Сибирский математический журнал
Июль—август, 2002. Том 43, № 4

УДК 513.83

О СУЩЕСТВОВАНИИ ФАКТОР–МНОЖЕСТВ ПО ВНЕШНИМ ОТНОШЕНИЯМ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В IST

М. Ф. Прохорова

Аннотация: В рамках аксиоматики IST нестандартного анализа исследуется возможность задания внешними формулами фактор-множеств вещественной прямой по внешним отношениям эквивалентности. Рассмотрен случай аддитивного выпуклого отношения эквивалентности, класс эквивалентности которого задается формулой с внешними кванторами всеобщности. Показано, что в этом случае внешняя функция, выбирающая из каждого класса эквивалентности по одному представителю, существует тогда и только тогда, когда это отношение с точностью до сдвига и растяжения совпадает с отношением бесконечной близости.

Ключевые слова: нестандартный анализ, теория внутренних множеств, внешние формулы, внешние фактор-множества

1. Введение

В. Г. Кановей в [1] рассматривает ряд «внешних» аналогов теорем классической теории множеств, представляющих интерес для исследования в аксиоматике нестандартного анализа, предложенной Э. Нельсоном, — теории внутренних множеств IST [2]. В данной статье исследуется «внешний» аналог построения фактор-множеств по внешним отношениям эквивалентности, точнее, вопрос о существовании внешних функций, выбирающих из каждого класса эквивалентности по одному представителю, что является частным случаем «внешнего» аналога аксиомы выбора.

В статье используются следующие понятия, принятые в теории внутренних множеств [1]. *Внешняя формула* — формула IST, возможно, содержащая предикат стандартности и не являющаяся поэтому формулой ZFC. *Внешнее множество* — совокупность элементов, задаваемая внешней формулой. В общем случае такие совокупности не являются множествами (в смысле аксиоматики теории множеств), и при работе с ними необходимо соблюдать определенную осторожность, однако большинство приложений теории внутренних множеств основано на их использовании. В отличие от так называемых «наружных множеств» внешние множества при конструктивном подходе не зависят от выбора модели.

Элементы стандартных множеств называются *ограниченными*.

Е. И. Гордон в статье [3] определяет предикат «стандартный относительно t» (t-стандартный):

$$x \operatorname{st} t \Leftrightarrow \exists^{\mathrm{st}} \varphi : (F \operatorname{fin}(\varphi)) \;\&\; (t \in \operatorname{dom}\varphi) \;\&\; (x \in \varphi(t))$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00–15–96042).

(здесь $F\operatorname{fin}(\varphi)$ означает, что φ — функция и все принимаемые ею значения — конечные множества). Там же определяются понятия t-бесконечно малого, t-бесконечно большого и t-конечного вещественных чисел. Назовем x *t-околостандартным*, если существует t-стандартное y, t-бесконечно близкое к x [4]. В [3] доказано, что для некоторого нестандартного натурального N не все точки отрезка $I = [0,1]$ N-околостандартны. Автором в [4, 5] показано, что вообще для произвольного нестандартного t неизмеримой сложности, где сложность t определяется формулой $\operatorname{compl} t = \min\{\operatorname{card} T : \operatorname{st}(T)\ \ \&\ \ t \in T\}$, и произвольного стандартного топологического хаусдорфова пространства X, не являющегося разреженным компактом (в частности, для единичного отрезка I), не все точки X t-околостандартны.

Итак, t-стандартных точек в I «слишком мало» для того, чтобы образовать внешнее фактор-множество I/ρ_t, где ρ_t — внешнее отношение t-бесконечной близости, $\rho_t(x,y) = (x \overset{t}{\approx} y)$. Это означает, что среди t-стандартных вещественных чисел имеются «дыры» — отрезки t-стандартной (ненулевой) длины, внутри которых нет ни одной t-стандартной точки. Но, может быть, можно заполнить эти «дыры» точками какого-нибудь внешнего множества, либо вообще определить такое внешнее множество $M_t \subset I$, зависящее от параметра $t \in T$, чтобы все-таки получить фактор-множество по отношению t-бесконечной близости?

