Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2002. Том 43, № 6

УДК 517.55

ТЕСТОВЫЕ НАБОРЫ В СВОБОДНЫХ МЕТАБЕЛЕВЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

И. В. Чирков, М. А. Шевелин

Аннотация: Вычисляется тестовый ранг свободной метабелевой алгебры Ли конечного ранга над произвольным полем и охарактеризованы тестовые наборы для таких алгебр. Доказано, что если автоморфизм, тождественный по модулю коммутанта, действует тождественно на тестовом наборе, то он внутренний.

Ключевые слова: свободная метабелева алгебра Ли, автоморфизм, тестовый набор, тестовый ранг

В статье [1] Е. И. Тимошенко доказал, что тестовый ранг свободной метабелевой группы ранга n равен $n-1$, там же найдены условия, которым должен удовлетворять набор элементов свободной метабелевой группы, чтобы являться тестовым. В нашей работе получены подобные результаты для свободных метабелевых алгебр Ли над произвольным полем. Техника доказательств аналогична использованной в статье [1].

Введем необходимые обозначения. Пусть K — произвольное поле, L — алгебра Ли над K. Символом UL обозначается универсальная обертывающая алгебра для L. Хорошо известно, что UL является целостным кольцом. Обозначим через F свободную алгебру Ли над полем K с множеством свободных порождающих $\{y_1, \dots, y_n\}$. Ее универсальная обертывающая будет свободной ассоциативной алгеброй с тем же множеством свободных порождающих.

Идеал, порожденный F в UF, является свободным правым UF-модулем с базисом $y_1, \dots, y_n$. Поэтому для элемента $f \in FUF$ имеется единственное разложение

$$f = \sum_{1 \le i \le n} y_i \partial_i f \quad (\partial_i f \in UF).$$

Коэффициент при y_i называют *производной Фокса* элемента f. Образ элемента $\partial_i f$ при гомоморфизме колец $UF \to R$ называют *значением* в R производной $\partial_i f$.

Пусть M — метабелева алгебра Ли, A — ее коммутант. Присоединенное представление M индуцирует представление M/A на A. Таким образом, A наделяется структурой правого $U(M/A)$-модуля (действие обозначаем нижней точкой). Напомним, что если $a \in A$, $g_1, g_2, \dots, g_k \in M/A$, то $a.g_1 g_2 \dots g_k = [[\dots[[a, g_1], g_2], \dots], g_k]$. Мы обозначаем верхней чертой образы элементов при гомоморфизме алгебр $UM \to U(M/A)$. Напомним, что алгебра $U(M/A)$ изоморфна алгебре многочленов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00674).

Через M_r будем обозначать свободную метабелеву алгебру Ли с r свободными порождающими, через M'_r — ее коммутант, через P_r — кольцо многочленов $U(M_r/M'_r)$. Все гомоморфизмы действуют справа.

Лемма 1. *Пусть $v = (v_1, \dots, v_r)$, $w = (w_1, \dots, w_r)$ — две строчки над коммутативным целостным кольцом A. Тогда* $\det(E_r + v^t w) = 1 + vw^t$.

Доказательство. Если $v = 0$, то доказывать нечего, поэтому предположим, что $v \neq 0$. Пусть $v_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq r)$. Сопряжем матрицу $E_r + v^t w$ матрицей перестановки $(1i)$ и изменим нумерацию координат. Это позволяет считать, что $v_1 \neq 0$. Имеем

$$v_1^{r-1}\begin{vmatrix} 1+v_1w_1 & v_1w_2 & \dots & v_1w_r \\ v_2w_1 & 1+v_2w_2 & \dots & v_2w_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_rw_1 & v_rw_2 & \dots & 1+v_rw_r \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+v_1w_1 & v_1w_2 & \dots & v_1w_r \\ v_2w_1v_1 & v_2+v_2w_2v_1 & \dots & v_2w_rv_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_rw_1v_1 & v_rw_2v_1 & \dots & v_r+v_rw_rv_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+v_1w_1 & v_1w_2 & \dots & v_1w_r \\ -v_2 & v_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -v_r & 0 & \dots & v_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\sum v_iw_i & 0 & \dots & 0 \\ -v_2 & v_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -v_r & 0 & \dots & v_1 \end{vmatrix} = v_1^{r-1}(1+vw^t).$$

Сократив на $v_1^r \neq 0$, получим требуемое.

