Сибирский математический журнал
Июль—август, 2002. Том 43, № 4

УДК 517.956

О ДВОЙСТВЕННОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. А. Шлапунов

Аннотация: Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ со связной вещественно аналитической границей, A — эллиптическая система с вещественно аналитическими коэффициентами в окрестности замыкания $\overline{D}$ области D, а $\mathrm{sol}(A, D)$ — пространство решений системы $Au = 0$ в области D, снабженное стандартной топологией Фреше — Шварца. Тогда сопряженное к пространству $\mathrm{sol}(A, D)$ представлено как пространство $\mathrm{sol}(A, \overline{D})$ решений системы $Au = 0$ в окрестности $\overline{D}$, снабженное стандартной топологией индуктивного предела по некоторой убывающей последовательности окрестностей $\overline{D}$. Соответствующее спаривание получено с помощью скалярного произведения в пространстве Лебега $L^2(D)$.

Ключевые слова: двойственность, эллиптический оператор, задача Неймана

1. Введение

Пусть X — область (открытое связное подмножество) в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, и пусть

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) D^\alpha \quad (x \in X)$$

— $(l \times k)$-матричный дифференциальный оператор порядка $m \geq 1$ с вещественно аналитическими коэффициентами (над полем $\mathbb{C}$) в X.

Будем предполагать, что главный символ

$$\sigma(A)(x, \zeta) = \Big(\sum_{|\alpha| = m} A_\alpha(x) \zeta^\alpha \Big) : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^l$$

оператора A инъективен, т. е. $l \geq k$ и $\mathrm{rang}(\sigma(x, \zeta)) = k$ для всех $x \in X$ и всех $\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. При $l = k$ будем называть такие операторы *эллиптическими*, а при $l > k$ — *переопределенными эллиптическими*.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей. Будем называть (комплекснозначную k-векторную) функцию $u \in [C^m(D)]^k$ *решением оператора A в области D*, если $Au = 0$ в D. Хорошо известно, что всякое решение оператора A является вещественно аналитическим (см., например, [1]).

Обозначим через $\mathrm{sol}(A, D)$ пространство решений оператора A в области D, снабженное стандартной топологией Фреше — Шварца, т. е. топологией равномерной сходимости вместе со всеми производными на компактных подмножествах D.

Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки (грант 10F032M).

Обозначим через $\mathrm{sol}(A,D)'$ сопряженное пространство для $\mathrm{sol}(A,D)$. Снабдим его сильной топологией, т. е. топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах $\mathrm{sol}(A,D)$.

Как известно, любая удачная характеризация двойственного пространства $\mathrm{sol}(A,D)'$ дает дополнительную информацию о решениях оператора A (ряды Голубева, см. [2], теоремы о стирании особенностей, см. [3], и т. д.).

Существуют несколько классических представлений сопряженного пространства для $\mathrm{sol}(A,D)$, как, например, двойственность Гротендика (см. [4]), где для построения спаривания используется подходящая формула Грина. В настоящей работе спаривание получено с помощью скалярного произведения в пространстве Лебега $L^2(D)$.

Сформулируем коротко один из основных результатов этой работы.

Пусть $\mathrm{sol}(A,\overline{D})$ обозначает пространство решений оператора A в окрестности замыкания области D, снабженное стандартной топологией индуктивного предела по некоторой убывающей последовательности окрестностей $\overline{D}$. Более точно, говорят, что *функция u принадлежит* $\mathrm{sol}(A,\overline{D})$, если существует окрестность U замыкания $\overline{D}$ области D, в которой $Au=0$. Говорят также, что *последовательность* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathrm{sol}(A,\overline{D})$ *сходится* в этом пространстве к некоторому элементу u, если существует такая окрестность U замыкания области D, что $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к u в пространстве $\mathrm{sol}(A,U)$.

Теорема 1. *Предположим, что оператор A эллиптический, а граница области D является связной и вещественно аналитической. Тогда* $\mathrm{sol}(A,D)'$ *топологически изоморфно пространству* $\mathrm{sol}(A,\overline{D})$.

Для пространств голоморфных функций в односвязных областях в $\mathbb{C}$ и (p,q)-круговых областях в $\mathbb{C}^2$ аналогичная теорема была доказана Л. А. Айзенбергом и С. Г. Гиндикиным [5]. П. М. Цорн [6] получил похожие результаты для пространств голоморфных функций в строго псевдовыпуклых областях в $\mathbb{C}^n$, используя скалярное произведение в пространстве $L^2(D)$. Е. Л. Стаут [3] получил похожие результаты для пространств гармонических функций, применяя для построения спаривания скалярное произведение в пространствах Харди.

