Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2003. Том 44, № 1

УДК 517.956.6

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА В ОБЛАСТЯХ С МНОГОСВЯЗНЫМИ ПОДОБЛАСТЯМИ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ

М. Е. Лернер, О. А. Репин

Аннотация: В отличие от известных задач для уравнений смешанного типа, для уравнения Лаврентьева — Бицадзе ставится краевая задача в областях с бесконечными многосвязными подобластями гиперболичности. Доказывается ее однозначная разрешимость в явном виде. Эта же задача исследуется для общего уравнения Лаврентьева — Бицадзе.

Ключевые слова: задача, краевое условие, решение, уравнение, смешанный, эллиптический, гиперболический тип, характеристики, область, подобласть, многосвязный, производная, оператор, принцип максимума

§ 1. Введение

Продолжительное время уравнения смешанного типа на плоскости исследовались в областях с односвязными подобластями гиперболичности, см. [1–21].

Ф. Трикоми в 1923 г. опубликовал работу, в которой поставил краевую задачу для уравнения

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в смешанной области D, ограниченной «нормальной» кривой σ, расположенной в верхней полуплоскости с концами в точках $O(0,0)$, $A(1,0)$ и выходящими из них характеристиками OC и AC. Здесь множества $D_1 = D \cap \{y > 0\}$, $D_2 = D \cap \{y < 0\}$ — подобласти эллиптичности и гиперболичности уравнения Трикоми (1) соответственно, OA — линия вырождения. В дальнейшем эти обозначения сохраняются для иных уравнений и в случаях, когда дуга σ не обязательно является «нормальной».

Задача Трикоми заключается в нахождении функции, которая удовлетворяет уравнению Трикоми в подобластях его эллиптичности и гиперболичности, является непрерывной в замыкании смешанной области, имеет равные между собой конечные односторонние нормальные производные на линии вырождения и принимает заданные значения на «эллиптической» дуге σ и на левой характеристике OC.

Далее была проведена классификация уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа [4] на уравнения первого и второго рода. Примерами таких уравнений являются соответственно уравнения

$$yu_{xx} + u_{yy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = 0, \tag{2}$$

$$u_{xx} + yu_{yy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = 0. \tag{3}$$

Естественным стало говорить о вырождающихся гиперболических уравнениях первого рода (их характеристики не касаются линии вырождения) и второго рода (характеристики касаются этой линии).

Ф. Франкль в 1945 г. обнаружил приложение задачи Трикоми в теории сопел Лаваля, а затем в других разделах трансзвуковой газовой динамики [7]. В дальнейшем выяснилось, что уравнения смешанного типа также применимы в магнитогидродинамике, геометрии, биологии и других областях естественных наук [22, 23].

После работ Франкля начались и продолжаются исследования уравнений смешанного и вырождающегося типов в самых различных направлениях (см. [8–28] и др.). При этом были обнаружены принципы максимума (см. [8–14, 19, 20, 29] и др.). Ранее принципы максимума были известны для уравнений эллиптического и параболического типов (подробности см. в [24]).

Принципы максимума играют фундаментальную роль: с их помощью получаются оценки и доказывается единственность решений краевых задач, а отсюда подчас и их разрешимость. Это относится и к принципам максимума, сформулированным для вырождающихся гиперболических уравнений первого рода в работе [18] и второго рода в [29]. Первая из них повлекла за собой вторую и была использована во многих исследованиях (см. [21, 30] и др.).

В принципах максимума Агмона — Ниренберга — Проттера [18] для уравнения (2) положительный максимум в замыкании подобласти гиперболичности достигается на линии перехода ($\max\limits_{\overline{D}_2} u = \max\limits_{\overline{OA}} u$), а в замыкании смешанной области — на «эллиптической» дуге $\bar\sigma$ ($\max\limits_{\overline{D}} u = \max\limits_{\bar\sigma} u$). Предполагается, что решение не убывает на левой характеристике с ростом ее ординаты и коэффициенты уравнения (2) удовлетворяют некоторым неравенствам в подобласти гиперболичности.