Замечание. Предположение о целостности A в предыдущей лемме излишне, но без него доказательство получается длиннее.

Следствие. *Эндоморфизм $\psi \in \operatorname{End}(M_r)$, заданный правилом*

$$x_i\psi = x_i + c.\lambda_i \quad (c \in M'_r,\ \lambda_i \in P_r,\ 1 \leq i \leq r),$$

является автоморфизмом тогда и только тогда, когда

$$\sum_{1\leq i\leq r} \lambda_i \partial_i c = 0.$$

Доказательство. По следствию из теоремы 2 работы [2], достаточно доказать, что обратимость матрицы Якоби $J(\psi) = (\partial_i(x_j\psi))$ эквивалентна условию $\sum \lambda_i \partial_i c = 0$. Но $J(\psi) = E_r + \lambda^t \partial c$, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, ∂c — вектор, составленный из производных Фокса. Координаты $w_i = \partial_i c$ этого вектора удовлетворяют равенству $\sum_{i=1}^{r} x_i w_i = 0$ и поэтому, как нетрудно видеть, принадлежат идеалу P_r^0, порожденному в P_r множеством $x_1, \dots, x_r$. Следовательно, многочлен $\det J(\psi) = 1 + \lambda(\partial c)^t$ либо имеет степень не ниже 1, либо $\lambda(\partial c)^t = 0$, причем последнее справедливо тогда и только тогда, когда $J(\psi)$ — обратимая матрица.

Определение 1. Набор элементов $g_1, \dots, g_s$ свободной метабелевой алгебры Ли M_r называют *тестовым*, если для любого эндоморфизма φ алгебры M_r из условия $g_i\varphi = g_i$, $i = 1, \dots, s$, следует, что φ — автоморфизм.

Определение 2. Натуральное число k называют *тестовым рангом алгебры M_r*, если k — наименьшая длина тестового набора.

Теорема 1. *Ненулевой элемент алгебры M_2 является тестовым тогда и только тогда, когда он лежит в M_2'.*

Доказательство. Сначала проверим, что все элементы коммутанта тестовые. Пусть x_1, x_2 — свободные порождающие алгебры M_2, и пусть $c = [x_1, x_2].u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ $(u \in P_2)$ — элемент коммутанта, φ — эндоморфизм алгебры M_2 такой, что $c\varphi = c$. Нужно проверить, что φ — изоморфизм. Если φ действует на порождающие по правилу

$$x_1\varphi = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + [x_1, x_2].v_1,$$

$$x_2\varphi = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + [x_1, x_2].v_2 \quad (v_1, v_2 \in k[\bar{x}_1, \bar{x}_2]),$$

то легко проверить, что

$$c\varphi = [y_1, y_2].u(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = \det(A)[x_1, x_2].u(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \\ + [x_1, x_2].u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)v_1\bar{x}_2 - [x_1, x_2].u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)v_2\bar{x}_1,$$

где $y_1 = x_1\varphi$, $y_2 = x_2\varphi$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Поэтому получается равенство

$$c = [x_1, x_2].u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = [x_1, x_2].(\det(A)u(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \\ + \bar{x}_2u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)v_1 - \bar{x}_1u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)v_2) = c\varphi,$$

из которого следует, что

$$u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - \det(A)u(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = \bar{x}_2u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)v_1 - \bar{x}_1u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)v_2.$$

Степени многочленов, стоящих в левой и правой частях этого равенства строго различны, если оба эти многочлена не равны нулю. Поэтому получаем равенства $u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - \det(A)u(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = 0$ и $v_1\bar{x}_2 - v_2\bar{x}_1 = 0$. Из этого вытекает, что, во-первых, $\det(A) \neq 0$, а во-вторых, существует многочлен $v \in k[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$ такой, что $v_1 = \bar{x}_1v$, $v_2 = \bar{x}_2v$. Следовательно, $x_1\varphi = z_1 + [x_1, x_2].\bar{x}_1v$, $x_2\varphi = z_2 + [x_1, x_2].\bar{x}_2v$, где z_1, z_2 получены из x_1, x_2 невырожденным линейным преобразованием (поскольку $\det(A) \neq 0$). Это значит, что φ — произведение линейной замены порождающих и некоторого внутреннего (см. [3]) автоморфизма.

