Сибирский математический журнал
Июль—август, 2002. Том 43, № 4

УДК 517.51

О НЕРАВЕНСТВАХ С МЕРАМИ ТИПА ТЕОРЕМ ВЛОЖЕНИЯ СОБОЛЕВА НА ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВАХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

Д. В. Прохоров, В. Д. Степанов

Аннотация: Для произвольных борелевских мер μ и ν на открытом множестве действительной оси рассмотрены пространства типа Соболева $\overset{\circ}{W}{}^1_{p,r}(\mu,\nu)$ и получены необходимые и достаточные условия их вложения в лебеговские пространства $L_q(\lambda)$.

Ключевые слова: пространство Соболева, весовое пространство Лебега, теорема вложения

Введение

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ — произвольное открытое подмножество действительной оси, λ, μ и ν — локально конечные невырожденные борелевские меры на Ω. В работе рассматривается неравенство

$$\left(\int\limits_\Omega |f|^q\,d\lambda\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left[\left(\int\limits_\Omega |f'|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_\Omega |f|^r\,d\nu\right)^{\frac{1}{r}}\right], \tag{1}$$

где $0 < p,\, r,\, q < \infty$ и f — произвольная бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем в Ω, а положительная константа C не зависит от f.

Неравенство (1), характеризующее вложение пространства типа Соболева в лебеговское пространство и играющее заметную роль в различных задачах теории функций и спектральной теории дифференциальных операторов, изучалось (в том числе в многомерном случае) многими авторами, см., например, монографии [1–4].

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^1_{p,r} := \overset{\circ}{W}{}^1_{p,r}(\mu,\nu)$ замыкание множества $\mathscr{D}(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых финитных функций с носителями в Ω по (квази)норме

$$\|f\|_{W^1_{p,r}} := \left(\int\limits_\Omega |f'|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_\Omega |f|^r\,d\nu\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Очевидно, что $\overset{\circ}{W}{}^1_{p,r} \subseteq W^1_{p,r}$, где $W^1_{p,r} := W^1_{p,r}(\mu,\nu)$ — пространство всех абсолютно непрерывных функций, заданных на Ω, с конечной (квази)нормой $\|\cdot\|_{W^1_{p,r}}$.

Работа обоих авторов частично финансировалась Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 00–01–00239). Работа первого автора также поддержана финансово грантом Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–06573), а второго — грантом Министерства образования Российской Федерации (код проекта Е00–1.0–215) и Шведским национальным научным фондом.

Пусть $L_q(\lambda)$ — пространство всех λ-измеримых функций f на Ω с конечной (квази)нормой $\|f\|_q := \big(\int\limits_\Omega |f|^q\,d\lambda\big)^{\frac{1}{q}}$.

Впервые критерий вложения $\overset{\circ}{W}{}^1_{p,r} \hookrightarrow L^q(\lambda)$ для случая $1 \le r \le p \le q < \infty$, $d\mu(x) = dx$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ был получен В. Г. Мазьей [5, 2, теорема 2.3.7]. Этот критерий базируется на понятии емкости (см. ниже лемму 5) и, вообще говоря, трудно проверяем. Явный критерий вложения $W^1_{p,r} \hookrightarrow L_q(\lambda)$ для случая абсолютно непрерывных мер λ, μ и ν (трехвесовое неравенство) при $1 < p = r$, $q < \infty$, $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ найден Р. Ойнаровым [6]. При этом использовался альтернативный подход через *функцию Отелбаева* [3], который, в частности, позволяет сводить неравенства (1) к неравенствам с модифицированным интегральным оператором Харди [7]. Качество критерия в данном круге вопросов играет важную роль. Оно заметно сказывается, например, при исследовании задач о поведении аппроксимативных и энтропийных чисел операторов вложения. Вместе с тем из одного результата В. Г. Мазьи [2, § 2.2.2, лемма 2] вытекает, что для абсолютно непрерывной меры μ в одномерном случае емкость раскрывается в явном виде, поэтому критерий может быть улучшен. При $1 < p = r \le q < \infty$ и $d\mu(x) = dx$ это показано в [8]. Более того, один из результатов настоящей статьи утверждает (§ 1), что емкость в одномерном случае, грубо говоря, игнорирует сингулярную часть меры, выражаясь только через абсолютно непрерывную часть. В связи с этим емкостные критерии типа В. Г. Мазьи, которые мы устанавливаем в § 2, следуя идейной стороне работы [8], с одной стороны, приобретают более простой вид в случае $1 < p \le q < \infty$, $0 < r \le q$ (§ 3), с другой — позволяют обобщить результаты Р. Ойнарова на случай произвольных мер.

Всюду в статье χ_E обозначает характеристическую функцию (индикатор) множества $E \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z} := \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$, $p' = p/(p-1)$ при $1 < p < \infty$. Мы пишем $A \ll B$, если $A \le cB$, и $A \approx B$, если $A \ll B \ll A$, где константы c могут быть различными в разных местах, зависящими только от p, q, r. Неопределенности $0 \cdot \infty$ полагаются равными нулю, а значок $\bullet$ отмечает окончание доказательства.

1. Особенности емкости на действительной оси

Для каждой пары открытых множеств g, $G \subseteq \Omega$ таких, что замыкание $\bar g$ компактно в G, мы пишем $\bar g \subset G \subseteq \Omega$ и полагаем

$$\mathscr{F}(g,G) := \{f \in \mathscr{D}(\Omega) : f(x) = 1 \text{ в } g,\ 0 \le f(x) \le 1 \text{ в } G \setminus g,\ f(x) = 0 \text{ в } \Omega \setminus G\}.$$

Пусть $\mathscr{F}^1_{p,\mu}(g,G)$ — замыкание $\mathscr{F}(g,G)$ относительно $\big(\int\limits_\Omega |f'|^p\,d\mu\big)^{\frac{1}{p}}$, и определим емкость равенством

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}(g,G) := \inf\Big\{\int\limits_\Omega |f'|^p\,d\mu : f \in \mathscr{F}(g,G)\Big\}.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}(g,G) := \inf\Big\{\int\limits_\Omega |f'|^p\,d\mu : f \in \mathscr{F}^1_{p,\mu}(g,G)\Big\}.$$

Следующие две леммы, а также лемма 4 при $d\mu(x) = dx$ и $1 < p < \infty$ получены в [8].