Сформулируем наши требования к $M_t \subset I$:

$$\forall x \in I\, \exists y \in M_t\ x \overset{t}{\approx} y, \quad \forall x_1, x_2 \in M_t\ (x_1 \overset{t}{\approx} x_2) \Rightarrow (x_1 = x_2). \tag{1}$$

2. О возможности глобального определения выбирающей функции (заданной при всех значениях параметра)

Теорема 1. *Для стандартного бесконечного множества T не существует внешней формулы $\varphi(x,t)$ такой, что при всех значениях параметра $t \in T$ для внешнего множества $M_t = {}^E\{x \in I : \varphi(x,t)\}$ выполняются условия* (1).

Здесь и всюду далее в тексте статьи слово «формула» означает «ext-ограниченная формула» [1], т. е. формула с областями изменения переменных во внешних кванторах, ограниченных стандартными множествами (такие внешние кванторы называются ограниченными). В конкретных приложениях IST, как правило, не используются внешние формулы, не являющиеся ext-ограниченными. Левый индекс E у фигурных скобок принято писать, чтобы подчеркнуть, что сформированная в результате совокупность элементов может не являться внутренним множеством.

Эта теорема является частным случаем более общего утверждения, которое и будет доказано ниже.

Пусть $\mathscr{E}$ — стандартное непустое множество функций, действующих из стандартного бесконечного множества T в множество строго положительных вещественных чисел $\mathbb{R}_+$, μ_t — сечение монады фильтра, порожденного семейством $\Gamma_\varepsilon = \{(t,x) : t \in T, |x| < \varepsilon(t)\}$, $\varepsilon \in \mathscr{E}$, окрестностей подмножества $T \times \{0\}$ произведения $T \times \mathbb{R}$:

$$\mu_t = {}^E\{x \in \mathbb{R} : \forall^{\mathrm{st}} \varepsilon \in \mathscr{E}\ |x| < \varepsilon(t)\}. \tag{2}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\mathscr{E}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathscr{E} \quad \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \in \mathscr{E}, \\ \forall \varepsilon_1 \in \mathscr{E}\, \forall \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+^T \quad (\forall t \in T\ \varepsilon_2(t) \geq \varepsilon_1(t)) \Rightarrow (\varepsilon_2 \in \mathscr{E}).\end{gathered} \tag{3}$$

(в противном случае можно расширить $\mathscr{E}$ до множества, обладающего этим свойством, не изменяя μ_t).

Потребуем, кроме того, чтобы μ_t при любом t не покрывало I, т. е.

$$\forall t \in T\, \exists^{\mathrm{st}} \varepsilon \in \mathscr{E} \quad \varepsilon(t) \leq 1. \tag{4}$$

Пример 1. $\mathscr{E}$ состоит только из констант, μ_t — множество бесконечно малых чисел.

Пример 2. $\mathscr{E}$ содержит все функции, действующие из T в $\mathbb{R}_+$, μ_t — множество t-бесконечно малых чисел.

Пример 3. $\mathscr{E}$ порождено степенными функциями $\{t \to t^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $T = (0, 1)$, μ_t здесь меньше, чем в первом примере, но больше, чем во втором.

В двух последних примерах $\mathscr{E}$ обладает еще одним свойством: существует стандартная функция $\lambda : T \to \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\forall \varepsilon \in \mathscr{E}\ \lambda \cdot \varepsilon \in \mathscr{E}, \quad \exists t_0 \in T\ \lambda(t_0) \approx 0. \tag{5}$$

Теорема 2. *Для стандартного бесконечного множества T и $\mathscr{E}$, удовлетворяющего условиям* (3)–(5), *не существует внешней формулы $\varphi(x, t)$ такой, что при всех значениях параметра $t \in T$ для внешнего множества $M_t = {}^E\{x \in I : \varphi(x, t)\}$ выполняются следующие условия:*

$$\forall x \in I\, \exists y \in M_t\ (x - y) \in \mu_t, \quad \forall x_1, x_2 \in M_t\ ((x_1 - x_2) \in \mu_t) \Rightarrow (x_1 = x_2), \tag{6}$$

где μ_t определено формулой (2).

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon \equiv 1$ содержится в $\mathscr{E}$ (в противном случае возьмем произвольное стандартное $\varepsilon_0 \in \mathscr{E}$ такое, что $\varepsilon_0(t_0) \leq 1$, и сузим T до стандартного множества $T' = \{t \in T : \varepsilon_0(t) \leq 1\}$, $t_0 \in T'$).