В работе [7] аналогичная теорема была доказана для системы A с инъективным символом и вещественно аналитическими коэффициентами в областях, которые имеют вещественно аналитические границы и обладают некоторыми свойствами выпуклости относительно A. Однако при этом было использовано другое (очень громоздкое) спаривание.

2. Построение спаривания

Предположим, что граница области D является связной вещественно аналитической (и гладкой). Пусть $\rho(x)$ — определяющая функция области D, т. е. такая действительнозначная функция, определенная в некоторой окрестности $\overline{D}$, что $|\nabla\rho|\neq 0$ на ∂D и $D=\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x)>0\}$. Будем считать, что ρ вещественно аналитична в некоторой окрестности ∂D (это возможно, так как ∂D вещественно аналитична).

Для $\delta\in\mathbb{R}$ положим $D_\delta=\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x)>\delta\}$. Тогда $D_\delta\Subset D\Subset D_{-\delta}$ для достаточно малых $\delta>0$, а $\partial D_{\pm\delta}$ связные вещественно аналитические (и гладкие).

Чтобы сформулировать следующее утверждение, для комплексных векторов u и v введем обозначение $v^*u=\sum\limits_{s=1}^{k}\bar v_s u_s$.

Теорема 2. *Пусть ∂D связна и вещественно аналитична. Тогда для любой $u \in \mathrm{sol}(A, D)$ и любой $v \in \mathrm{sol}(A, \overline{D})$ существует предел*

$$h(u,v) = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{D_\delta} v^*(x)u(x)\,dx. \tag{1}$$

Более того, спаривание (1) *индуцирует инъективное непрерывное сопряженно-линейное отображение $J : \mathrm{sol}(A, \overline{D}) \to \mathrm{sol}(A, D)'$.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Пусть

$$\frac{\partial}{\partial\nu} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial x_s}\frac{\partial}{\partial x_s}$$

— нормальная производная относительно границы области D, а $B_j = \frac{\partial^j}{\partial\nu^j} I_k$ — j-я нормальная производная ($j \ge 0$), умноженная на единичную ($k{\times}k$)-матрицу.

Хорошо известно, что система $\{B_j\}_{j=0}^N$ является системой Дирихле порядка N (см., например, [8, § 28]) на ∂D_δ для достаточно малых по модулю значений δ, поскольку $|\nabla\rho| \ne 0$ в окрестности ∂D.

Пусть A^* — формально сопряженный для A и A' — формально транспонированный для A:

$$A^* = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\bigl(A^*_\alpha(x).\bigr), \quad A^* = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\bigl(A'_\alpha(x).\bigr).$$

Так как символ оператора A инъективен, обобщенный лапласиан A^*A является эллиптическим.

Тогда найдется такая система Дирихле $\{C_j\}_{j=0}^{2m-1}$ порядка $2m-1$ на ∂D, что для всех достаточно малых (по модулю) δ, для всех $u \in [C^{2m}(\overline{D}_\delta)]^k$ и для всех $v \in [C^{2m}(\overline{D}_\delta)]^k$ имеем (см. [8, леммы 28.3 и 28.4])

$$\int\limits_{\partial D_\delta} \left(\sum_{j=0}^{2m-1} (B_j v)'(x)(C_j u)(x)\right) ds_\delta(x) = \int\limits_{D_\delta} (v'(x)(A^*Au)(x) - ((A^*A)'v)'(x)u(x))\,dx, \tag{2}$$

где ds_δ — стандартная форма объема на ∂D_δ, а $w'u = \sum\limits_{s=1}^{k} w_s u_s$ для комплексных k-векторов u и w. Формула (2) есть не что иное, как формула Грина для оператора A^*A.

Пусть $v \in \mathrm{sol}(A^*A, \overline{D})$. По определению пространства $\mathrm{sol}(A^*A, \overline{D})$ существует достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что $v \in \mathrm{sol}(A^*A, D_{-\varepsilon}) \cap C^{2m}(\overline{D}_{-\varepsilon})$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} A^*Av_\delta = 0 & \text{в окрестности } \partial D_\delta; \\ B_j v_\delta = 0 & \text{на } \partial D_\delta \quad (0 \le j \le 2m-2); \\ B_{2m-1} v_\delta = |\nabla\rho|^{2m} v & \text{на } \partial D_\delta. \end{cases}$$

Следующее утверждение вытекает из теоремы Коши — Ковалевской.

Лемма 1. *Для данного (достаточно малого) $\varepsilon > 0$ существуют постоянные $\gamma > 0$ и $C_\varepsilon > 0$ такие, что для всех $0 < \delta < \gamma$ функции v_δ принадлежат $\mathrm{sol}(A^*A, D_{\delta+r} \setminus \overline{D}_{2\gamma})$ с некоторым $r > 0$ и удовлетворяют неравенству*

$$\|v_\delta\|_{C^{2m}(\overline{D}_{\delta+r}\setminus D_{2\gamma})} \le C_\varepsilon \|v\|_{C^{2m}(\overline{D}_{-\varepsilon})}.$$

Доказательство. Для $m = 1$ и $A^*A = -\Delta$ лемма доказана Е. Л. Стаутом [3].