Лемма 1. *Пусть $p > 0$, $G := (A, B) \subset \Omega$, g — открытое множество такое, что $\bar{g}$ компактно в G и*

$$a_0 := \inf_{x\in g} x, \quad b_0 := \sup_{x\in g} x, \quad g^\circ := (a_0, b_0).$$

Тогда

$$\mathrm{cap}_{p,\mu}(g, G) = \mathrm{cap}_{p,\mu}(g^\circ, G).$$

Доказательство. Вложение $\mathscr{F}(g^\circ, G) \subset \mathscr{F}(g, G)$ влечет неравенство для емкостей $\mathrm{cap}_{p,\mu}(g, G) \le \mathrm{cap}_{p,\mu}(g^\circ, G)$. Для доказательства обратного неравенства заметим, что для каждой функции $f \in \mathscr{F}(g, G)$ существует $\tilde{f} \in \mathscr{F}(g^\circ, G)$ такая, что $\tilde{f}(x) = 1$ на g° и $\tilde{f}(x) = f(x)$ на $\Omega \setminus g^\circ$, для которой

$$\mathrm{cap}_{p,\mu}(g^\circ, G) \le \int_\Omega |\tilde{f}'|^p\, d\mu \le \int_\Omega |f'|^p\, d\mu.$$

Взяв инфимум правой части по всем $f \in \mathscr{F}(g, G)$, получим требуемое. •

Лемма 2. *Пусть $p > 0$, $G_i := (A_i, B_i) \subset \Omega$, $i \in \mathbb{N}$, $G_i \cap G_j = \varnothing$ для $j \ne i$, $G := \bigcup_i G_i$ и g — открытое множество такое, что $\bar{g}$ компактно в G. Тогда*

$$\mathrm{cap}_{p,\mu}(g, G) = \sum_i \mathrm{cap}_{p,\mu}(g_i, G_i),$$

где $g_i := g \cap G_i$.

Доказательство. Сначала заметим, что $\bar{g}_i$ компактно в G_i. Из свойств инфимума для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{cap}_{p,\mu}(g, G) &= \inf_{f\in\mathscr{F}(g,G)} \int_\Omega |f'|^p\, d\mu \ge \sum_{i=1}^n \inf_{f\in\mathscr{F}(g,G)} \int_{G_i} |f'|^p\, d\mu \\ &\ge \sum_{i=1}^n \inf\left\{\int_{G_i} |h'|^p\, d\mu : h \in \mathscr{F}^1_{p,\mu}(g_i, G_i)\right\} = \sum_{i=1}^n \mathrm{cap}_{p,\mu}(g_i, G_i).\end{aligned}$$

Последнее неравенство выполнено в силу того, что $f\chi_{G_i}$ принадлежит классу $\mathscr{F}^1_{p,\mu}(g_i, G_i)$ для любой $f \in \mathscr{F}(g, G)$. Следовательно, установлена оценка

$$\mathrm{cap}_{p,\mu}(g, G) \ge \sum_i \mathrm{cap}_{p,\mu}(g_i, G_i).$$

Далее пусть $\sum_i \mathrm{cap}_{p,\mu}(g_i, G_i) < \infty$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и набор $\{f_i\}$ функций таких, что $f_i \in \mathscr{F}(g_i, G_i)$ и

$$\mathrm{cap}_{p,\mu}(g_i, G_i) > \int_\Omega |f_i'|^p\, d\mu - \varepsilon 2^{-i}.$$

Тогда $\tilde{f} := \sum_i f_i \in \mathscr{F}(g, G)$ и существует такое натуральное N, что

$$\sum_{i\ge N} \int_\Omega |f_i'|^p\, d\mu < \varepsilon.$$

Из приведенных оценок следует, что при $n > N$

$$0 \le \operatorname{cap}_{p,\mu}(g,G) - \sum_{i=1}^{n} \operatorname{cap}_{p,\mu}(g_i,G_i) \le \int\limits_{\Omega} |\tilde{f}'|^p \, d\mu - \sum_{i=1}^{n} \biggl(\int\limits_{\Omega} |f_i'|^p \, d\mu - \varepsilon 2^{-i} \biggr) \le 2\varepsilon.$$

Лемма доказана. $\bullet$

По теореме Лебега о разложении [9, теорема I.14]

$$d\mu(x) = v(x)dx + d\mu_s(x),$$

где $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и $\operatorname{mes}(\operatorname{supp}\mu_s) = 0$. Иногда для удобства будем писать $d\mu_a(x) := v(x)dx$.

Лемма 3. *Пусть* $p > 0$, $g := (a,b)$, $G := (A,B) \subset \Omega$ *и* $\bar{g}$ *компактно в* G. *Тогда*

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}(g,G) = \operatorname{cap}_{p,\mu_a}(g,G).$$

Доказательство. Неравенство

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}(g,G) \ge \operatorname{cap}_{p,\mu_a}(g,G)$$

очевидно. Покажем обратное. Обозначив

$$\widetilde{\mathscr{F}}(g,G) := \{ f \in \mathscr{F}(g,G) : f \nearrow \text{ на } (A,a),\ f \searrow \text{ на } (b,B) \},$$

заметим, что

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}(g,G) = \inf \biggl\{ \int\limits_{\Omega} |f'|^p \, d\mu : f \in \widetilde{\mathscr{F}}(g,G) \biggr\}.$$

То, что левая часть не превосходит правую, очевидно. Обратное неравенство следует из оценок для произвольной $f \in \mathscr{F}(g,G)$:

$$\int\limits_{\Omega} |f'|^p \, d\mu \ge \int\limits_{\Omega} |\tilde{f}'|^p \, d\mu \ge \inf \biggl\{ \int\limits_{\Omega} |h'|^p \, d\mu : h \in \widetilde{\mathscr{F}}^1_{p,\mu}(g,G) \biggr\},$$

где $\widetilde{\mathscr{F}}^1_{p,\mu}(g,G)$ — замыкание $\widetilde{\mathscr{F}}(g,G)$ по $\bigl(\int\limits_{\Omega} |f'|^p \, d\mu\bigr)^{\frac{1}{p}}$, а

$$\tilde{f}(x) = \sup_{s \in [A,x]} f(s) \chi_{(A, \frac{1}{2}(a+b)]}(x) + \sup_{s \in [x,B]} f(s) \chi_{(\frac{1}{2}(a+b), B)}(x).$$

Фиксируем произвольную функцию $f \in \widetilde{\mathscr{F}}(g,G)$ и произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $a' := \inf\{x : x \in \operatorname{supp} f\}$, $b' := \sup\{x : x \in \operatorname{supp} f\}$ и рассмотрим конечный интервал (a', a). Разобьем его на части точками

$$a' = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n = a$$

так, что на каждом $\Delta_j := (\gamma_j, \gamma_{j+1})$, $j = 0, \dots, n-1$, колебание $\omega(f', \Delta_j)$ принадлежит $(0, \varepsilon)$. Тогда в силу положительности колебания производной f' на Δ_j выполнено строгое неравенство

$$M_j |\Delta_j| > f(\gamma_{j+1}) - f(\gamma_j), \quad j = 0, \dots, n-1,$$

где $M_j := \sup\limits_{\Delta_j} |f'|$. Действительно, если $M_j|\Delta_j| = f(\gamma_{j+1}) - f(\gamma_j)$ при некотором j, то это означает, что функция f линейна на Δ_j и, следовательно, $\omega(f', \Delta_j) = 0$. Выберем произвольно

$$r_j \in \left(0, 1 - \frac{f(\gamma_{j+1}) - f(\gamma_j)}{M_j|\Delta_j|}\right)$$

и положим

$$\delta_j := \min\left(\frac{\varepsilon}{2^j M_j^p}, |\Delta_j| - \frac{f(\gamma_{j+1}) - f(\gamma_j)}{M_j(1 - r_j)}\right).$$

В силу сингулярности μ_s существуют непересекающиеся интервалы $\Delta_{j,k} := (\alpha_{j,k}, \beta_{j,k}) \subset \Delta_j$, $k = 1, \dots, n_j$, такие, что

$$\sum_{k=1}^{n_j} |\Delta_{j,k}| < \delta_j \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n_j} \mu_s(\Delta_{j,k}) > \mu_s(\Delta_j) - \delta_j.$$

Не теряя общности, считаем, что $\alpha_{j,1} = \gamma_j$ и $\beta_{j,n_j} = \gamma_{j+1}$. Выберем произвольно $r_{j,k} \in \left(0, \frac{1}{2} r_j(\alpha_{j,k+1} - \beta_{j,k})\right)$.