Предположим, что описанная в условии теоремы формула $\varphi(x, t)$ существует. Тогда она эквивалентна в IST некоторой Σ_2^{st}-формуле [1], т. е. формуле вида

$$\exists^{\mathrm{st}} a \in \mathscr{A}\, \forall^{\mathrm{st}} c \in \mathscr{C} \quad \psi(x, a, c, t),$$

где ψ — внутренняя формула, а множества $\mathscr{A}$ и $\mathscr{C}$ стандартны. Определим стандартное множество $\mathscr{B} = \mathscr{P}^{\mathrm{fin}}(\mathscr{C})$ конечных подмножеств $\mathscr{C}$ и стандартное отображение $M : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \times T \to \mathscr{P}(I)$:

$$M(a, b, t) = \{x \in I : \forall c \in b \quad \psi(x, a, c, t)\}.$$

Тогда

$$M_t = {}^E\{x \in I : \exists^{\mathrm{st}} a \in \mathscr{A}\, \forall^{\mathrm{st}} b \in \mathscr{B} \quad x \in M(a, b, t)\}, \tag{7}$$

причем отображение M обладает свойством

$$\forall^{\mathrm{fin}} B \in \mathscr{B}\, \exists b \in B\, \forall a \in \mathscr{A}, t \in T \quad M(a, b, t) = \cap\{M(a, \beta, t) : \beta \in B\} \tag{8}$$

(в качестве такого b можно взять, например, $\cup B$).

Сформулируем свойства (6) в терминах отображения M:

$$\forall t \in T\, \forall x \in I\, \exists y \in I\, \exists^{\mathrm{st}} a \in \mathscr{A}\, \forall^{\mathrm{st}} b \in \mathscr{B}\, \forall^{\mathrm{st}} \varepsilon \in \mathscr{E} \quad y \in M(a,b,t)\ \&\ |x-y| < \varepsilon(t),$$

$$\forall t \in T\, \forall x_1, x_2 \in I\, \forall^{\mathrm{st}} a_1, a_2 \in \mathscr{A}\, \exists^{\mathrm{st}} b_1, b_2 \in \mathscr{B}\, \exists^{\mathrm{st}} \varepsilon \in \mathscr{E}$$
$$(x_1 \notin M(a_1,b_1,t)) \vee (x_2 \notin M(a_2,b_2,t)) \vee (x_1 = x_2) \vee (|x_1 - x_2| > \varepsilon(t)).$$

Применяя к этим внешним формулам алгоритм Нельсона [2], получаем эквивалентные им внутренние формулы:

$$\forall b \in \mathscr{B}^{\mathscr{A}}, \varepsilon \in \mathscr{E}^{\mathscr{A}}\, \exists^{\mathrm{fin}} A \subseteq \mathscr{A}\, \forall x \in I, t \in T\, \exists a \in \mathscr{A}\, \exists y \in M(a, b(a), t)\ |x-y| < \varepsilon(a,t),$$

$$\forall a_1, a_2 \in \mathscr{A}\, \exists b_1, b_2 \in \mathscr{B}\, \exists \varepsilon \in \mathscr{E}\, \forall t \in T \forall x_1, x_2 \in I$$
$$(x_1 \notin M(a_1,b_1,t)) \vee (x_2 \notin M(a_2,b_2,t)) \vee (x_1 = x_2) \vee (|x_1 - x_2| > \varepsilon(t)).$$

Их можно упростить:

$$\forall b \in \mathscr{B}^{\mathscr{A}}\, \forall \varepsilon \in \mathscr{E}^{\mathscr{A}}\, \exists^{\mathrm{fin}} A \subseteq \mathscr{A}\, \forall t \in T \quad I \subseteq \cup\{U_{\varepsilon(a,t)} M(a, b(a), t) : a \in A\}, \tag{9}$$

$$\forall a_1, a_2 \in \mathscr{A}\, \exists b \in \mathscr{B}, \varepsilon \in \mathscr{E}\, \forall t \in T \quad \bar\rho(M(a_1,b,t), M(a_2,b,t)) > \varepsilon(t). \tag{10}$$

Здесь $\bar\rho(M_1, M_2) = \inf\{|x_1 - x_2| : x_i \in M_i, x_1 \neq x_2\}$, $U_\varepsilon M$ — ε-окрестность множества M, b в (10) находится по $B = \{b_1, b_2\}$ из свойства (8) ($(M_1 \cap M_2) \times (M_1 \cap M_2) \subseteq M_1 \times M_2$, а $\bar\rho$ — монотонная функция). Фактически вместо (10) нам будет достаточно более слабого утверждения:

$$\forall a \in \mathscr{A}\, \exists b \in \mathscr{B}, \varepsilon \in \mathscr{E}\, \forall t \in T \quad \bar\rho(M(a,b,t)) > \varepsilon(t), \tag{11}$$

где $\bar\rho(M) = \bar\rho(M,M)$.