Заметим сначала, что найдутся некоторая окрестность $\mathcal{N}$ поверхности ∂D и функции w_δ, вещественно аналитические в $\mathcal{N}$ и такие, что

$$\begin{cases} B_j w_\delta = 0 & \text{на } \partial D_\delta \quad (0 \le j \le 2m-2); \\ B_{2m-1} w_\delta = |\nabla\rho|^{2m} v & \text{на } \partial D_\delta, \end{cases}$$

удовлетворяющие неравенству

$$\|w_\delta\|_{C^{2m}(\mathcal{N})} \le C\|v\|_{C^{2m}(\overline{D}_{-\varepsilon})} \tag{3}$$

с постоянной $C > 0$, не зависящей от δ.

Например, можно взять

$$w_\delta(x) = \left(\frac{(\rho(x)-\delta)^{2m-1}}{(2m-1)!}\right) v(x).$$

Следовательно, $v_\delta = w_\delta + \tilde{v}_\delta$, где $\tilde{v}_\delta$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} A^*A\tilde{v}_\delta = -A^*Aw_\delta & \text{в окрестности } \partial D_\delta; \\ B_j\tilde{v}_\delta = 0 & \text{на } \partial D_\delta \quad (0 \le j \le 2m-1). \end{cases} \tag{4}$$

Поскольку ∂D_δ является (гладкой) вещественно аналитической и компактной, задачу (4) можно локализовать.

Зафиксируем $x_0 \in \partial D$. После соответствующей бианалитической замены переменных, скажем $x = \phi(y)$, получим вместо (4) следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \widetilde{\Delta}\tilde{v}_\delta(\phi(y)) = -(A^*Aw_\delta)(\phi(y)) & \text{при } y_n > \delta; \\ \frac{\partial^j \tilde{v}_\delta(\phi(y))}{\partial y_n^j} = 0 & \text{при } y_n = \delta \quad (0 \le j \le 2m-1), \end{cases} \tag{5}$$

где $\widetilde{\Delta}$ — некоторый дифференциальный оператор порядка $2m$ с вещественно аналитическими коэффициентами. Ясно, что $\widetilde{\Delta}$ наследует эллиптичность от A^*A.

Наконец, комплексифицируя задачу (5) и используя (3) и теорему 9.4.5 из [9], приходим к требуемому утверждению.

Лемма 2. *Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Тогда существуют компакт $K \Subset D$, постоянные $\gamma > 0$ и $C(\varepsilon, K, \gamma) > 0$ такие, что для всех $v \in \mathrm{sol}(A^*A, D_{-\varepsilon}) \cap C^{2m}(\overline{D}_{-\varepsilon})$, для всех $u \in \mathrm{sol}(A^*A, D)$ и всех $\delta \in (0, \gamma)$ справедливо неравенство*

$$\left|\int\limits_{D_\delta} v^*(x)u(x)\,dx\right| \le C(\varepsilon, K, \gamma)\|u\|_{C^{2m}(K)}\|v\|_{C^{2m}(\overline{D}_{-\varepsilon})}.$$

Доказательство. Поскольку ∂D достаточно гладкая, существует $\delta_0 > 0$ такое, что для $0 < \delta < \delta_0 < \gamma$ (γ из леммы 1)

$$\int\limits_{D_\delta} v^*(x)u(x)\,dx = \int\limits_{D_{\delta_0}} v(x)^*u(x)\,dx + \int\limits_{\delta}^{\delta_0} dr \int\limits_{\partial D_r} v^*(x)u(x)\,ds_r(x).$$

Следовательно, с некоторой положительной постоянной c_D, не зависящей от u и v, находим

$$\Bigg|\int\limits_{D_\delta} v^*(x)u(x)\,dx\Bigg| \le c_D\|u\|_{C(\overline{D}_{\delta_0})}\|v\|_{C(\overline{D}_{\delta_0})} + \delta_0 \sup_{0\le r\le\delta_0}\Bigg|\int\limits_{\partial D_r} v^*(x)u(x)\,ds_r(x)\Bigg|. \quad (6)$$

Согласно [8] (см. доказательство леммы 28.3) имеем $C_{2m-1} = |\nabla\rho|^{-2m}I_k$ (в частности, C_{2m-1} является невырожденной матрицей с гладкими коэффициентами в окрестности ∂D). Поэтому из леммы 1 и формулы (2) вытекает, что