Рассмотрим функцию $\bar{f} \in \widetilde{\mathscr{F}}(g, G)$, которая на каждом Δ_j, $j = 0, \dots, n$, строится следующим образом.

На промежутке $[\gamma_j, \beta_{j,1})$ полагаем $\bar{f}(x) = f(\gamma_j)$. Зададим $\bar{f}$ на отрезках $[\beta_{j,1}, \beta_{j,1} + r_{j,1}]$ и $[\alpha_{j,2} - r_{j,1}, \alpha_{j,2}]$ таким образом, чтобы производная $\bar{f}'$ удовлетворяла соотношению $0 \le \bar{f}'(x) \le M_j$, а на отрезке $[\beta_{j,1} + r_{j,1}, \alpha_{j,2} - r_{j,1}]$ была постоянной и $\bar{f}'(x) = M_j$. На интервале $\Delta_{j,2}$ полагаем $\bar{f}(x) = \bar{f}(\alpha_{j,2})$. Продолжая построение $\bar{f}$ аналогично, в силу неравенств

$$\sum_{k=1}^{n_j-1} (\alpha_{j,k+1} - \beta_{j,k} - 2r_{j,k}) > (1 - r_j) \sum_{k=1}^{n_j-1} (\alpha_{j,k+1} - \beta_{j,k}) \ge (1 - r_j)(|\Delta_j| - \delta_j)$$

и

$$M_j(|\Delta_j| - \delta_j)(1 - r_j) \ge f(\gamma_{j+1}) - f(\gamma_j)$$

в итоге найдем такое натуральное $k_j \in [1, n_j - 1]$ и точку $c_j \in (\beta_{j,k_j}, \alpha_{j,k_j+1})$, в которой $\bar{f}(c_j) = f(\gamma_{j+1})$. Тогда положим $\bar{f}(x) = f(\gamma_{j+1})$ на $(\alpha_{j,k_j+1}, \gamma_{j+1}]$ и сгладим $\bar{f}$ на интервале $(\beta_{j,k_j}, \alpha_{j,k_j+1})$ так, чтобы на нем было $0 \le \bar{f}'(x) \le M_j$.

Далее,

$$\int\limits_A^a |\bar{f}'|^p \, d\mu = \int\limits_{a'}^a |\bar{f}'|^p \, d\mu = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\int\limits_{\Delta_j} |\bar{f}'|^p \, d\mu_a + \int\limits_{\Delta_j} |\bar{f}'|^p \, d\mu_s \right)$$
$$\le \sum_{j=0}^{n-1} \left(M_j^p \mu_a(\Delta_j) + \int\limits_{\Delta_j \setminus \bigcup\limits_k \Delta_{j,k}} |\bar{f}'|^p \, d\mu_s \right) \le \sum_{j=0}^{n-1} \left(\int\limits_{\Delta_j} (|f'| + \varepsilon)^p \, d\mu_a + M_j^p \delta_j \right).$$

Отсюда в виду выбора δ_j имеем

$$\int\limits_A^a |\bar{f}'|^p \, d\mu \le \int\limits_{a'}^a (|f'| + \varepsilon)^p \, d\mu_a + 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\inf\left\{\int\limits_A^a |h'|^p\,d\mu : h\in\widetilde{\mathscr F}(g,G)\right\} \le \int\limits_{a'}^a (|f'|+\varepsilon)^p\,d\mu_a + 2\varepsilon$$

для фиксированной f и произвольного $\varepsilon>0$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon\to 0$, учитывая локальную конечность μ_a, по теореме Лебега получим

$$\inf\left\{\int\limits_A^a |h'|^p\,d\mu : h\in\widetilde{\mathscr F}(g,G)\right\} \le \int\limits_{a'}^a |f'|^p\,d\mu_a \le \int\limits_A^a |f'|^p\,d\mu_a.$$

Аналогично рассматривая конечный интервал (b,b'), приходим к оценке

$$\inf\left\{\int\limits_b^B |h'|^p\,d\mu : h\in\widetilde{\mathscr F}(g,G)\right\} \le \int\limits_b^B |f'|^p\,d\mu_a,$$

откуда в силу произвольности f заключаем, что

$$\operatorname{cap}_{p,\mu_a}(g,G) \ge \inf_{h\in\widetilde{\mathscr F}(g,G)} \int\limits_A^a |h'|^p\,d\mu + \inf_{h\in\widetilde{\mathscr F}(g,G)} \int\limits_b^B |h'|^p\,d\mu = \operatorname{cap}_{p,\mu}(g,G).$$

Лемма доказана. •

Следствие 1. *Пусть $p>0$, $g,G\subset\Omega$ — открытые множества и $\bar g$ компактно в G. Тогда*

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}(g,G) = \operatorname{cap}_{p,\mu_a}(g,G).$$

Доказательство. Так как G открыто, то $G=\bigcup G_i$, где $G_i:=(A_i,B_i)$. По лемме 2 имеем

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}(g,G) = \sum_i \operatorname{cap}_{p,\mu}(g_i,G_i),$$

где $g_i := g\cap G_i$. Применяя лемму 1, получим (в обозначениях этой леммы) равенство $\operatorname{cap}_{p,\mu}(g_i,G_i) = \operatorname{cap}_{p,\mu}\big(g_i^\circ,G_i\big)$ для каждого $i\in\mathbb N$. Кроме того, из леммы 3 следует, что $\operatorname{cap}_{p,\mu}\big(g_i^\circ,G_i\big) = \operatorname{cap}_{p,\mu_a}\big(g_i^\circ,G_i\big)$. Проводя подобные рассуждения с емкостью $\operatorname{cap}_{p,\mu_a}(g,G)$, получим требуемое. •

Лемма 4. *Пусть $0<p<\infty$, $v^{\frac{1}{1-p}}\in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ при $p\ne 1$, но $\frac1v\in L^\infty_{\rm loc}(\Omega)$ при $p=1$ и $g:=(a,b)$, $G:=(A,B)$ — пара конечных интервалов из Ω такая, что $\bar g\subset G$. Тогда*

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}(g,G)=0, 0<p<1, \quad \operatorname{cap}_{p,\mu}(g,G)=\rho_{p,\mu}(g,G), \quad 1\le p<\infty, \tag{2}$$