Докажем, что условия (9) и (11) несовместны. Из (11) находим

$$\exists \bar b \in \mathscr{B}^{\mathscr{A}} \exists \bar\varepsilon \in \mathscr{E}^{\mathscr{A}} \forall a \in \mathscr{A}, t \in T \quad \bar\rho(M(a, \bar b(a), t)) > \bar\varepsilon(a,t).$$

Положим $\varepsilon_a(t) = \lambda(t) \cdot \min(1, \bar\varepsilon_a(t))$, и определим из (9) конечное $A \subseteq \mathscr{A}$ по функциям $\bar b_a$, ε_a. Получим $I = \cup\{U_{\varepsilon_a(t)} m(a,t) : a \in \mathscr{A}\}$, где $m(a,t) = M(a, \bar b_a, t)$. Но из (11) следует, что $m(a,t)$ — конечное множество точек, находящихся друг от друга на расстоянии, не меньшем чем $\bar\varepsilon_a(t)$. Поэтому $\operatorname{card} m(a,t) \le 1 + (\bar\varepsilon_a(t))^{-1}$ и

$$1 = \operatorname{mes} I \le \sum_{a \in A} 2\varepsilon_a(t)(1 + (\bar\varepsilon_a(t))^{-1}) \le 4\lambda(t) \cdot \operatorname{card} A. \tag{12}$$

Так как $\lambda(t)$ при $t \in T$ принимает сколь угодно малые значения, то (12) не может быть выполнено при всех $t \in T$. Полученное противоречие показывает, что условия (9) и (11) несовместны.

3. Отношения близости и ауры

Всюду выше речь шла о построении множества M_t, удовлетворяющего определенным условиям при всех значениях параметра t. Было показано, что такого множества не существует. Но это не исключает возможности существования M_t при каком-то одном определенном значении t. Кроме того, хотелось бы рассматривать внешние отношения эквивалентности с нестандартным параметром «локально», не будучи стесненными рамками целого семейства этих отношений при t, пробегающем стандартное множество. Ниже будут исследованы и классифицированы такие «локально заданные» внешние отношения эквивалентности на $\mathbb{R}$ и для части из них решен вопрос о существовании внешней выбирающей функции.

Пусть $\rho(x,y)$ — внешняя формула (возможно, зависящая от нестандартного параметра t), описывающая внешнее отношение эквивалентности на стандартном множестве X, т. е.

$$\forall x,y,z \in X\ \rho(x,x)\ \ \&\ \ [\rho(x,y) \Rightarrow \rho(y,x)]\ \ \&\ \ [\rho(x,y)\ \ \&\ \ \rho(y,z) \Rightarrow \rho(x,z)].$$

Существует ли (для фиксированного значения параметра) внешняя формула $\varphi(x)$ (зависящая от того же параметра, что и ρ), выбирающая из каждого класса эквивалентности X/ρ по одному элементу? Именно, φ должна удовлетворять условиям

$$\begin{gathered}\forall x \in X\, \exists y \in X\ \varphi(y)\ \ \&\ \ \rho(x,y),\\ \forall x_1,x_2 \in X\ [\varphi(x_1)\ \ \&\ \ \varphi(x_2)\ \ \&\ \ \rho(x_1,x_2)] \Rightarrow (x_1 = x_2).\end{gathered} \tag{13}$$

Мы исследуем этот вопрос для определенного класса отношений эквивалентности на $\mathbb{R}$.