Допустим теперь, что элемент $g = z + c$ алгебры M_2 является тестовым, $c = [x_1, x_2].u \in M_2'$, $z = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2$ — линейная комбинация порождающих. Рассмотрим эндоморфизм φ алгебры M_2, действующий по правилу $x_1\varphi = x_1 + [x_1, x_2].v_1$, $x_2\varphi = x_2 + [x_1, x_2].v_2$. Поскольку этот эндоморфизм оставляет g неподвижным, то

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + [x_1, x_2].u = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + [x_1, x_2].u \\ + \alpha_1[x_1, x_2].v_1 + \alpha_2[x_1, x_2].v_2 + [x_1, [x_1, x_2].v_2]u + [[x_1, x_2].v_1, x_2].u,$$

следовательно,

$$\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 - \bar{x}_1v_2u + \bar{x}_2v_1u = 0.$$

Сравнение степеней снова дает нам, что это возможно только в том случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $g = c \in M_2'$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть M_r — свободная метабелева алгебра Ли ранга $r \geq 3$. Тогда*

1) *тестовый ранг алгебры M_r равен $r-1$;*

2) *элементы $g_1, \dots, g_{r-1}$ образуют тестовый набор тогда и только тогда, когда они лежат в коммутанте, линейно независимы над $U(M_r/M_r')$ и любой эндоморфизм φ, действующий тождественно на этих элементах, индуцирует невырожденное линейное преобразование пространства M_r/M_r'.*

Доказательство. Пусть $r \geq 3$ и $g_1, \dots, g_{r-2}$ — тестовый набор элементов. Рассмотрим эндоморфизмы ψ_j $(j = 2, \dots, r)$ алгебры M_r, заданные правилом $x_i\psi_j = x_i + [x_1, x_j].\lambda_i$ $(\lambda_i \in P_r)$. Эндоморфизм ψ_j действует на всех элементах g_i тождественно тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j \partial_j g_i = 0, \quad i = 1, \dots, r-2. \tag{1}$$

Эта система линейных уравнений относительно неизвестных λ_k с коэффициентами из кольца многочленов P_r имеет по крайней мере два линейно независимых решения над этим кольцом. Если бы все ψ_j были автоморфизмами, то выполнялись бы условия

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \partial_i [x_1, x_j] = 0. \tag{2}$$

Ранг этой системы равен $r-1$, поэтому по крайней мере одно из решений системы (1) не является решением системы (2). Значит, какой-либо из эндоморфизмов ψ_j не является автоморфизмом, и набор $g_1, \dots, g_{r-2}$ тестовым не будет; противоречие.

Для проверки того, что тестовый ранг M_r' равен $r-1$, покажем, что элементы $[x_1, x_j]$, $j = 2, \dots, r$, образуют тестовый набор. Рассмотрим эндоморфизм φ такой, что $x_i\varphi = y_i$, причем $[y_1, y_j] = [x_1, x_j]$, $j = 2 \dots, r$. Для удобства записи обозначим $\partial_i y_j = z_{ij}$.

Вычислим якобиан $D = \det(\partial_i y_j) = \det(z_{ij})$ эндоморфизма φ:

$$\partial_1[y_1, y_i] = (\partial_1 y_1)\bar{y}_i - (\partial_1 y_i)\bar{y}_1 = z_{11}\bar{y}_i - z_{1i}\bar{y}_1 = \bar{x}_i,$$
$$\partial_i[y_1, y_i] = (\partial_i y_1)\bar{y}_i - (\partial_i y_i)\bar{y}_1 = z_{i1}\bar{y}_i - z_{ii}\bar{y}_1 = -\bar{x}_1,$$
$$\partial_j[y_1, y_i] = (\partial_j y_1)\bar{y}_i - (\partial_j y_i)\bar{y}_1 = z_{j1}\bar{y}_i - z_{ji}\bar{y}_1 = 0, \quad j \neq 1, i;$$