где

$$\rho_{p,\mu}(g,G) := \left(\int\limits_A^a v^{\frac{1}{1-p}}\right)^{1-p} + \left(\int\limits_b^B v^{\frac{1}{1-p}}\right)^{1-p}, \quad 1<p<\infty,$$

$$\rho_{1,\mu}(g,G) := \left\|\frac{\chi_{(A,a)}}{v}\right\|_\infty^{-1} + \left\|\frac{\chi_{(b,B)}}{v}\right\|_\infty^{-1}, \quad p=1.$$

Доказательство. Начнем с $p \neq 1$. Для произвольных $a^* \in [A, a)$, $b^* \in (b, B]$ рассмотрим функцию $f_{a^*,b^*} \in \mathscr{F}^1_{p,\mu_a}(g, G)$ вида

$$f_{a^*,b^*}(x) = \begin{cases} \int\limits_{a^*}^{x} v^{\frac{1}{1-p}} \left(\int\limits_{a^*}^{a} v^{\frac{1}{1-p}} \right)^{-1}, & x \in (a^*, a), \\ 1, & x \in (a, b), \\ \int\limits_{x}^{b^*} v^{\frac{1}{1-p}} \left(\int\limits_{b}^{b^*} v^{\frac{1}{1-p}} \right)^{-1}, & x \in (b, b^*), \\ 0, & x \notin (a^*, b^*). \end{cases}$$

По лемме 3

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}(g, G) \leq \int\limits_{\Omega} |f'_{a^*,b^*}|^p v = \left(\int\limits_{a^*}^{a} v^{\frac{1}{1-p}} \right)^{1-p} + \left(\int\limits_{b}^{b^*} v^{\frac{1}{1-p}} \right)^{1-p}.$$

Полагая $a^* = A$, $b^* = B$, приходим к оценке сверху при $p > 1$. Кроме того, при $a^* \to a$, $b^* \to b$ из доказанного неравенства получаем $\operatorname{cap}_{p,\mu}(g, G) = 0$ при $p \in (0, 1)$. Заметим, что для произвольной функции $f \in \mathscr{F}(g, G)$ из неравенства Гёльдера следует, что

$$1 = \left| \int\limits_{A}^{a} f' \right| \leq \left(\int\limits_{A}^{a} |f'|^p v \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{A}^{a} v^{\frac{1}{1-p}} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

и аналогично

$$1 \leq \left(\int\limits_{b}^{B} |f'|^p v \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{b}^{B} v^{\frac{1}{1-p}} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Объединяя обе оценки, находим

$$\left(\int\limits_{A}^{a} v^{\frac{1}{1-p}} \right)^{1-p} + \left(\int\limits_{b}^{B} v^{\frac{1}{1-p}} \right)^{1-p} \leq \int\limits_{\Omega} |f'|^p v \leq \int\limits_{\Omega} |f'|^p \, d\mu$$

и, взяв инфимум правой части по всем $f \in \mathscr{F}(g, G)$, получим нижнюю оценку для $\operatorname{cap}_{p,\mu}(g, G)$ в (2) с $p > 1$.

При $p = 1$ и любой $f \in \mathscr{F}(g, G)$ имеем

$$1 = \left| \int\limits_{A}^{a} f' \right| \leq \left\| \frac{\chi_{(A,a)}}{v} \right\|_{\infty} \int\limits_{A}^{a} |f'| v, \quad 1 = \left| \int\limits_{B}^{b} f' \right| \leq \left\| \frac{\chi_{(b,B)}}{v} \right\|_{\infty} \int\limits_{0}^{B} |f'| v,$$

откуда следует оценка снизу

$$\operatorname{cap}_{1,\mu}(g, G) \geq \left\| \frac{\chi_{(A,a)}}{v} \right\|_{\infty}^{-1} + \left\| \frac{\chi_{(b,B)}}{v} \right\|_{\infty}^{-1}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует точка Лебега $x_\varepsilon \in (A, a)$ функции v такая, что

$$v(x_\varepsilon) \leq \operatorname*{ess\,inf}_{x \in (A,a)} v(x) + \varepsilon.$$

Пусть $\{f_n\} \subset \widetilde{\mathscr{F}}(g,G)$ — последовательность такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_A^a v(x)\, df_n(x) = v(x_\varepsilon) \le \left\| \frac{\chi_{(A,a)}}{v} \right\|_\infty^{-1} + \varepsilon.$$

Проводя аналогичную оценку для интервала (b,B) по лемме 3 находим

$$\mathrm{cap}_{1,\mu}(g,G) = \mathrm{cap}_{1,\mu_a}(g,G) \le \left\| \frac{\chi_{(A,a)}}{v} \right\|_\infty^{-1} + \left\| \frac{\chi_{(b,B)}}{v} \right\|_\infty^{-1} + 2\varepsilon. \quad \bullet$$

Следствие 2. *Если $0 < p < 1$, g и G — открытые подмножества Ω, $\bar g$ компактно в G, то $\mathrm{cap}_{p,\mu}(g,G) = 0$.*

2. Емкостные критерии вложения

Следующее утверждение является модификацией известного результата [2, теорема 2.3.7].

Лемма 5. *Пусть $0 < p,\ r \le q < \infty$. Тогда неравенство (1) для всех $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ эквивалентно неравенству*

$$(\lambda g)^{\frac{1}{q}} \le A[(\mathrm{cap}_{p,\mu}(g,G))^{\frac{1}{p}} + (\nu G)^{\frac{1}{r}}] \tag{3}$$

для всех открытых множеств g, G из Ω таких, что $\bar g$ — компакт в G. Более того, $A \le C \ll A$ для наименьших возможных констант C и A из (1) и (3) соответственно.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (3) доказывается подстановкой в (1) функции $f \in \mathscr{F}(g,G)$ и взятием инфимума первого слагаемого в правой части полученного неравенства.

Пусть выполнено (3). Тогда

$$\int\limits_\Omega |f|^q\, d\lambda = \int\limits_0^\infty \lambda L_t\, dt^q = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int\limits_{2^j}^{2^{j+1}} \lambda L_t\, dt^q \ll \sum_j 2^{qj} \lambda g_j, \tag{4}$$

где $g_j := L_{2^j}$. Положим

$$\gamma_j := \mathrm{cap}_{p,\mu}(g_j, g_{j-1}).$$

Тогда из (3) и (4)

$$\int\limits_\Omega |f|^q\, d\lambda \ll A^q \Big[\sum_j 2^{qj} \gamma_j^{\frac{q}{p}} + \sum_j 2^{qj} (\nu g_{j-1})^{\frac{q}{r}}\Big]. \tag{5}$$

Для второго слагаемого в правой части неравенства имеем

$$\sum_j 2^{qj} (\nu g_{j-1})^{\frac{q}{r}} \ll \Big(\sum_j 2^{rj} \nu g_j\Big)^{\frac{q}{r}}$$
$$\ll \Big(\sum_j \nu g_j \int\limits_{2^{j-1}}^{2^j} dt^r\Big)^{\frac{q}{r}} \le \Big(\sum_j \int\limits_{2^{j-1}}^{2^j} \nu L_t\, dt^r\Big)^{\frac{q}{r}} = \Big(\int\limits_\Omega |f|^r\, d\nu\Big)^{\frac{q}{r}}.$$