Если решение уравнения (3) обращается в нуль на левой характеристике, то максимум его модуля в замыкании подобласти гиперболичности достигается на другой характеристике ($\max\limits_{\overline{D}_2} |u| = \max\limits_{\overline{AC}} |u|$), а в замыкании смешанной области — на этой характеристике и «эллиптической» дуге $\bar\sigma$ ($\max\limits_{\overline{D}} |u| = \max\limits_{\overline{AC}\cup\bar\sigma} |u|$) [29]. Предполагается, что коэффициенты уравнения удовлетворяют некоторым неравенствам в подобласти гиперболичности.

Все эти принципы максимума имеют место для модельного уравнения смешанного типа [8, 9]

$$LBu = u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0, \tag{4}$$

называемого уравнением Лаврентьева — Бицадзе. Все вышесказанное относится к исследованиям уравнений смешанного типа в областях с односвязными подобластями гиперболичности.

В работе [31] (см. также [32]) удалось сформулировать и доказать принцип максимума модуля для гиперболических уравнений в односвязных и многосвязных областях произвольной формы и с его помощью поставить разрешимые краевые задачи [33, 34]. К рассмотрению гиперболических уравнений в многосвязных областях приводят рассуждения о плоских, особым образом вынужденных колебаниях струны [35]. Все это позволило для уравнения смешанного типа (4) поставить краевые задачи в конечных областях с двусвязными подобластями

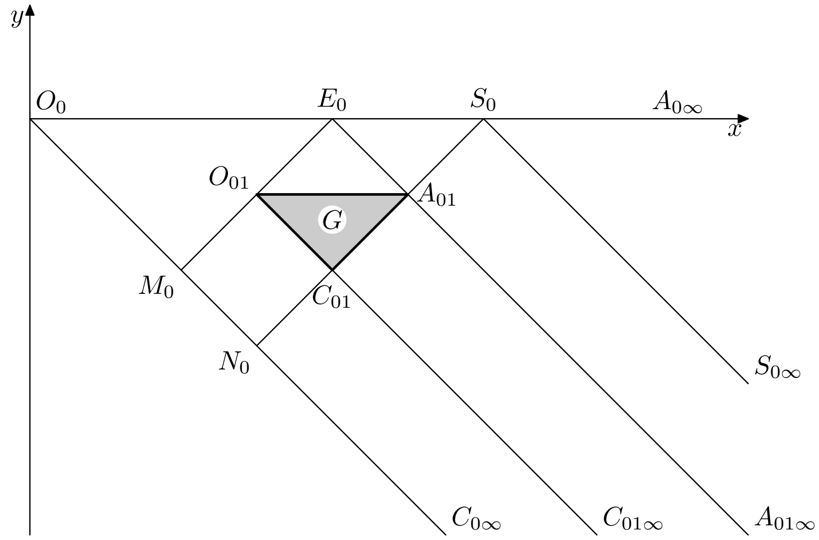

Рис. 1. Область с бесконечной подобластью гиперболичности.

гиперболичности, доказать единственность их решений, а также разрешимость одной из них [33–36].

В данной работе для уравнения (4) сначала ставится краевая задача в области с бесконечной подобластью гиперболичности в виде разности двух характеристических треугольников (рис. 1). Она существенно отличается от вышеназванной работы [33] доказательством единственности решения поставленной задачи и ее интегральными уравнениями, разрешимыми в явном виде. Подробно излагаются доказательства всех утверждений. Полученные для уравнения (4) результаты обобщаются на области с многосвязными подобластями гиперболичности. В работе [21] рассматривалось следующее уравнение смешанного типа со всеми младшими членами, называемое *общим уравнением Лаврентьева — Бицадзе*:

$$LPu = u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = 0. \tag{5}$$

В § 4 настоящей работы уравнение (5) исследуется в областях с многосвязными подобластями гиперболичности.