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial D_r} v^*(x)u(x)\,ds_r(x) &= \int\limits_{\partial D_r} |\nabla\rho(x)|^{2m}v^*(x)C_{2m-1}u(x)\,ds_r(x)\\
&= \int\limits_{\partial D_r}\Bigg(\sum_{j=0}^{2m-1}(B_j\bar v_r)'(x)(C_ju)(x)\Bigg)ds_r(x)\\
&= \int\limits_{\partial(D_r\setminus D_{\delta_0})}\Bigg(\sum_{j=0}^{2m-1}(B_j\bar v_r)'(x)(C_ju)(x)\Bigg)ds(x)\\
&\quad+\int\limits_{\partial D_{\delta_0}}\Bigg(\sum_{j=0}^{2m-1}(B_j\bar v_r)'(x)(C_ju)(x)\Bigg)ds_{\delta_0}(x)\\
&= \int\limits_{D_r\setminus D_{\delta_0}}((A^*A)'\bar v)'(x)u(x) - \bar v(x)(A^*Au)(x))\,dx\\
&\quad+\int\limits_{\partial D_{\delta_0}}\Bigg(\sum_{j=0}^{2m-1}B_j\bar v_r)'(x)(C_ju)(x)\Bigg)ds_{\delta_0}(x)\\
&= \int\limits_{\partial D_{\delta_0}}\Bigg(\sum_{j=0}^{2m-1}B_j\bar v_r)'(x)(C_ju)(x)\Bigg)ds_{\delta_0}(x),
\end{aligned}$$

поскольку $(A^*A)'\bar v_r = \overline{(A^*Av_r)}$, а v_r и u являются решениями оператора A^*A в области $D_r \setminus \overline{D}_{\delta_0}$ ($\delta < r < \delta_0$). Значит,

$$\begin{aligned}
\Bigg|\int\limits_{\partial D_r} v^*(x)u(x)\,ds_r(x)\Bigg| &\le \sum_{j=0}^{2m-1}\int\limits_{\partial D_{\delta_0}}|(B_j\bar v_r)'(x)C_ju(x)|\,ds_{\delta_0}(x)\\
&\le 2m(\mathrm{meas}(\partial D))\|v_r\|_{C^{2m-1}(\partial D_{\delta_0})}\|u\|_{C^{2m-1}(\partial D_{\delta_0})}. \quad (7)
\end{aligned}$$

Объединяя (6), (7) и используя лемму 1, заключаем, что утверждение леммы 2 выполнено при γ из леммы 1, $K = \overline{D}_{\delta_0}$ и $C(\varepsilon, K, \gamma) = c_D + 2m\delta_0 C_\varepsilon\,\mathrm{meas}(\partial D)$, где C_ε из леммы 1.

Продолжим доказательство теоремы 2. Для $0 < \delta < \gamma$ (γ из леммы 2) определим функционал $\mathscr{F}_{v,\delta} \in \mathrm{sol}(A^*A, D)'$ по формуле

$$\mathscr{F}_{v,\delta}(u) = \int\limits_{D_\delta} v^*(x)u(x)\,dx \quad (u \in \mathrm{sol}(A^*A, D)).$$

Согласно лемме 2 найдется постоянная $C(v,\gamma)>0$ такая, что

$$|\mathscr{F}_{v,\delta}(u)| \le C(v,\gamma)\|u\|_{C^{2m}(\overline{D}_{\gamma/2})}$$

для всех $0<\delta<\gamma$.

Обозначим через Ω следующее множество:

$$\Omega = \{u \in \mathrm{sol}(A^*A,D) : \|u\|_{C^{2m}(\overline{D}_{\gamma/2})} < 1/C(v,\gamma)\}.$$

Тогда для каждого $\delta \in (0,\gamma)$ функционал $\mathscr{F}_{v,\delta}$ принадлежит поляре

$$\Omega_0 = \{\mathscr{F} \in \mathrm{sol}(A^*A,D)' : |\mathscr{F}(u)| \le 1 \text{ для всех } u \in \Omega\}$$

множества Ω.

По теорема Алаоглу — Банаха (см., например, [10, теорема 3.17]) эта поляра $*$-слабо компактна. Так как $\mathrm{sol}(A^*A,D)$ сепарабельно, эта поляра метризуема в $*$-слабой топологии. В силу компактности найдутся предельные точки для сети $\{\mathscr{F}_{v,\delta}\}_{0<\delta<\gamma}$.

