tau)\, d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^h (b(\tau) w(\xi,\tau)$$

$$+ c(\xi,\tau) v(\xi,\tau) + + c_\xi(\xi,\tau) u(\xi,\tau)) G_{1x}(0,t,\xi,\tau)\, d\xi d\tau \Bigg) - \mu_1(t) \Bigg(\int\limits_0^t \int\limits_0^h f_\xi(\xi,\tau)$$

$$\times G_{1x}(h,t,\xi,\tau)\, d\xi d\tau - \int\limits_0^t \mu_1'(\tau) G_2(h,t,0,\tau)\, d\tau + \int\limits_0^t \mu_2'(\tau) G_2(h,t,h,\tau)\, d\tau$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^h (b(\tau) w(\xi,\tau) + c(\xi,\tau) v(\xi,\tau) + c_\xi(\xi,\tau) u(\xi,\tau)) G_{1x}(h,t,\xi,\tau)\, d\xi d\tau \Bigg) \Bigg|,$$

которое с учетом оценок (19), (20), (29), (30) приводится к виду

$$C_{18} - C_{19} t - C_{20} \sqrt{t} \ge 0, \tag{31}$$

где постоянные $C_{18} > 0$, $C_{19} > 0$, $C_{20} > 0$ очевидным образом выражаются через исходные данные задачи (1)–(4) и постоянные $M_1, M_2, M_3, A_0, A_1, B_0$. Таким образом, кроме условия (28) число t_0, $0 < t_0 \le T$, должно удовлетворять соотношению (31).

Оценки решений системы уравнений (5), (6), (11), (12), (15) установлены.

Обозначим $\boldsymbol{\omega} = (a, b, u, v, w)$ и $\mathscr{N} = \{(a, b, u, v, w) \in (C[0, t_0])^2 \times (C(\overline{\Omega}_{t_0}))^3 : A_0 \le a \le A_1,\ |b| \le B_0,\ |u| \le M_1,\ |v| \le M_2,\ |w| \le M_3\}$. Систему уравнений (5), (6), (11), (12), (15) запишем в виде операторного уравнения $\boldsymbol{\omega} = P\boldsymbol{\omega}$, где оператор P переводит $\mathscr{N}$ в $\mathscr{N}$. Проверка того, что оператор P является вполне непрерывным, проводится аналогично работе [9], что в силу теоремы Шаудера дает существование непрерывного решения системы уравнений (5), (6), (11), (12), (15). Из условий теоремы следует также, что $a(t), b(t) \in H^{\gamma/2}[0, t_0]$, $u(x, t), v(x, t), w(x, t) \in H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{\Omega}_{t_0}))$. Тогда, как установлено выше, функции $a(t), b(t), u(x, t)$ являются решением задачи (1)–(4) в смысле данного ранее определения, что завершает доказательство теоремы.

3. Единственность решения.

Теорема 2. *Предположим, что выполнено следующее условие:*

$$(\nu_1'(t) - f(0, t) - c(0, t)\nu_1(t))\mu_2(t) - (\nu_2'(t) - f(h, t) - c(h, t)\nu_2(t))\mu_1(t) \ne 0, \quad t \in [0, T]. \tag{32}$$

Тогда решение задачи (1)–(4) единственно.

Доказательство. Пусть $(a_i(t), b_i(t), u_i(x, t))$, $i = 1, 2,$ — два решения задачи (1)–(4). Для их разности $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$, $a(t) = a_1(t) - a_2(t)$, $b(t) = b_1(t) - b_2(t)$ получаем задачу

$$u_t = a_2(t)u_{xx} + b_2(t)u_x + c(x, t)u + a(t)u_{1xx}(x, t) + b(t)u_{1x}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \tag{33}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, h], \tag{34}$$

$$u_x(0, t) = u_x(h, t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{35}$$

$$u(0, t) = u(h, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{36}$$

Обозначая через $G(x, t, \xi, \tau)$ функцию Грина задачи (33)–(35), представим ее решение в виде