Теперь оценим сверху первое слагаемое. Для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ выберем функцию $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ такую, что

$$\eta_\varepsilon(t) = 1 \text{ при } t \ge 1, \quad \eta_\varepsilon(t) = 0 \text{ при } t \le 0 \text{ и } 0 \le \eta_\varepsilon'(t) \le 1 + \varepsilon.$$

Положим
$$f_j(x) = \eta_\varepsilon[(|f(x)| - 2^{j-1})/2^{j-1}].$$
Тогда $f_j(x) = 1$ на g_j, $f_j(x) = 0$ на $\Omega \setminus g_{j-1}$. Поэтому
$$\gamma_j \le \int\limits_{g_{j-1}\setminus g_j} |f_j'|^p \, d\mu.$$

Следовательно,
$$\sum_j 2^{qj}\gamma_j^{\frac{q}{p}} \le \Big(\sum_j 2^{pj}\gamma_j\Big)^{\frac{q}{p}} \ll \Big(\sum_j 2^{(j-1)p} \int\limits_{g_{j-1}\setminus g_j} |f_j'|^p \, d\mu\Big)^{\frac{q}{p}}$$
$$\le \Big((1+\varepsilon)^p \sum_j \int\limits_{g_{j-1}\setminus g_j} |f'|^p \, d\mu\Big)^{\frac{q}{p}} = \Big((1+\varepsilon)^p \int\limits_\Omega |f'|^p \, d\mu\Big)^{\frac{q}{p}} \qquad (6)$$
в силу того, что
$$f_j'(x) = \eta_\varepsilon'\Big(\frac{|f(x)| - 2^{j-1}}{2^{j-1}}\Big)\frac{f'(x)\mathrm{sign} f(x)}{2^{j-1}}.$$

Таким образом, из (5) и (6) заключаем, что
$$\Big(\int\limits_\Omega |f|^q \, d\lambda\Big)^{\frac{1}{q}} \ll A\bigg(\Big((1+\varepsilon)^p \int\limits_\Omega |f'|^p \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int\limits_\Omega |f|^r \, d\nu\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим $C \ll A$. •

Следствие 3. *В случае $0 < p < 1$ емкость в правой части* (3) *отсутствует* (*см.* *следствие* 2). *Из этого следует, что при $0 < p, r \le q < \infty$, $0 < p < 1$ неравенство* (1) *выполнено тогда и только тогда, когда $(\lambda g)^{\frac{1}{q}} \le A(\nu g)^{\frac{1}{r}}$ для всех открытых ограниченных множеств $g \subset \Omega$.*

Теорема 1. *Пусть $0 < p$, $r \le q < \infty$. Тогда неравенство* (1) *выполнено для всех $f \in \mathscr{D}(\Omega)$, если и только если*
$$\mathfrak{A} := \sup_{t>0} t^{\frac{1}{q}} \varkappa(t)^{-1} < \infty,$$
где
$$\varkappa(t) := \inf_{\bar g \subset G, \lambda g \ge t} [(\mathrm{cap}_{p,\mu}(g, G))^{\frac{1}{p}} + (\nu G)^{\frac{1}{r}}]$$
и инфимум берется по всем открытым множествам g, G из Ω таким, что $\bar g$ компактно в G и $\lambda g \ge t$. Более того, $\mathfrak{A} \le C \ll \mathfrak{A}$ для наименьшей возможной константы C из (1).

Доказательство. Пусть имеет место неравенство (1). Фиксируем произвольное $t > 0$ и пару произвольных открытых множеств g, G из Ω таких, что $\bar g$ компактно в G и $\lambda g \ge t$. Тогда по лемме 5
$$t^{\frac{1}{q}} \le (\lambda g)^{\frac{1}{q}} \le C[(\mathrm{cap}_{p,\mu}(g, G))^{\frac{1}{p}} + (\nu G)^{\frac{1}{r}}].$$
Переходя к точной нижней границе в правой части по g и G, получим
$$t^{\frac{1}{q}} \le C\varkappa(t),$$

и необходимость установлена.

Докажем оценку сверху. Действуя аналогично доказательству леммы 5, получим (в прежних обозначениях)

$$\int\limits_{\Omega} |f|^q \, d\lambda \ll \sum_j 2^{qj} \lambda g_j.$$

Продолжая оценку, находим

$$\sum_j 2^{qj} \lambda g_j = \sum_j 2^{qj} \varkappa(\lambda g_j)^q \lambda g_j \varkappa(\lambda g_j)^{-q} \le \mathfrak{A}^q \sum_j 2^{qj} \varkappa(\lambda g_j)^q$$
$$\ll \mathfrak{A}^q \sum_j 2^{qj} [\mathrm{cap}_{p,\mu}(g_j, g_{j-1})^{\frac{1}{p}} + (\nu g_{j-1})^{\frac{1}{r}}]^q \ll \mathfrak{A}^q \Big[\sum_j 2^{qj} \gamma_j^{\frac{q}{p}} + \sum_j 2^{qj} (\nu g_{j-1})^{\frac{q}{r}}\Big].$$

Окончание доказательства совпадает с доказательством леммы 5, начиная с неравенства (5). $\bullet$

Теорема 2. *Пусть* $0 < q < p < \infty$, $p = r \ge 1$ *и* $1/s = 1/q - 1/p$. *Тогда неравенство* (1) *выполнено для всех* $f \in \mathscr{D}(\Omega)$, *если и только если*

$$\mathfrak{D} := \left(\int\limits_0^{\lambda\Omega} (t^{\frac{1}{p}} \varkappa(t)^{-1})^s \, dt \right)^{\frac{1}{s}} < \infty. \tag{7}$$

Более того, $C \approx \mathfrak{D}$ *для наименьшей возможной константы* C *из* (1).

Доказательство. Пусть имеет место (7) и $g_j := L_{2^j}$. Преобразуем левую часть неравенства (1) (применяя неравенство Гёльдера с показателями p/q, s/q):

$$\int\limits_{\Omega} |f|^q \, d\lambda = \sum_j \int\limits_{2^j}^{2^{j+1}} t^q \, d(-\lambda L_t) \ll \sum_j 2^{qj} (\lambda g_j - \lambda g_{j+1})$$
$$= \sum_j 2^{qj} \varkappa(\lambda g_j)^q (\lambda g_j - \lambda g_{j+1}) \varkappa(\lambda g_j)^{-q}$$
$$\le \Big(\sum_j 2^{pj} \varkappa(\lambda g_j)^p\Big)^{\frac{q}{p}} \Big(\sum_j (\lambda g_j - \lambda g_{j+1})^{\frac{s}{q}} \varkappa(\lambda g_j)^{-s}\Big)^{\frac{q}{s}}.$$