Пусть $\mathscr{F}^0$ — одна из предельных точек. Тогда для некоторой последовательности δ_j, сходящейся к $+0$, имеем

$$\lim_{j\to\infty} \mathscr{F}_{v,\delta_j}(u) = \mathscr{F}^0(u) \quad \text{для всех } u \in \mathrm{sol}(A^*A,D).$$

Ясно, что для всех $u \in \mathrm{sol}(A^*A,D) \cap C^{2m}(\overline{D})$

$$\mathscr{F}^0(u) = \lim_{j\to\infty} \mathscr{F}_{v,\delta_j}(u) = \int_D v^*(x)u(x)\,dx.$$

Это означает, что каждая $*$-слабая предельная точка сети $\{\mathscr{F}_{v,\delta}\}_{0<\delta<\gamma}$ согласуется на $u \in \mathrm{sol}(A^*A,D)\cap C^{2m}(\overline{D})$ с интегралом $\int_D v^*(x)u(x)\,dx$.

Поскольку $\mathrm{sol}(A^*A,D)\cap C^m(\overline{D})$ плотно в $\mathrm{sol}(A^*A,D)$, существует предел $\lim_{\delta\to 0} \mathscr{F}_{v,\delta} = \mathscr{F}^0$, определяющий элемент пространства $\mathrm{sol}(A^*A,D)'$.

Для завершения доказательства теоремы 2 отметим, что

$$\mathrm{sol}(A,D) \subset \mathrm{sol}(A^*A,D), \quad \mathrm{sol}(A,\overline{D}) \subset \mathrm{sol}(A^*A,\overline{D}),$$

поэтому предел (1) существует и для всех $u \in \mathrm{sol}(A,D)$ и $v \in \mathrm{sol}(A,\overline{D})$.

Как следует из леммы 2, для всякого решения $v \in \mathrm{sol}(A,\overline{D})$ предел $J(v) = h(.,v)$ определяет непрерывный линейный функционал на $\mathrm{sol}(A,D)$. Кроме того, лемма 2 гарантирует непрерывность отображения $J : \mathrm{sol}(A,\overline{D}) \to \mathrm{sol}(A,D)'$.

Наконец, если $J(v)=0$, то $h(u,v)=0$ для всех $u \in \mathrm{sol}(A,D)$. В частности,

$$0 = h(v,v) = \int_D \sum_{s=1}^{k} |v_s(x)|^2\,dx,$$

откуда следует равенство $v \equiv 0$ в D, а значит, и инъективность J.

3. Двойственность в пространствах решений систем с инъективным символом

Нашей дальнейшей целью является нахождение условий, при которых отображение J сюръективно.

Обозначим через $[L^2(D)]^k$ пространство Лебега комплекснозначных k-векторных функций в области D с обычным скалярным произведением

$$(u,v) = \int\limits_D v^*(x)u(x)\,dx.$$

Из хорошо известных априорных оценок для решений эллиптических систем следует, что для всякого компакта $K \subset D$ и всякого мультииндекса α ($|\alpha| \geq 0$) найдется такая постоянная $C(K,\alpha)$, что для всех $u \in \mathrm{sol}(A,D) \cap [L^2(D)]^k$ и всех $x \in K$ справедливо неравенство

$$|D^\alpha u(x)| \leq C(K,\alpha)\|u\|_{[L^2(D)]^k}. \tag{8}$$

Оценка (8) гарантирует, что из сходимости в $\mathrm{sol}(A,D) \cap [L^2(D)]^k$ вытекает равномерная сходимость вместе со всеми производными на компактах D. Отсюда получаем, что $\mathrm{sol}(A,D) \cap [L^2(D)]^k$ замкнуто в $[L^2(D)]^k$. Значит, $\mathrm{sol}(A,D) \cap [L^2(D)]^k$ — сепарабельное гильбертово пространство, так как $[L^2(D)]^k$ является таковым. Кроме того, из оценки (8) и результатов [11] следует, что это пространство обладает воспроизводящим ядром.

Обозначим воспроизводящее ядро пространства $\mathrm{sol}(A,D) \cap [L^2(D)]^k$ через $\mathfrak{B}_A(.,.)$. Для системы Коши — Римана ядро $\mathfrak{B}_A(.,.)$ есть не что иное, как ядро Бергмана области D.

Теорема 3. *Отображение J является* (*топологическим*) *изоморфизмом пространств* $\mathrm{sol}(A,\overline{D})$ *и* $\mathrm{sol}(A,D)'$ *тогда и только тогда, когда*

(i) $\mathrm{sol}(A,\overline{D})$ *плотно в* $\mathrm{sol}(A,D)$;

(ii) *для всякого фиксированного $x \in D$ ядро $\mathfrak{B}_A(x,.)$ принадлежит пространству* $\mathrm{sol}(A,\overline{D})$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathscr{F}$ — непрерывный линейный функционал на $\mathrm{sol}(A,D)$, исчезающий на $\mathrm{sol}(A,\overline{D})$. Согласно теореме Хана — Банаха мы докажем, что $\mathrm{sol}(A,\overline{D})$ плотно в $\mathrm{sol}(A,D)$, если покажем, что $\mathscr{F} \equiv 0$.