Назовем внешнее отношение эквивалентности ρ (возможно, зависящее от нестандартного параметра) *близостью*, если (при данном значении параметра) ρ обладает свойствами аддитивности:

$$\forall x_1,x_2,y_1,y_2 \in \mathbb{R}\quad [\rho(x_1,y_1)\ \ \&\ \ \rho(x_2,y_2)] \Rightarrow \rho(x_1+x_2,y_1+y_2),$$

выпуклости:

$$\forall x,y,z \in \mathbb{R}\quad [\rho(x,z)\ \ \&\ \ x \le y \le z] \Rightarrow [\rho(x,y)\ \ \&\ \ \rho(y,z)],$$

невырожденности:

$$\forall x \in \mathbb{R}\, [\exists y \in \mathbb{R}\quad (y \ne x)\ \ \&\ \ \rho(x,y)]\ \ \&\ \ [\exists z \in \mathbb{R}\, \neg\rho(x,z)].$$

В силу аддитивности $\rho(x,y) \Leftrightarrow \rho(x-y,0)$. Рассмотрим внешнее множество $\mu = {}^{E}\{x \in \mathbb{R} : \rho(x,0)\}$. Оно полностью описывает ρ и обладает следующими свойствами:

$$\mu+\mu = -\mu = \mu, \quad (x \in \mu, |y| \le x) \Rightarrow y \in \mu, \quad \mu \notin \{\varnothing, \{0\}, \mathbb{R}\}. \tag{14}$$

Обратно, каждому множеству μ, обладающему этими свойствами, соответствует отношение близости ρ.

В [6, 7] множества, удовлетворяющие условиям (14) (т. е. нетривиальные выпуклые внешние подгруппы $\mathbb{R}$ по сложению), названы *аурами*. Там же исследованы их свойства и определены некоторые операции над ними. Перечислим здесь те определения и свойства аур из [6, 7], которые понадобятся для формулировки и доказательства теоремы о существовании выбирающей функции.

Предложение 1. *Любую ауру можно задать формулой с единственным внешним квантором.*

Ауры можно классифицировать по типам задающих их внешних формул: будем называть ауру Σ- или Π-*аурой*, если она задается Σ_1^{st}- или Π_1^{st}-формулой соответственно (т. е. в зависимости от того, является ли внешний квантор в задающей ауру формуле квантором существования или всеобщности). Тип задающей ауру внешней формулы определяется однозначно, т. е. никакая аура не может быть Σ- и Π-аурой одновременно.

Заметим, что Π-аура является обобщением понятия π-монады супербесконечно малых вещественных чисел [8], а Σ-аура — обобщением понятия галактики.

Предложение 2. *Любая аура с ограниченным параметром t может быть записана в виде*

$$^{E}\{x \in \mathbb{R} : \forall^{\mathrm{st}} \varepsilon \in \mathscr{E} \quad |x| < \varepsilon(t)\} \tag{15}$$

или

$$^{E}\{x \in \mathbb{R} : \exists^{\mathrm{st}} \varepsilon \in \mathscr{E} \quad |x| < \varepsilon(t)\} \tag{16}$$

(в зависимости от ее типа), где $\mathscr{E}$ — некоторое стандартное множество функций из T в $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющее условиям (3), *T — стандартное множество, содержащее t.*

Семейство аур обладает структурой полугруппы по умножению с единицей — аурой конечных чисел (будем далее обозначать ее через e). Две ауры μ и ν называются *подобными*, если существует такое вещественное $\lambda > 0$, что $\mu = \lambda\nu$. Очевидно, что подобными могут быть только ауры одного и того же типа. Назовем *производной* μ ауру $\mu' = {}^{E}\{c \in \mathbb{R} : c\mu \subseteq \mu\}$.

Предложение 3. *Ауры одного типа подобны тогда и только тогда, когда их производные совпадают.*

Примеры аур.

1. Множества бесконечно малых и t-бесконечно малых вещественных чисел являются П-аурами (обозначим ауру бесконечно малых чисел через μ_0).

2. Множества конечных и t-конечных вещественных чисел являются Σ-аурами.

3. Множество ${}^{E}\{x \in \mathbb{R} : \forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N} \quad |x| < t^n\}$, $0 < t < 1$, t не бесконечно близко к единице, является П-аурой.

4. Множество ${}^{E}\{x \in \mathbb{R} : \forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0 \quad |x| < \exp(\varepsilon t)\}$, $t > 0$ бесконечно велико, также является П-аурой.

4. О возможности локального определения выбирающей функции (при некотором значении параметра)

Теорема 3. *Пусть ρ — отношение близости (возможно, зависящее от фиксированного нестандартного ограниченного параметра t), его аура μ является П-аурой. Внешняя формула φ, выделяющая по одному элементу из каждого класса эквивалентности $\mathbb{R}/\rho$, существует тогда и только тогда, когда μ подобна ауре бесконечно малых $\mu_0 = {}^{E}\{x \in \mathbb{R} : x \approx 0\}$.*

Заметим, что если не существует внешней выбирающей формулы для $\mathbb{R}/\rho$, то не существует внешней выбирающей формулы и для $[0, N]/\rho$, для произвольной положительной константы N, не принадлежащей μ.