Таким образом, далее в данной работе в § 2, 3 соответственно будет изучено уравнение Лаврентьева — Бицадзе (4), рассматриваемое в двусвязной области (задача Θ_1^∞) и в трех- и более многосвязных областях (задача Θ_2^∞). В заключительном § 4 будет исследовано общее уравнение Лаврентьева — Бицадзе (5).

§ 2. Уравнение Лаврентьева — Бицадзе (4), рассматриваемое в двусвязной области (задача Θ_1^∞)

Рассмотрим уравнение (4) в области $D = D_1 \cup I_{0\infty} \cup D_2$ (рис. 1), где

$$D_1 = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0\}, \quad I_{0\infty} = \{(x,y) : x > 0,\ y = 0\}, \quad D_2 = \Delta \backslash \overline{G},$$

$\Delta = \{(x,y) : 0 < x + y,\ x > 0,\ y < 0\}$, G — открытый треугольник $O_{01}A_{01}C_{01}$; $O_{01}(3/8; -1/8)$; $A_{01}(5/8; -1/8$; $C_{01}(1/2; -1/4)$; $O_0(0;0)$; $E_0(1/2;0)$; $S_0(3/4;0)$; M_0, $N_0 \in O_0C_{0\infty}$,

$$O_0C_{0\infty} = \{(x,y) : y = -x,\ x \geq 0\},\ C_{01}C_{01\infty} = \{(x,y) : x + y = 1/2,\ x > 1/2\},$$

$A_{01}A_{01\infty} = \{(x,y) : x+y = 5/8,\ x \geq 5/8\}$, $S_0S_{0\infty} = \{(x,y) : x+y = 3/4,\ x \geq 3/4\}$,

$$O_{0\infty}\{(x,y) : x = 0,\ y > 0\};$$

$E_0O_{01}M_0$, $S_0A_{01}C_{01}N_0$ — отрезки характеристик; $\overline{D}_1 = D_1 \cup O_0 \cup O_0O_{0\infty} \cup I_{0\infty}$, $\overline{D}_2 = D_2 \cup O_0 \cup I_{0\infty} \cup O_0C_{0\infty} \cup (\overline{G}\backslash G)$, $\overline{D} = \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$. Веденные здесь обозначения будут нами использованы в дальнейшем.

Задача Θ_1^∞. *Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:*

1) $LBu \equiv 0$ *в* $D_1 \cup [D_2 \backslash (C_{01}C_{01\infty} \cup A_{01}A_{01\infty})]$;

2) $u \in C^0(\overline{D}) \cap C^1[\overline{D}\backslash(O_0 \cup I_{0\infty} \cup C_{01}C_{01\infty} \cup A_{01}A_{01\infty})] \cap C^2[(D_1 \cup D_2)\backslash(C_{01}C_{01\infty} \cup A_{01}A_{01\infty})]$; $l_0u = (1/2)(u_y - u_x) \in C^0[D_2 \cup I_{0\infty} \cup O_0C_{0\infty} \cup (\overline{G}\backslash G)]$;

3) $\lim\limits_{\rho \to +\infty} u = 0$, $\rho = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;

4) *существуют конечные равные друг другу пределы*

$$\lim_{y \to +0} u_y(x,y) = \lim_{y \to -0} u_y(x,y), \quad x > 0;$$

5) $u(0,y) = \varphi(y)$, $\varphi(y) \in C^2[0,+\infty]$,

$$\lim_{y \to +\infty} \varphi(y) = 0, \quad \varphi(y) = o(y^{-\beta}) \text{ при } y \to +\infty,\ 0 < \beta < 1/2;$$

$\varphi(y)$ *удовлетворяет условию Гёльдера на любом отрезке* $[0,y]$, $y > 0$;

6) $\Lambda_1^0 u = \frac{1}{4}(u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy}) = \tilde{\tau}_1^0(x)$ *на* $C_{01}A_{01}$, $\tilde{\tau}_1^0(x) \in C^0(C_{01}A_{01})$ *и* $\tilde{\tau}_1^0(x)$ — *абсолютно интегрируемая функция на* $\overline{C_{01}A_{01}}$;

7) $l_0u = \nu_1^0(x)$ *на* $O_0C_{0\infty}$, $\nu_1^0(x) \in C^2(O_0C_{0\infty})$ *является абсолютно интегрируемой функцией на любом отрезке* $[0,x]$, $x > 0$.