По предположению теоремы найдется элемент $v \in \mathrm{sol}(A,\overline{D})$ такой, что $J(v) = \mathscr{F}$. Снова мы видим, что

$$J(v)(v) = \int\limits_D \sum_{j=1}^k |v(x)|^2\,dx = 0,$$

а значит, $v \equiv 0$. Тем самым $\mathscr{F} \equiv 0$, что и требовалось.

Из хорошо известных априорных оценок для решений эллиптических систем следует, что если K' и K'' — компактные подмножества в D и K' является подмножеством внутренности K'', то для любого $j \in \mathbb{Z}_+$

$$\sup_{|\alpha|\leq j} \|D^\alpha u\|_{C(K')} \leq c\,\|u\|_{C(K'')} \quad \text{для всех } u \in \mathrm{sol}(A,D) \tag{9}$$

с постоянной c, зависящей только от K', K'' и j.

Далее, зафиксируем произвольную точку $x \in D$ и обозначим через $\mathscr{F}_x$ функционал означивания, т. е. такой, что $\mathscr{F}_x u = u(x)$ для всех $u \in \mathrm{sol}(A,D)$. Из оценки (9) вытекает, что $\mathscr{F}_x \in \mathrm{sol}(A,D)'$ для всех $x \in D$.

По определению $A\mathfrak{B}_A(.,y) = 0$ в D и $\mathfrak{B}_A(x,y) = \mathfrak{B}(y,x)^*$ (см, например, [11]), а значит, $\mathfrak{B}_A(x,y) = [\mathscr{F}_x(\mathfrak{B}_A(y,.))]^*$.

Тогда по условию теоремы существует $v_x \in \mathrm{sol}(A, \overline{D})$ такая, что

$$\mathfrak{B}_A(x,y) = h(\mathfrak{B}_A(y,.), v_x)^* = \int\limits_D \mathfrak{B}_A(z,y)v(z)\,dz = v_x(y),$$

где последнее равенство выполнено, поскольку $\mathfrak{B}_A(.,.)$ является воспроизводящим ядром пространства $\mathrm{sol}(A,D) \cap [L^2(D)]^k$. Необходимость доказана.

Достаточность. Для проверки достаточности условий теоремы нам понадобятся две леммы.

Лемма 3. *Если выполнены условия* (i) *и* (ii) *теоремы, то для всех* $u \in \mathrm{sol}(A,D)$ *и всех* $x \in D$ *справедлива формула*

$$u(x) = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{D_\delta} \mathfrak{B}_A(y,x)u(y)\,dy.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные точку $x \in D$ и решение $u \in \mathrm{sol}(A,D)$. Из условия (ii) следует, что существует предел

$$\psi(x) = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{D_\delta} \mathfrak{B}_A(y,x)u(y)\,dy = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{D_\delta} \mathfrak{B}_A^*(x,y)u(y)\,dy.$$

Согласно (i) найдется последовательность $\{u_\nu\} \subset \mathrm{sol}(A,\overline{D})$, аппроксимирующая u в $\mathrm{sol}(A,D)$. Поскольку $\mathfrak{B}_A(.,.)$ является воспроизводящим ядром, то для всех $\nu \in \mathbb{N}$

$$u_\nu(x) - \psi(x) = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{D_\delta} \mathfrak{B}_A(y,x)[u_\nu(y) - u(y)]\,dy. \tag{10}$$

Теперь, используя лемму 2, легко перейти к пределу по $\nu \to \infty$ в (10) и заключить, что $\psi(x) = \lim\limits_{\nu\to\infty} u_\nu(x) = u(x)$.

Далее, из (9) следует, что топология в $\mathrm{sol}(A,D)$, порожденная семейством полунорм $\|u\|_{C(K)} = \sup\limits_{x\in K} |u(x)|$, где K пробегает все компактные подмножества в D, совпадает с топологией, индуцированной из $C^\infty(D)$. В частности, это означает, что $\mathrm{sol}(A,D)$ является замкнутым подпространством в $C(D)$.

Зафиксируем теперь $\mathscr{F} \in \mathrm{sol}(A,D)'$. По теореме Хана — Банаха функционал $\mathscr{F}$ может быть продолжен как k-векторнозначная мера μ с компактным носителем в D, т. е.

$$\mathscr{F}(u) = \int\limits_{\mathrm{supp}\,\mu} \sum_{s=1}^k u_k(x)\,d\mu_k(x) = \int\limits_{\mathrm{supp}\,\mu} (d\mu(x))'u(x).$$

Поскольку $\mathrm{supp}\,\mu$ — компакт в D, пользуясь леммой 3 и теоремой Фубини, мы видим, что

$$\mathscr{F}(u) = \int\limits_{\mathrm{supp}\,\mu} (d\mu(x))' \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{D_\delta} \mathfrak{B}_A(y,x)u(y)\,dy = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{D_\delta} v(y)^*u(y)\,dy,$$

где

$$v(y) = \int\limits_{\mathrm{supp}\,\mu} (d\mu(x))'\mathfrak{B}_A(x,y).$$

Более того, так как $\operatorname{supp}\mu$ — компакт в D, из условия (ii) вытекает, что $v \in \mathrm{sol}(A, \overline{D})$.