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что φ имеет единственный нестандартный параметр t (если φ имеет нестандартный параметр p, то как φ, так и μ можно считать зависящими от единственного параметра — пары $\langle p, t\rangle$).

1. Если μ подобна μ_0, $\mu = \lambda\mu_0$, то в качестве искомой формулы φ можно взять формулу

$$\exists^{\mathrm{st}} a \in [0, 1) \exists n \in \mathbb{N} \quad x = \lambda(n + a).$$

Так, при $\lambda = 1$ из каждого класса эквивалентности выбирается представитель, дробная часть которого стандартна.

2. Пусть μ не подобна μ_0. Можно считать без ограничения общности, что $1 \notin \mu$ (в противном случае заменим μ подобной ей аурой).

Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 2, приведем φ к Σ_2^{st}-виду:

$$\varphi(x,t) \Leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} a \in \mathscr{A}\, \forall^{\mathrm{st}} b \in \mathscr{B} \quad x \in M(a,b,t))$$

(отображение M удовлетворяет свойству (8)), а μ запишем в виде (15):

$$\mu = {}^{E}\{x \in \mathbb{R} : \forall^{\mathrm{st}} \varepsilon \in \mathscr{E} \quad |x| < \varepsilon(t)\}.$$

Если μ не подобна μ_0 и φ удовлетворяет условиям теоремы, то для заданного t выполняются следующие три утверждения, последнее из которых уже встречалось в доказательстве теоремы 2:

$$\exists^{\mathrm{st}} \lambda \in \mathscr{E}^{\mathscr{E}} \forall^{\mathrm{st}} \varphi \in \mathscr{E}, n \in \mathbb{N}\ f(t) > n\lambda_f(t),$$
$$\exists^{\mathrm{st}} A \in (\mathscr{P}^{\mathrm{fin}}(\mathscr{A}))^{\mathscr{B}^{\mathscr{A}} \times \mathscr{E}^{\mathscr{A}}} \forall^{\mathrm{st}} b \in \mathscr{B}^{\mathscr{A}}, \varepsilon \in \mathscr{E}^{\mathscr{A}}\ \mathbb{R} = \cup\{U_{\varepsilon_a(t)} M(a, b_a, t) : a \in A(b,\varepsilon)\},$$
$$\exists^{\mathrm{st}} \delta \in \mathscr{E}^{\mathscr{A}}, d \in \mathscr{B}^{\mathscr{A}} \forall^{\mathrm{st}} c \in \mathscr{A} \quad \bar\rho(M(c, d_c, t)) > \delta_c(t).$$

Следовательно, существует $t \in T$, для которого выполнены все три условия. Запишем последнее требование в виде эквивалентной внутренней формулы:

$$\exists A \in (\mathscr{P}^{\mathrm{fin}}(\mathscr{A}))^{\mathscr{B}^{\mathscr{A}} \times \mathscr{E}^{\mathscr{A}}}, \delta \in \mathscr{E}^{\mathscr{A}}, d \in \mathscr{B}^{\mathscr{A}}, \lambda \in \mathscr{E}^{\mathscr{E}} \forall^{\mathrm{fin}} B \subset \mathscr{B}^{\mathscr{A}}, E \subset \mathscr{E}^{\mathscr{A}},$$
$$C \subset \mathscr{A}, F \subset \mathscr{E}, M \subset \mathbb{N}\, \exists t \in T, \forall b \in B, \varepsilon \in E,$$
$$c \in C, f \in F, n \in M \quad t \in T^1(f,n) \cap T^2(b,\varepsilon) \cap T^3(c), \tag{17}$$

где $T^1(f,n) = \{t \in T : f(t) > n\lambda_f(t)\}$, $T^2(b,\varepsilon) = \{t \in T : \mathbb{R} = \cup\{U_{\varepsilon_a(t)} M(a, b_a, t) : a \in A(b,\varepsilon)\}\}$, $T^3(c) = \{t \in T : \bar\rho(M(c, d_c, t)) > \delta_c(t)\}$.