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^h (a(\tau)u_{1\xi\xi}(\xi, \tau) + b(\tau)u_{1\xi}(\xi, \tau))G(x, t, \xi, \tau)\, d\xi d\tau.$$

Полагая в уравнении (33) $x = 0$ и $x = h$ и используя условия (35), (36), приходим к системе интегральных уравнений

$$a(t)u_{1xx}(0, t) + b(t)u_{1x}(0, t) = -a_2(t)\int_0^t d\tau \int_0^h (a(\tau)u_{1\xi\xi}(\xi, \tau) + b(\tau)u_{1\xi}(\xi, \tau))G_{xx}(0, t, \xi, \tau)\, d\xi, \tag{37}$$

$$a(t)u_{1xx}(h, t) + b(t)u_{1x}(h, t) = -a_2(t)\int_0^t d\tau \int_0^h (a(\tau)u_{1\xi\xi}(\xi, \tau) + b(\tau)u_{1\xi}(\xi, \tau))G_{xx}(h, t, \xi, \tau)\, d\xi.$$

Учитывая то, что $(a_1(t), b_1(t), u_1(x,t))$ является решением задачи (1)–(4), находим

$$u_{1xx}(0,t)u_{1x}(h,t) - u_{1xx}(h,t)u_{1x}(0,t) = \frac{1}{a_1(t)}((\nu_1'(t) - f(0,t) \\ - c(0,t)\nu_1(t))\mu_2(t) - (\nu_2'(t) - f(h,t) - c(h,t)\nu_2(t))\mu_1(t)) \neq 0, \quad t \in [0,T].$$

Тогда систему уравнений (37) можно привести к системе однородных интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$\begin{aligned} a(t) &= \int\limits_0^t (K_{11}(t,\tau)a(\tau) + K_{12}(t,\tau)b(\tau))\,d\tau, \\ b(t) &= \int\limits_0^t (K_{21}(t,\tau)a(\tau) + K_{22}(t,\tau)b(\tau))\,d\tau, \quad t \in [0,T], \end{aligned} \tag{38}$$

с ядрами $K_{ij}(t,\tau)$, $i,j = 1,2$, имеющими интегрируемые особенности [8]. Следовательно, система уравнений (38) имеет только тривиальное решение $a(t) \equiv 0$, $b(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$. Учитывая это в уравнении (33), получаем, что функция $u(x,t)$ является решением однородной задачи (33), (34), (36) и в силу единственности ее решения [8, с. 27] тождественно равна нулю в области $\overline{\Omega}_T$. Теорема доказана.

Заметим, что условие (32) единственности решения задачи (1)–(4) составляет одно из условий существования решения, определяемых теоремой 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахундов А. Я.* Обратная задача для линейных параболических уравнений // Докл. АН АзССР. 1983. Т. 39, № 5. С. 3–6.
2. *Музылев Н. В.* Теоремы единственности для некоторых обратных задач теплопроводности // Журнал вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20, № 2. С. 388–400.
3. *Музылев Н.В.* О единственности одновременного определения коэффициентов теплопроводности и объемной теплоемкости // Журнал вычисл. математики и мат. физики. 1983. Т. 23, № 1. С. 102–108.
4. *Музылев Н. В.* О единственности решения одной обратной задачи нелинейной теплопроводности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25, № 9. С. 1346–1352.
5. *Ратыни А. К.* Условия корректности задачи определения матрицы коэффициентов при старших производных параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 8. С. 1419–1426.
6. *Иванчов Н. И.* Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 3. С. 612–621.
7. *Ковальчук С. М.* Визначення коефіціхнтів теплопровідності та об'хмнощ теплохмності в багатошаровому середовищі // Мат. методи і фізико-механічні поля. 1997. Т. 40, № 2. С. 153–159.
8. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
9. *Иванчов Н. И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 539–550.

Статья поступила 11 апреля 2000 г.

Иванчов Николай Иванович, *Пабыривска Неля Виталиевна*
Львовский национальный университет им. Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов 79602, Украина
ivanchov@franko.lviv.ua, diffeq@franko.lviv.ua