Таким образом, мы доказали, что J является алгебраическим изоморфизмом (т. е. инъективно и сюръективно).

Наконец, пространства $\mathrm{sol}(A, D)'$ и $\mathrm{sol}(A, \overline{D})$ суть пространства типа DFS (для $\mathrm{sol}(A, \overline{D})$ см. доказательство теоремы 1.5.5 в [12]). В силу того, что теорема о замкнутом графике справедлива для линейных отображений между пространствами типа DFS (см. следствие A.6.4 в [12]), из непрерывности отображения J вытекает и то, что J — топологический изоморфизм. Теорема доказана.

Если размерность пространства $\mathrm{sol}(A, D)$ конечна, то условие (i) означает, что $\mathrm{sol}(A, D) = \mathrm{sol}(A, \overline{D}) = \mathrm{sol}(A, D) \cap [L^2(D)]^k$. В этом случае (ii) немедленно следует из (i), поскольку

$$\mathfrak{B}_A(x, y) = \sum_{\nu=1}^{N} b_\nu^*(x) \otimes b_\nu(y),$$

где N — размерность $\mathrm{sol}(A, D)$, а $\{b_\nu\}_{\nu=1}^N$ — какой-нибудь ортонормированный базис пространства $\mathrm{sol}(A, D) \cap [L^2(D)]^k$. В результате мы получаем частный случай классической теоремы для конечномерных пространств, т. е. $\mathrm{sol}(A, D)' = \mathrm{sol}(A, D)$ $(= \mathrm{sol}(A, \overline{D}))$. В этом случае требование вещественной аналитичности границы, очевидно, излишне, если выполнено условие (i).

П. М. Цорн [6] доказал, что отображение J является изоморфизмом в случае, когда A — система Коши — Римана в $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$, а D — строго псевдовыпуклая область с вещественно аналитической границей. Кроме того, в [6] доказано (см. теорему IV.3), что для системы Коши — Римана на плоскости сюръективность отображения J влечет за собой вещественную аналитичность ∂D, по крайней мере если $\partial D \in C^2$.

Что же касается произвольных операторов с инъективным символом, то условия (i), (ii) означают, что область D должна обладать некоторой выпуклостью относительно оператора A в тех случаях, когда отображение J сюръективно (ср. [7]).

Так, согласно теореме Паламодова — Мальгранжа для операторов с постоянными коэффициентами условие (i) выполнено в выпуклых областях (см. теорему 11.18 в [8]). А опыт работы с воспроизводящими ядрами пространств голоморфных функций показывает, что выполнение условия (ii) тесно связано с разрешимостью некоторой задачи Неймана для дифференциального комплекса, порожденного оператором A.

В этом контексте проверка условия (ii) для произвольных переопределенных эллиптических систем $(l > k)$ кажется трудно обозримой в ближайшее время задачей. Тем не менее в случае эллиптического оператора $(l = k)$ теорема 1 дает простое описание областей, для которых отображение J сюръективно.

4. Доказательство теоремы 1

Так как оператор A эллиптический, то в силу теоремы Мальгранжа — Лакса $\mathrm{sol}(A, \overline{D})$ плотно в $\mathrm{sol}(A, D)$ для всех областей с гладкой связной границей (см., например, [8, теорема 11.11]). Поэтому условие (i) выполнено для всех областей с (гладкой) вещественно аналитической связной границей и нам нужно проверить условие (ii) для них.

Как и в § 2, мы воспользуемся подходящей формулой Грина для оператора A. Более точно, найдется такая система Дирихле $\{\widetilde{C}_j\}_{j=0}^{m-1}$ порядка $m-1$ на ∂D (см. [8, леммы 28.3 и 28.4]), что для всех $u \in [C^m(\overline{D})]^k$ и для всех $v \in [C^m(\overline{D})]^k$ имеем

$$\int\limits_{\partial D} \left(\sum_{j=0}^{m-1} (B_j v)'(x)(\widetilde{C}_j u)(x) \right) ds(x) = \int\limits_{D} (v'(x)(Au)(x) - (A'v)'(x)u(x))\, dx. \tag{11}$$

По условию теоремы оператор A обладает двусторонним фундаментальным решением, скажем Φ (см., например, [1, гл. 2, § 8, пример 8.14]).