Второй сомножитель оценивается с некоторой константой величиной $\mathfrak{D}^q$, ибо

$$\sum_j (\lambda g_j - \lambda g_{j+1})^{\frac{s}{q}} \varkappa(\lambda g_j)^{-s} \le \sum_j \varkappa(\lambda g_j)^{-s} \int\limits_{\lambda g_{j+1}}^{\lambda g_j} dt^{\frac{s}{q}} \le \sum_j \int\limits_{\lambda g_{j+1}}^{\lambda g_j} \varkappa(t)^{-s} dt^{\frac{s}{q}} \le \frac{s}{q} \mathfrak{D}^s.$$

Первый сомножитель оценивается аналогично доказательству леммы 5:

$$\sum_j 2^{pj} \varkappa(\lambda g_j)^p \le \sum_j 2^{pj} [(\mathrm{cap}_{p,\mu}(g_j, g_{j-1}))^{\frac{1}{p}} + (\nu g_{j-1})^{\frac{1}{p}}]^p$$
$$\ll \sum_j 2^{pj} \mathrm{cap}_{p,\mu}(g_j, g_{j-1}) + \sum_j 2^{pj} \nu g_{j-1} \ll \int\limits_{\Omega} |f'|^p \, d\mu + \int\limits_{\Omega} |f|^p \, d\nu.$$

Суммируя обе оценки, получим (1) с константой $C \ll \mathfrak{D}$.

Проведем оценку снизу. Для каждого $j \in \mathbb{Z}$, $2^j < \lambda\Omega$, существует пара открытых множеств g_j, G_j из Ω таких, что $\lambda g_j \geq 2^j$, $\bar{g}_j$ — компакт в G_j и

$$(\mathrm{cap}_{p,\mu}(g_j, G_j))^{\frac{1}{p}} + (\nu G_j)^{\frac{1}{p}} \leq 2\varkappa(2^j).$$

Кроме того, существует $f_j \in \mathscr{F}^1_{p,\mu}(g_j, G_j)$ со свойствами: $0 \leq f_j(x) \leq 1$, $x \in G_j$, $f_j(x) = 1$ на g_j, $f_j(x) = 0$, $x \notin G_j$ и

$$\int_\Omega \left|f_j'\right|^p d\mu \leq 2\mathrm{cap}_{p,\mu}(g_j, G_j).$$

Следовательно,

$$\int_\Omega \left|f_j'\right|^p d\mu + \int_\Omega |f_j|^p \, d\nu \ll \varkappa(2^j)^p.$$

Положим $N := \sup\limits_{n \in \mathbb{N}, 2^n < \lambda\Omega} n$, $\beta_j := [(2^j)^{\frac{1}{p}} \varkappa(2^j)^{-1}]^{\frac{s}{q}}$ и

$$f_n(x) := \max_{n \leq j \leq N} \beta_j f_j(x), \quad x \in \Omega.$$

Тогда

$$|f_n(x)|^p \leq \sum_j \beta_j^p |f_j(x)|^p, \quad \left|f_n'(x)\right|^p \leq \sum_j \beta_j^p |f_j'(x)|^p.$$

Поэтому

$$\int_\Omega |f_n'|^p \, d\mu + \int_\Omega |f_n|^p \, d\nu \ll \sum_j \beta_j^p \varkappa(2^j)^p. \tag{8}$$

Далее, если $\lambda(\{x \in \Omega : |f_n(x)| > \tau\}) < 2^j$, то $\tau \geq \beta_j$, ибо

$$2^j \leq \lambda g_j \leq \lambda(\{x \in \Omega : |f_n(x)| > \beta_j\}).$$

Отсюда вытекает, что $f_n^*(t) \geq \beta_j$, $t \in (0, 2^j)$, где

$$f_n^*(t) := \inf\{s : \lambda(\{x \in \Omega : |f_n(x)| > s\}) \leq t\}.$$

Следовательно,

$$\int_\Omega |f_n|^q \, d\lambda = \int_0^{\lambda\Omega} (f_n^*(t))^q \, dt \geq \sum_j \int_{2^{j-1}}^{2^j} (f_n^*(t))^q \, dt \gg \sum_j \beta_j^q 2^j. \tag{9}$$

Из полученных оценок (8), (9) и неравенства (1) заключаем, что для всех $n \leq N$

$$C \gg \left(\sum_j \beta_j^q 2^j\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_j \beta_j^p \varkappa(2^j)^p\right)^{-\frac{1}{p}} \gg \left(\int_{2^n}^{2^N} (t^{\frac{1}{p}} \varkappa(t)^{-1})^s \, dt\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Отсюда, в частности, с учетом монотонности $\varkappa$ и выбора N следует, что

$$\int_{2^N}^{\lambda\Omega} (t^{\frac{1}{p}} \varkappa(t)^{-1})^s \, dt \ll \varkappa(2^N)^{-s} \int_{2^N}^{\lambda\Omega} dt^{\frac{s}{q}} \ll \int_{2^{N-1}}^{2^N} (t^{\frac{1}{p}} \varkappa(t)^{-1})^s \, dt \ll C^s.$$

Таким образом, $C \gg \mathfrak{D}$, и теорема доказана. $\bullet$

Замечание 1. При $d\mu(x) = dx$, $\nu = 0$ теоремы 1, 2 получены в [10, § 8.5.2–8.5.3; 11] для $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

3. Основные теоремы

Теорема 3. *Пусть $1 \le p \le q < \infty$, $0 < r \le q$ и в разложении Лебега $d\mu(x) = v(x)dx + d\mu_s(x)$ абсолютно непрерывная часть $v(x)$ такова, что*

$$v^{\frac{1}{1-p}} \in L^1_{\rm loc}(\Omega) \text{ при } p > 1, \quad \frac{1}{v} \in L^\infty_{\rm loc}(\Omega) \text{ при } p = 1. \tag{10}$$

Тогда неравенство (1) выполнено для всех $f \in \mathscr{D}(\Omega)$, если и только если

$$\mathscr{A} := \sup_{\bar g \subset G \subseteq \Omega} (\lambda g)^{\frac{1}{q}}((\rho_{p,\mu}(g,G))^{\frac{1}{p}} + (\nu G)^{\frac{1}{r}})^{-1} < \infty, \tag{11}$$

где супремум берется по всем конечным интервалам g и G таким, что $\bar g \subset G \subset \Omega$, а величина $\rho_{p,\mu}(g,G)$ определена в лемме 4. Более того, $\mathscr{A} \le C \ll \mathscr{A}$.