$$\bar{x}_1\bar{y}_1^{r-1} D = \bar{x}_1 \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12}\bar{y}_1 & z_{13}\bar{y}_1 & \dots & z_{1r}\bar{y}_1 \\ z_{21} & z_{22}\bar{y}_1 & z_{23}\bar{y}_1 & \dots & z_{2r}\bar{y}_1 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ z_{r1} & z_{r2}\bar{y}_1 & z_{r3}\bar{y}_1 & \dots & z_{rr}\bar{y}_1 \end{vmatrix}$$
$$= x_1 \begin{vmatrix} z_{11} & -\bar{x}_2 & -\bar{x}_3 & \dots & -\bar{x}_r \\ z_{21} & \bar{x}_1 & 0 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ z_{r1} & 0 & 0 & \dots & \bar{x}_1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} z_{11}\bar{x}_1 & -\bar{x}_2\bar{x}_1 & -\bar{x}_3\bar{x}_1 & \dots & -\bar{x}_r\bar{x}_1 \\ z_{21} & \bar{x}_1 & 0 & \dots & \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ z_{r1} & 0 & 0 & \dots & \bar{x}_1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \sum_i z_{i1}\bar{x}_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_{21} & \bar{x}_1 & 0 & \dots & \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ z_{r1} & 0 & 0 & \dots & \bar{x}_1 \end{vmatrix} = \bar{x}_1^{r-1} \sum_i z_{i1}\bar{x}_i = \bar{y}_1\bar{x}_1^{r-1}.$$

Таким образом, сокращая на $\bar{y}_1\bar{x}_1$, получаем

$$\bar{y}_1^{r-2}D = \bar{x}_1^{r-2}.$$

Так как $\bar{x}_1$ — неприводимый многочлен, то D — ненулевой скаляр. По следствию из теоремы 2 работы [2] φ является автоморфизмом. П. 1 теоремы доказан.

Перейдем к доказательству п. 2.

Необходимость. Пусть элементы $g_1, \dots, g_{r-1}$ образуют тестовый набор. Докажем, что они лежат в коммутанте M_r'. Система из $r-1$ линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \partial_i g_j = 0, \quad j = 1\dots, r-1, \tag{3}$$

относительно r неизвестных λ_i имеет ненулевое решение $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in P_r^r$. Каждый эндоморфизм $\psi_{c,\lambda}$ такой, что $x_i\psi_{c,\lambda} = x_i + c.\lambda_i$ ($c \in M_r', i = 1, \dots, r$), оставляет все элементы $g_1, \dots, g_{r-1}$ на месте. Поскольку g_i ($i = 1, \dots, r-1$) образуют тестовый набор, для любого $c \in M_r'$ эндоморфизм $\psi_{c,\lambda}$ является автоморфизмом. Следовательно, имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \partial_i c = 0.$$

Полагая в этом равенстве $c = [x_1, x_j]$, получим $\lambda_1\bar{x}_j - \lambda_j\bar{x}_1 = 0$ ($j = 2, \dots, r$). Из этих равенств следует существование такого многочлена $u \in P_r$, что $\lambda_i = u\bar{x}_i$ ($i = 1, \dots, r$). Подставим эти выражения для λ_i в (3). Получим для $j = 1, \dots, r-1$ равенства

$$u\sum_{i=1}^{r} \bar{x}_i \partial_i g_j = 0.$$

Заметим, что $u \neq 0$, так как в противном случае $\lambda = 0$. Отсюда следует, что $\sum\limits_{i=1}^{r} \bar{x}_i \partial_i g_j = 0$. По следствию из теоремы 2 работы [4] все g_j принадлежат коммутанту M_r'.