Из (11) следует, что для всякой функции $u \in \mathrm{sol}(A, D) \cap C^m(\overline{D})$ и всякого $x \in D$ справедлива формула Грина

$$u(x) = -\int\limits_{\partial D} \left(\sum_{j=0}^{m-1} ((B_j)_y \Phi(x,y))'(\widetilde{C}_j u)(y) \right) ds(y). \tag{12}$$

Так как A является эллиптическим, то $(A^*)'A'$ также эллиптичен, а его коэффициенты вещественно аналитичны в X (если оператор A переопределенный эллиптический, то символ оператора $(A^*)'A'$ не инъективен!). Зафиксируем $x \in D$ и обозначим через $\Psi(x,y)$ решение следующей задачи Дирихле для оператора $(A^*)'A'$ в области D:

$$\begin{cases} (A^*)'A'_y \Psi(x,y) = 0 & \text{в } D; \\ (B_j)_y \Psi(x,y) = (B_j)_y \Phi(x,y) & \text{на } \partial D \quad (0 \le j \le m-1). \end{cases} \tag{13}$$

Поскольку $x \in D$, то фундаментальное решение $\Phi(x,y)$ вещественно аналитично в $X \setminus \{x\}$ относительно переменной y. А так как граница области D вещественно аналитична, то для всякого фиксированного $x \in D$ функция $\Psi(x,.)$ является решением оператора $(A^*)'A'$ в некоторой окрестности $\overline{D}$ (см. [7, лемма 4.4]).

Значит, ввиду формул (11)–(13)

$$u(x) = \int\limits_D (A'_y \Psi(x,y))' u(y)\, dy = \int\limits_D \left(A^*_y \overline{\Psi}(x,y)\right)^* u(y)\, dy \tag{14}$$

для всякой функции $u \in \mathrm{sol}(A, D) \cap C^m(\overline{D})$.

Согласно формулам (13), (14) и воспроизводящему свойству ядра $\mathfrak{B}_A(.,.)$ имеем

$$0 = \int\limits_D \left(\mathfrak{B}^*_A(x,y) - (A^*_y \overline{\Psi}(x,y))^*\right) u(y)\, dy$$

для всякой функции $u \in \mathrm{sol}(A, D) \cap C^m(\overline{D})$

Поскольку $\mathrm{sol}(A, D) \cap C^m(\overline{D})$ плотно в $\mathrm{sol}(A, D) \cap L^2(D)$, для почти всех $y \in D$ справедливо равенство $\mathfrak{B}_A(y,x) = A^*_y \overline{\Psi}(x,y)$.

По построению $A'_y \Psi(x,y)$ является решением оператора $(A^*)'$ в некоторой окрестности $\overline{D}$, поэтому $A^*_y \overline{\Psi}(x,y)$ будет решением оператора A в некоторой окрестности $\overline{D}$ (относительно переменной y).

Наконец, $\mathfrak{B}_A(x,y)$ — решение оператора A в D (относительно переменной y), тем самым выполнение условия (ii) теоремы (3) следует из теоремы единственности для вещественно аналитических функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тарханов Н. Н.* Метод параметрикса в теории дифференциальных комплексов. Новосибирск: Наука, 1990.
2. *Хавин В. П.* Пространства аналитических функций // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1966. С. 76–164. (Итоги науки и техники).
3. *Stout E. L.* Harmonic duality, hyperfunctions and removable singularities // Изв. РАН, Сер. мат. 1995. V. 59, N 6. P. 133–170.
4. *Grothendieck A.* Sur les espaces de solutions d'une classe generale d'equations aux derivees partielles // J. Anal. Math. 1952–1953. N 2. P. 243–280.
5. *Айзенберг Л. А., Гиндикин С. Г.* Об общем виде линейного непрерывного функционала на пространствах голоморфных функций // Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та. 1964. Т. 137. С. 7–15.
6. *Zorn P. M.* Analytic functionals and Bergman spaces // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1982. V. 9. P. 365–404.
7. *Nacinovich M., Shlapunov A. A., Tarkhanov N. N.* Duality in the spaces of solutions of elliptic systems // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. (4). 1998. V. 26. P. 207–232.
8. *Тарханов Н. Н.* Ряд Лорана для решений эллиптических систем. Новосибирск: Наука, 1991.
9. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов в частных производных: В 4-х т. М.: Мир, 1986.
10. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
11. *Aronszajn N.* Theory of reproducing kernels // Trans. Amer. Math. Soc. 1950. V. 68. P. 337–404.
12. *Morimoto M.* An introduction to Sato's hyperfunctions. Providence, RI: AMS, 1993.

Статья поступила 12 сентября 2001 г.

Шлапунов Александр Анатольевич
Красноярский гос. университет, факультет математики и информатики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
`shlapuno@lan.krasu.ru`