8) $l_0u = \nu_2^0(x)$ *на* $\overline{O_{01}A_{01}}$, $\nu_2^0(x) \in C^2(\overline{O_{01}A_{01}})$.

В данной задаче предполагается, что $\varphi(y), \tilde{\tau}_1^0(x), \nu_1^0(x)$, $\nu_2^0(x)$ — заданные функции.

2.1. Рассмотрим уравнение (4) в области D_2:

$$L_0u \equiv u_{xx} - u_{yy} = 0.$$

Обозначим $\tau(x) = u(x, 0-0)$, $\nu(x) = u_y(x, 0-0)$ и установим соотношение между $\tau(x)$, $\nu(x)$. При помощи этого соотношения докажем однозначную разрешимость задачи Θ_1^∞. С этой целью положим $\xi, \eta = \pm x + y$ в области D_2. Тогда уравнение (4) преобразуется в уравнение

$$Lu = u_{\xi\eta} = 0,$$

область D_2 переходит в H (рис. 2), точки O_0, M_0, N_0, E_0, S_0, O_{01}, A_{01}, C_{01} — соответственно в точки O, M, N, E, S, O_1, A_1, C_1; линии $O_0C_{0\infty}$, $I_{0\infty}$, $C_{01}C_{01\infty}$, $A_{01}A_{01\infty}$, $S_0S_{0\infty}$ — в линии OC_∞, I_∞, $C_1C_{1\infty}$, $A_1A_{1\infty}$, SS_∞ соответственно. Функция $\tau(x)$ преобразуется в $\tau(\xi)$, функция $\nu(x)$ переходит в $u_\xi(\xi,-\xi) + u_\eta(\xi,-\xi)$; l_0u преобразуется в $lu = u_\eta(\xi,\eta)$, $\Lambda_1^0 u$ переходит в $u_{\xi\xi}$, $\nu_1^0(x)$ переходит в $\nu_1^0(-\eta/2)$, $\nu_2^0(x)$ преобразуется в $\nu_2^0(-\eta - 1/8)$.

Предположим, что $\tau(\xi) \in C^0[0,\infty) \cap C^2(0,\infty)$. Тогда решение задачи Θ_1^∞ в области D_2 может быть представлено в виде решения $u(\xi,\eta)$ задачи A_∞^{**} — модифицированной задачи A [34, 35].

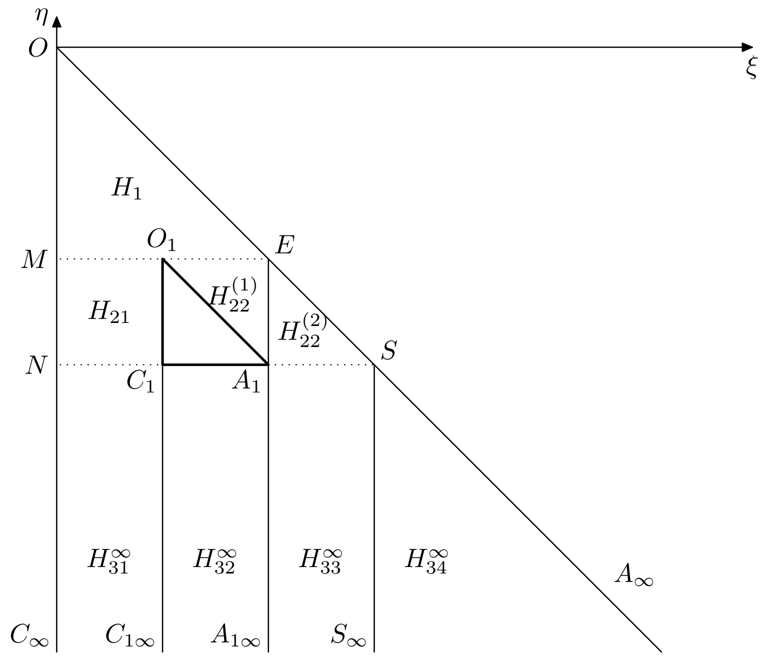

Рис. 2.