Доказательство. Необходимость и неравенство $\mathscr{A} \le C$ следуют из лемм 5 и 4, достаточность обосновывается по схеме доказательства леммы 5, если неравенство

$$(L_t)^{\frac{1}{q}} \ll \mathscr{A}((\operatorname{cap}_{p,\mu}(L_t, L_{t(1-\varepsilon)}))^{\frac{1}{p}} + (\nu L_{t(1-\varepsilon)})^{\frac{1}{r}}) \tag{12}$$

справедливо для произвольных фиксированных $t > 0$ и $\varepsilon \in (0,1)$. Для доказательства данного неравенства предположим, что $\mathscr{A} < \infty$, и введем следующие обозначения:

$$L_t := \bigcup_i \sigma_i^t, \quad \sigma_i^t := \big(a_i^t, b_i^t\big), \quad \sigma_i^t \cap \sigma_j^t = \varnothing \text{ для } i \ne j, \quad \Sigma_{t,\varepsilon} := \big\{i : \sigma_i^{t(1-\varepsilon)} \ne \varnothing\big\},$$

$$\Sigma^1_{t,\varepsilon} := \big\{i \in \Sigma_{t,\varepsilon} : \sigma_i^{t(1-\varepsilon)} \cap \sigma_j^t = \varnothing,\ i \ne j\big\}, \quad \Sigma^2_{t,\varepsilon} = \Sigma_{t,\varepsilon} \setminus \Sigma^1_{t,\varepsilon}.$$

Пусть также

$$L^{(1)}_{t(1-\varepsilon)} := \bigcup_{i \in \Sigma^1_{t,\varepsilon}} \sigma_i^{t(1-\varepsilon)}, \quad L^{(2)}_{t(1-\varepsilon)} := L_{t(1-\varepsilon)} \setminus L^{(1)}_{t(1-\varepsilon)},$$

$$L^{(1)}_t := \bigcup_{i \in \Sigma^1_{t,\varepsilon}} \sigma_i^t, \quad L^{(2)}_t := L_t \setminus L^{(1)}_t.$$

Каждый интервал из $L^{(2)}_{t(1-\varepsilon)}$ содержит несколько интервалов σ_j^t, так что

$$\sigma_i^{t(1-\varepsilon)} \supset \Delta_i^t \supset \bigcup_{j \in N_i} \sigma_j^t =: L^{(2)}_{i,t}, \quad i \in \Sigma^2_{t,\varepsilon},$$

где

$$a^t_{i,\min} := \min_{j \in N_i} a_j^t, \quad b^t_{i,\max} := \max_{j \in N_i} b_j^t, \quad \Delta_i^t := \big(a^t_{i,\min}, b^t_{i,\max}\big).$$

Следовательно,

$$L^{(2)}_t = \bigcup_{i \in \Sigma^2_{t,\varepsilon}} L^{(2)}_{i,t} = \bigcup_{j \notin \Sigma^1_{t,\varepsilon}} \sigma_j^t \subset \bigcup_{i \in \Sigma^2_{t,\varepsilon}} \Delta_i^t \subset L^{(2)}_{t(1-\varepsilon)}.$$

Используя предыдущие обозначения и (11), находим

$$\lambda\sigma_i^t \ll \mathscr{A}^q\Big(\big(\rho_{p,\mu}\big(\sigma_i^t, \sigma_i^{t(1-\varepsilon)}\big)\big)^{\frac{q}{p}} + \big(\nu\sigma_i^{t(1-\varepsilon)}\big)^{\frac{q}{r}}\Big), \quad i \in \Sigma^1_{t,\varepsilon},$$

и

$$\sum_{j \in N_i} \lambda\sigma_j^t \le \lambda\Delta_i^t \le \mathscr{A}^q\Big(\big(\rho_{p,\mu}\big(\Delta_i^t, \sigma_i^{t(1-\varepsilon)}\big)\big)^{\frac{q}{p}} + \big(\nu\sigma_i^{t(1-\varepsilon)}\big)^{\frac{q}{r}}\Big), \quad i \in \Sigma^2_{t,\varepsilon}.$$

Из этих оценок ввиду неравенства Йенсена с учетом неравенств $q/p \ge 1$, $q/r \ge 1$ и лемм 4, 2 имеем

$$\lambda L_t = \sum_i \lambda\sigma_i^t \le \mathscr{A}^q \Big(\sum_{i\in\Sigma^1_{t,\varepsilon}} \big(\rho_{p,\mu}(\sigma_i^t, \sigma_i^{t(1-\varepsilon)})\big)^{\frac{q}{p}} + \sum_{i\in\Sigma^2_{t,\varepsilon}} \big(\rho_{p,\mu}(\Delta_i^t, \sigma_i^{t(1-\varepsilon)})\big)^{\frac{q}{p}} + \sum_i \big(\nu\sigma_i^{t(1-\varepsilon)}\big)^{\frac{q}{r}}\Big)$$

$$\le \mathscr{A}^q \Big[\Big[\sum_{i\in\Sigma^1_{t,\varepsilon}} \rho_{p,\mu}(\sigma_i^t, \sigma_i^{t(1-\varepsilon)}) \Big]^{\frac{q}{p}} + \Big[\sum_{i\in\Sigma^2_{t,\varepsilon}} \rho_{p,\mu}(\Delta_i^t, \sigma_i^{t(1-\varepsilon)}) \Big]^{\frac{q}{p}} + (\nu L_{t(1-\varepsilon)})^{\frac{q}{r}} \Big]$$

$$\ll \mathscr{A}^q \big((\operatorname{cap}_{p,\mu}(L_t, L_{t(1-\varepsilon)}))^{\frac{q}{p}} + (\nu L_{t(1-\varepsilon)})^{\frac{q}{r}} \big),$$

откуда приходим к (12). •

Замечание 2. Если $\nu \equiv 0$, то (1) сводится к неравенству

$$\Big(\int_\Omega |f|^q \, d\lambda \Big) \le C \Big(\int_\Omega |f'|^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\mu), \tag{13}$$

и теорема 3 дает критерий для (13) в форме

$$\mathscr{A}_0 = \sup_{(a,b)\subset(A,B)\subseteq\Omega} (\lambda(a,b))^{\frac{1}{q}} \min\left\{ \left(\int_A^a v^{\frac{1}{1-p}} \right)^{\frac{1}{p'}}, \left(\int_b^B v^{\frac{1}{1-p}} \right)^{\frac{1}{p'}} \right\} < \infty. \tag{14}$$

Когда $\Omega = (c,d)$, формула (14) может быть упрощена:

$$\mathscr{A}_1 = \sup_{c<a<b<d} (\lambda(a,b))^{\frac{1}{q}} \min\left\{ \left(\int_c^a v^{\frac{1}{1-p}} \right)^{\frac{1}{p'}}, \left(\int_b^d v^{\frac{1}{1-p}} \right)^{\frac{1}{p'}} \right\} < \infty,$$

что совпадает с результатом П. Гурки [4, гл. I, теорема 8.2].

Следующая теорема характеризует интерполяционное неравенство и дополняет известный результат [2, теорема 2.3.9].

Теорема 4. *Пусть* $p \ge 1$, $\delta \in [0,1]$ *и выполнено условие* (10). *Если неравенство*

$$\Big(\int_\Omega |f|^q \, d\lambda \Big)^{\frac{1}{q}} \le C \Big(\int_\Omega |f'|^p \, d\mu \Big)^{\frac{\delta}{p}} \Big(\int_\Omega |f|^r \, d\nu \Big)^{\frac{1-\delta}{r}} \tag{15}$$

выполнено для всех $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ *и некоторых* $r, q > 0$, *то*

$$\mathscr{A}_2 := \sup_{\bar g \subset G \subset \Omega} (\lambda g)^{\frac{1}{q}} (\rho_{p,\mu}(g,G))^{-\frac{\delta}{p}} (\nu G)^{\frac{\delta-1}{r}} < \infty \tag{16}$$

для всех открытых конечных интервалов g *и* G, *при этом* $\mathscr{A}_2 \le C$. *Обратно, если* (16) *выполнено для некоторых* $r, q > 0$ *таких, что* $1/q \le (1-\delta)/r + \delta/p$, *то* (15) *имеет место с* $C \ll \mathscr{A}_2$.