Если предположить, что элементы $g_1, \dots, g_{r-1}$ линейно зависимы над P_r, то $g_1.u_1 = g_2.u_2 + \dots + g_{r-1}.u_{r-1}$ для некоторых не всех нулевых $u_1, \dots, u_{r-1} \in P_r$, причем можно считать, что $u_1 \neq 0$. Так же, как в начале доказательства, найдем эндоморфизм ψ, тождественный по модулю коммутанта, который оставляет элементы $g_2, \dots, g_{r-1}$ неподвижными, но автоморфизмом не является. Поскольку ψ тождествен по модулю коммутанта, то на M_r' он действует как эндоморфизм P_r-модуля M_r',

$$(g_2.u_2 + \dots + g_{r-1}.u_{r-1})\psi = g_2\psi.u_2 + \dots + g_{r-1}\psi.u_{r-1} = g_2.u_2 + \dots + g_{r-1}.u_{r-1}.$$

Тем самым ψ оставляет неподвижным элемент $g_1.u_1$, а следовательно, и элемент g_1, так как $(g_1\psi - g_1).u_1 = 0$ и P_r-модуль M_r' без кручения. Это противоречит тому, что ψ не является автоморфизмом ввиду того, что $g_1, \dots, g_{r-1}$ — тестовый набор.

Тот факт, что любой эндоморфизм, оставляющий тестовый набор на месте, индуцирует автоморфизм пространства M_r/M_r', очевиден.

Достаточность. Пусть $g_1, \dots, g_{r-1}$ — набор элементов коммутанта, линейно независимых над P_r, и пусть каждый эндоморфизм φ, оставляющий этот набор на месте, индуцирует невырожденное линейное преобразование пространства M_r/M_r'.

Пусть Q будет полем частных кольца многочленов P_r. Рассмотрим векторное пространство $V = M_r' \otimes_{P_r} Q$ над полем Q. Естественное отображение $M_r' \to V$ инъективно, ибо P_r-модуль M_r' без кручения. Тождество Якоби $[x_i, x_j].\bar{x}_1 = -[x_1, x_i].\bar{x}_j + [x_1, x_j].\bar{x}_i$ позволяет выразить каждый элемент коммутанта как линейную комбинацию $r-1$ коммутаторов $[x_1, x_j]$ $(j = 2, \dots, r)$ с коэффициентами в Q, причем общий знаменатель коэффициентов — это $\bar{x}_1$. Очевидно, что матрица $(\partial_i[x_1, x_j])$ невырожденна. Поэтому элементы $[x_1, x_i]$ $(i = 2, \dots, r)$ образуют базис в пространстве V.

Обозначим $y_i = x_i\varphi$. Поскольку эндоморфизм φ индуцирует невырожденное линейное преобразование пространства M_r/M_r', мы можем умножить φ на линейную замену порождающих так, чтобы получить эндоморфизм, тождественный по модулю коммутанта, при этом полученный эндоморфизм будет автоморфизмом тогда и только тогда, когда φ — автоморфизм. Поэтому далее считаем, что φ — эндоморфизм, тождественный по модулю коммутанта. Заметим, что такой эндоморфизм действует на коммутанте как эндоморфизм P_r-модуля. Запишем разложение над Q:

$$g_k = \sum_{i=2}^{r} [x_1, x_i].\alpha_{ki} \quad (k = 1, \dots, r-1),$$

здесь $\alpha_{kl} \in Q$. Так как g_k линейно независимы над P_r, матрица (α_{kl}) обратима над Q. По условию эндоморфизм φ действует на g_k тождественно, следовательно,

$$g_k\varphi = \sum_{i=2}^{r} [x_1\varphi, x_i\varphi].\alpha_{ki} = \sum_{i=2}^{r} [x_1, x_i].\alpha_{ki} = g_k \quad (k = 1, \dots, r-1),$$

поэтому вектор $([x_1, x_2] - [x_1\varphi, x_2\varphi], \dots, [x_1, x_r] - [x_1\varphi, x_r\varphi])$ удовлетворяет системе однородных линейных уравнений над Q с невырожденной матрицей, т. е. он нулевой. Таким образом, эндоморфизм φ действует тождественно на все элементы $[x_1, x_i]$. Как доказано ранее, такие элементы образуют тестовый набор, значит, φ — автоморфизм. Теорема доказана.