Задача A_∞^{**}. *Найти функцию $u(\xi,\eta)$ со следующими свойствами:*

1) $L_0 u \equiv 0$ *в* $[H \backslash C_1C_{1\infty} \cup A_1A_{1\infty}]$;

2) $u \in C^0(\overline{H}) \cap C^1[\overline{H} \backslash (O \cup I_\infty \cup C_1C_{1\infty} \cup A_1A_{1\infty})] \cap C^2[H \backslash (C_1C_{1\infty} \cup A_1A_{1\infty})]$; $lu = u_\eta(\xi,\eta) \in C^0[\overline{H} \backslash O]$;

3) $u = \tau(\xi)$ *на* $O \cup I_\infty$, $\tau(\xi) \in C^0(O \cup I_\infty) \cap C^2(I_\infty)$;

4) $\Lambda_1 u = u_{\xi\xi} = \tilde{\tau}_1(\xi)$ *на* C_1A_1, $\tilde{\tau}_1(\xi) \in C^0(\overline{C_1A_1})$, $\tilde{\tau}_1(\xi) = \tilde{\tau}_1^0(\xi/2 + 3/8)$;

5) $lu = \nu_2(\eta)$ на OC_∞, $\nu_1(\eta) \in C^2(OC_\infty)$ *является абсолютно интегрируемой на любом отрезке* $[\eta, 0]$, $\eta < 0$, $\nu_1(\eta) = \nu_1^0(-\eta/2)$;

6) $lu = \nu_2(\eta)$ *на* $\overline{O_1A_1}$, $\nu_2(\eta) \in C^2(\overline{O_1A_1})$, $\nu_2(\eta) = \nu_2^0(-\eta - 1/8)$, *при этом функции* $\nu_1(\eta)$, $\nu_2(\eta)$ *равны друг другу в точках* M *и* O_1, N *и* A_1 *вместе с производными первого и второго порядков.*

Пусть H_1, H_{21}, $H_{22}^{(1)}$, $H_{22}^{(2)}$ (см. рис. 2) — треугольные и четырехугольные области OEM, MO_1C_1N, O_1EA_1, ESA_1 соответственно; H_{31}^∞, H_{32}^∞, H_{33}^∞ — «прямоугольные» и H_{34}^∞ — «треугольные» полуполосы

$$NC_1C_{1\infty}C_\infty, \quad C_1A_1A_{1\infty}C_{1\infty}, \quad A_1SS_\infty A_{1\infty}, \quad SA_\infty S_\infty$$

соответственно.

Пусть $H_2 = H_{21} \cup H_{22}^{(1)} \cup EA_1 \cup H_{22}^{(2)}$;

$$H_3^{(\infty)} = \bigcup_{i=1}^{4} H_{3i} \cup C_1C_{1\infty} \cup A_1A_{1\infty} \cup SS_\infty, \quad i = \overline{1,4}.$$

Тогда можно убедиться непосредственно в справедливости леммы 1.