Доказательство. Необходимость обосновывается рассуждением, аналогичным доказательству необходимости в лемме 5. Для верхней оценки $C \ll$

$\mathscr{A}_2$, как и при доказательстве теоремы 3, достаточно показать аналог неравенства (12)

$$(\lambda L_t)^{\frac{1}{q}} \ll \mathscr{A}_2(\operatorname{cap}_{p,\mu}(L_t, L_{t(1-\varepsilon)}))^{\frac{\delta}{p}}(\nu L_{t(1-\varepsilon)})^{\frac{1-\delta}{r}}. \tag{17}$$

Для этого используем конструкцию из доказательства теоремы 3 и покажем только ключевой шаг. Пусть $1/\lambda := \delta/p + (1-\delta)/r \geq 1/q$. Тогда (16) влечет

$$\lambda L_t^{(1)} = \sum_{i\in\Sigma^1_{t,\varepsilon}} \lambda\sigma_i^t \ll \mathscr{A}_2^q \sum_{i\in\Sigma^1_{t,\varepsilon}} \big(\rho_{p,\mu}\big(\sigma_i^t, \sigma_i^{t(1-\varepsilon)}\big)\big)^{\frac{q\delta}{p}} \big(\nu\sigma_i^{t(1-\varepsilon)}\big)^{\frac{q(1-\delta)}{r}}.$$

Применяя неравенства Гёльдера и Йенсена с $\frac{p}{\delta\lambda}$, $\frac{r}{(1-\delta)\lambda}$ и $\frac{q}{\lambda}$ соответственно и используя леммы 4 и 2, находим

$$\lambda L_t^{(1)} \ll \Big(\sum_{i\in\Sigma^1_{t,\varepsilon}} \rho_{p,\mu}(\sigma_i^t, \sigma_i^{t(1-\varepsilon)})\Big)^{\frac{q\delta}{p}} \Big(\sum_{i\in\Sigma^1_{t,\varepsilon}} \nu\sigma_i^{t(1-\varepsilon)}\Big)^{\frac{(1-\delta)q}{r}}$$

$$= \mathscr{A}_2^q\big(\operatorname{cap}_{p,\mu}\big(L_t^{(1)}, L^{(1)}_{t(1-\varepsilon)}\big)\big)^{\frac{q\delta}{p}}\big(\nu L^{(1)}_{t(1-\varepsilon)}\big)^{\frac{(1-\delta)q}{r}}.$$

Вместе с аналогичной оценкой для $\mu L_t^{(2)}$ это приводит к (17). Оценка сверху $C \ll \mathscr{A}_2$ доказана. •

Из леммы 3, теорем 1 и 2 вытекает, что неравенство (1) при соответствующих ограничениях на параметры суммирования p, q и r равносильно тому же неравенству с мерой $d\mu_a(x) = v(x)\,dx$ вместо $d\mu$. Это позволяет обобщить основные результаты Р. Ойнарова из [6] для неравенств (1) с мерами. Остановимся для простоты на случае, когда $\overset{\circ}{W}{}^1_{p,r} = W^1_{p,r}$. Необходимые и достаточные условия выполнения последнего равенства, полученные в [6] для интервала, легко переносятся на произвольные открытые множества действительной оси. Тогда, как показано в [6], при почти всюду ненулевых $v(x)$ и $d\nu(x)$ существуют строго возрастающие непрерывные на Ω функции $a(x)$ и $b(x)$ такие, что $a(x) < x < b(x)$ и

$$\int\limits_{a(x)}^{x} v^{\frac{1}{1-p}} = \int\limits_{x}^{b(x)} v^{\frac{1}{1-p}}, \quad x\in\Omega,$$

$$\left(\int\limits_{a(x)}^{b(x)} d\nu\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int\limits_{a(x)}^{b(x)} v^{\frac{1}{1-p}}\right)^{\frac{1}{p'}} = 1, \quad x\in\Omega.$$

Положим $\Delta(x) = [a(x), b(x)]$, $\delta(x) = [b^{-1}(x), a^{-1}(x)]$. Комбинируя результаты настоящей работы и теоремы 5 из [7], получаем для выполнения неравенства

$$\left(\int\limits_{\Omega} |f|^q\,d\lambda\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left[\left(\int\limits_{\Omega} |f'|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{\Omega} |f|^r\,d\nu\right)^{\frac{1}{r}}\right] \tag{18}$$

следующий критерий.

Теорема 5. *Пусть* $1 < p \leq q < \infty$, $0 < r \leq q$. *Тогда для наименьшей константы* C *в* (18) *выполняется соотношение* $C \approx \mathbb{A}$, *где*

$$\mathbb{A} = \sup_{x\in\Omega}\left(\int\limits_{\delta(x)} d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\Delta(x)} v^{\frac{1}{1-p}}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Если $0 < q < p < \infty$, $p = r > 1$, $1/s = 1/q - 1/p$, *то* $C \approx \mathbb{B}$, *где*

$$\mathbb{B} = \left(\int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\delta(x)} d\lambda \right)^{\frac{s}{p}} \left(\int\limits_{\Delta(x)} v^{\frac{1}{1-p}} \right)^{\frac{s}{p'}} d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{s}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
2. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
3. *Мынбаев К. Т., Отелбаев М. О.* Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. М.: Наука, 1988.
4. *Opic B., Kufner A.* Hardy-type inequalities. Longman: Pitman Research Notes in Math., 1990. V. 129.
5. *Мазья В. Г.* О некоторых интегральных неравенствах для функций многих переменных // Проблемы мат. анализа. Л., 1972. Т. 3. С. 33–68.
6. *Oinarov R.* On weighted norm inequalities with three weights // J. London Math. Soc. 1993. V. 48. P. 103–116.
7. *Степанов В. Д., Ушакова Е. П.* Об интегральных операторах с переменными пределами интегрирования // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2001. Т. 232. С. 298–317.
8. *Maz′ya V. G., Parfenov O. G.* Two-weight criteria of boundedness for Sobolev embedding operator in one-dimensional case. Linköping: Linköping University, 1998.
9. *Рид М., Саймон Б.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
10. *Maz′ya V. G., Poborchi S. V.* Differentiable functions on bad domains. Singapore: World Sci. Publ., 1997.
11. *Maz′ya V. G., Netrusov Yu.* Some counterexamples for the theory of Sobolev spaces on bad domains // Potential anal. 1995. V. 4. P. 47–65.

Статья поступила 21 ноября 2001 г.

Прохоров Дмитрий Владимирович, Степанов Владимир Дмитриевич
Вычислительный центр ДВО РАН, ул. Тихоокеанская, 153, Хабаровск 680042
prohorov@as.khb.ru, stepanov@as.khb.ru