Зафиксируем те значения A, δ, d, λ, при которых выполняется (17), и пусть ε_1 — произвольная функция из $\mathscr{E}$ такая, что $\varepsilon(t) \le 1$ (такая функция существует в силу условия $1 \notin \mu$), $\mu_a = \min(\varepsilon_1, \delta_a) \in \mathscr{E}^{\mathscr{A}}$ (минимум берется при каждом значении a), $\bar\varepsilon_a = \lambda(\mu_a) \in \mathscr{E}^{\mathscr{A}}$, $\overline{A} = A(d, \bar\varepsilon) \in \mathscr{P}^{\mathrm{fin}}(\mathscr{A})$, $\bar n = 1 + 4\,\mathrm{card}\,\overline{A}$. Существует t, принадлежащее одновременно трем множествам

$$\bigcap_{a \in \overline{A}} T^1(\delta_a, \bar n), \quad T^2(d, \bar\varepsilon), \quad \bigcap_{a \in \overline{A}} T^3(a).$$

При этом значении t

$$\forall a \in \overline{A} \quad \bar\rho(M(a, d_a, t)) > \delta_a(t) \ge \mu_a(t),$$
$$\forall a \in \overline{A} \quad \bar\varepsilon_a(t) < \mu_a(t)/\bar n,$$
$$I \subseteq \bigcup_{a \in \overline{A}} U_{\bar\varepsilon_a(t)} M(a, d_a, t).$$

Но тогда

$$1 = \mathrm{mes}\, I \le \sum_{a \in \overline{A}} 2\bar\varepsilon_a(t)\bigl(1 + \mu_a^{-1}(t)\bigr) \le \sum_{a \in \overline{A}} 4\bar\varepsilon_a(t)/\mu_a(t) \le 4\,\mathrm{card}\,\overline{A}/\bar n < 1.$$

Полученное противоречие показывает, что если для какого-то значения t μ не подобна μ_0, то при этом значении параметра не существует искомой функции $\varphi(x,t)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Нетрудно убедиться, что эта теорема является обобщением теоремы 2. Для значения параметра t_0, удовлетворяющего условию (4), множество $\mu = \{x \in \mathbb{R} : \forall^{\mathrm{st}} \varepsilon \in \mathscr{E} \quad |x| < \varepsilon(t_0)\}$ является аурой, так как в силу (4)

$\lambda(T_0)^{-1}\mu \le \mu$, а $\lambda(t_0)^{-1}$ бесконечно велико. По той же причине $\lambda(t_0)^{-1}$ содержится в μ' и не содержится в $\mu_0' = e$, т. е. по предложению 3 μ не подобна μ_0. Следовательно, по теореме 3 не существует внешней выбирающей функции для отношения близости, соответствующего ауре μ, и, значит, не существует глобальной внешней выбирающей функции на всем множестве T. Тем не менее мы не стали опускать доказательство теоремы 2, так как оно намного более прозрачно, чем доказательство последней теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кановей В. Г.* Неразрешимые гипотезы в теории внутренних множеств Эдварда Нельсона // Успехи мат. наук. 1991. Т. 46, № 6. С. 3–50.

2. *Nelson E.* Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83, N 6. P. 1165–1198.

3. *Гордон Е. И.* Относительно стандартные элементы в теории внутренних множеств Е. Нельсона // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 1. С. 89–95.

4. *Прохорова М. Ф.* Внешняя равномощность конечных множеств в нестандартном анализе // Проблемы теоретической и прикладной математики. Информационные материалы. Екатеринбург: Уро РАН, 1993. С. 91.

5. *Прохорова М. Ф.* Об относительной околостандартности в IST // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 600–603.

6. *Прохорова М. Ф.* О внешнем аналоге аксиомы выбора в нестандартном анализе // Проблемы теоретической и прикладной математики. Информационные материалы. Екатеринбург: Уро РАН, 1997. С. 17–19.

7. *Прохорова М. Ф.* О внешнем аналоге аксиомы выбора в IST. Екатеринбург, 1999. 23 с. Деп. в ВИНИТИ 29.10.99, № 3246-В99.

8. *Benninghofen B., Richter M. M.* A general theory of superinfinitesimals // Fund. Math. 1987. V. 128, N 3. P. 199–215.

Статья поступила 5 мая 2000 г.

Прохорова Марина Файвушевна
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620219
pmf@imm.uran.ru