Из работы [5] вытекает, что автоморфизм свободной метабелевой группы конечного ранга, большего единицы, действующий на тестовом наборе тождественно, обязательно является внутренним. Неформально говоря, тестовые наборы «тестируют» лишь внутренние автоморфизмы. Для свободных метабелевых алгебр Ли имеет место полная аналогия. Напомним, что в статье [3] введено понятие внутреннего автоморфизма алгебры M_r: автоморфизм φ является внутренним тогда и только тогда, когда его действие на порождающих выглядит так: $x_i\varphi = \xi x_i + [c, x_i]$ $(\xi \in K \setminus \{0\}, c \in M_r', i = 1, \dots, r)$.

Предложение. *Любой эндоморфизм φ свободной метабелевой алгебры Ли M_r, тождественный по модулю коммутанта и действующий на тестовом наборе тождественно, является внутренним.*

Доказательство. В последней части доказательства предыдущей теоремы нами фактически установлено, что φ действует тождественно на тестовом наборе $g_1, \dots, g_{r-1}$ тогда и только тогда, когда этот автоморфизм действует тождественно на наборе $[x_1, x_2], \dots, [x_1, x_r]$. Пусть $x_i\varphi = x_i + c_i$ $(i = 1, \dots, r, c_i \in M_r)$. Обозначим $\partial_j(c_i) = u_{ij} \in P_r$. Равенства $[x_1, x_j]\varphi = [x_1, x_j]$ $(j = 2, \dots, r)$

выполнены тогда и только тогда, когда $c_i.\bar{x}_1 = c_1.\bar{x}_i$ $(i = 2, \dots, r)$. Из этого следует [4, теорема 2], что в свободном правом P_r-модуле P_r^r с базисом $e_1, \dots, e_r$ выполнены равенства

$$\sum_{j=1}^{r} e_j u_{1j} \bar{x}_i = \sum_{j=1}^{r} e_j u_{ij} \bar{x}_1$$

для $i = 2, \dots, r$. Если собрать коэффициенты при базисных элементах, то получим $u_{1j}\bar{x}_k = u_{kj}\bar{x}_1$ $(j = 1, \dots, r,\ k = 2, \dots, r)$. Это возможно только в случае, когда $u_{1j} = v_j \bar{x}_1$ для некоторых многочленов $v_1, \dots, v_r \in P_r$. Отсюда вытекает, что $v_j \bar{x}_1 \bar{x}_k = u_{kj} \bar{x}_1$, т. е.

$$v_j \bar{x}_k = u_{kj} \tag{4}$$

для всех k и j.

Поскольку $c_i \in M_r'$, по следствию из теоремы 2 работы [2] имеем

$$\sum_{j=1}^{r} u_{kj} \bar{x}_j = 0,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{r} v_j \bar{x}_k \bar{x}_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{r} v_j \bar{x}_j = 0.$$

Последнее равенство (снова по следствию из теоремы 2 в [4]) означает, что $(v_1, \dots, v_r) = \partial(c)$ для некоторого $c \in M_r'$. Тем самым из (4) для $i = 1, \dots, r$ получаются равенства $c_i = -[x_i, c]$. Это доказывает, что φ — внутренний автоморфизм.

Авторы признательны Е. И. Тимошенко за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко Е. И.* Тестовые элементы и тестовый ранг свободной метабелевой группы // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 62, № 6. С. 916–920.
2. *Умирбаев У. У.* Частные производные и эндоморфизмы некоторых относительно свободных алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 6. С. 179–188.
3. *Чирков И. В., Шевелин М. А.* Главные идеалы и примитивные элементы свободных метабелевых алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 3. С. 720-723.
4. *Artamonov V. A.* The categories of free metabelian groups and Lie algebras // Comment. Math. Univ. Carolin. 1977. V. 18, N 1. P. 143–159.
5. *Шмелькин А. Л.* Два замечания о свободных разрешимых группах // Алгебра и логика. 1967. Т. 6, № 2. С. 95–109.

Статья поступила 19 марта 2002 г.

Чирков Игорь Викторович
Омский гос. университет, кафедра информационных систем,
пр. Мира, 55-А, Омск 644077
chirkov@math.omsu.omskreg.ru

Шевелин Михаил Александрович
Омский гос. университет, кафедра алгебры, пр. Мира, 55а, Омск 644077
shevelin@math.omsu.omskreg.ru