Лемма 1. *Решение задачи A_∞^{**} в $H_1 \cup H_2 \cup H_3^{(\infty)}$ определяется следующими соотношениями:*

$$u_1(\xi,\eta) = \tau(\xi) + \int_{-\xi}^{\eta} \nu_1(t)\,dt, \quad u_{21}(\xi,\eta) = \tau(\xi) + \int_{-\xi}^{\eta} \nu_1(t)\,dt, \tag{6}$$

$$u_{22}^{(1)}(\xi,\eta)=\tau(\xi)+\int\limits_{-\xi}^{\eta_M}\nu_1(t)\,dt+\int\limits_{\eta_M}^{\eta}\nu_2(t)\,dt,\quad u_{22}^{(2)}(\xi,\eta)=\tau(\xi)+\int\limits_{-\xi}^{\eta}\nu_2(t)\,dt, \tag{7}$$

$$u_{31}^{(\infty)}(\xi,\eta)=\tau(\xi)+\int\limits_{-\xi}^{\eta}\nu_1(t)\,dt,\quad u_{32}^{(\infty)}(\xi,\eta)=\tau_1(\xi)+\int\limits_{\eta_N}^{\eta}\nu_1(t)\,dt, \tag{8}$$

$$u_{33}^{(\infty)}(\xi,\eta)=\tau(\xi)+\int\limits_{-\xi}^{\eta_{A_1}}\nu_2(t)\,dt+\int\limits_{\eta_{A_1}}^{\eta}\nu_1(t)\,dt,\quad u_{34}^{(\infty)}(\xi,\eta)=\tau(\xi)+\int\limits_{-\xi}^{\eta}\nu_1(t)\,dt. \tag{9}$$

Во втором из равенств (8) $\tau_1\xi$ *— решение двухточечной краевой задачи для следа искомой функции* $u(\xi,\eta)$ *на отрезке* $\overline{C_1A_1}$*:*

$$\tau_1''(\xi)=\tilde\tau_1(\xi),\quad \tau_1(\xi_{C_1})=u_{21}(\xi_{C_1}-0,\eta_{C_1}),\quad \tau_1(\xi_{A_1})=u_{22}^{(1)}(\xi_{A_1}+0,\eta_{A_1}). \tag{10}$$

Здесь также $u_1(\xi,\eta)$, $u_{21}(\xi,\eta)$, $\dots$, $u_{34}^{\infty}(\xi,\eta)$ *— следы искомой функции* $u(\xi,\eta)$ *соответственно в областях* H_1, $H_{21},\dots,H_{34}^{\infty}$.

Теперь установим соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$. Положим

$$\tilde\nu(\eta)=\begin{cases}\nu_1(\eta), & \eta_M\le\eta\le 0,\\ \nu_2(\eta), & \eta_N\le\eta\le\eta_M,\\ \nu_1(\eta), & \eta\le\eta_N.\end{cases}$$

В силу свойств функций $\nu_1(\eta)$ и $\nu_2(\eta)$ функция $\tilde\nu(\eta)$ абсолютно интегрируема на любом отрезке $[\eta,\eta_0]$, $\eta<0$, дважды непрерывно дифференцируема на его открытой части, при этом $\tilde\nu(\eta)\equiv 0$ при $\nu_1(\eta)\equiv\nu_2(\eta)\equiv 0$. При помощи $\tilde\nu(\eta)$ функции $u_1(\xi,\eta)$, $u_{22}^{(2)}(\xi,\eta)$, $u_{34}^{(\infty)}(\xi,\eta)$ допускают запись в следующей форме:

$$u(\xi,\eta)=\tau(\xi)+\int\limits_{-\xi}^{\eta}\tilde\nu(t)\,dt. \tag{11}$$

Тогда $u_\xi(\xi,-\xi)+u_\eta(\xi,-\xi)=\tau'(\xi)+2\tilde\nu(-\xi)$.

Следовательно, для $u_y(x,-0)$ из равенства (11) получаем, что

$$\tau'(x)-\nu(x)=-2\tilde\nu(-x),\quad x>0. \tag{12}$$

Лемма 2. *Пусть* $u(\xi,\eta)$ *— решение задачи* A_∞^{**} *при* $\tilde\tau_1(\xi)=\nu_1(\eta)=\nu_2(\eta)\equiv 0$*, и пусть* H_δ *— конечная область, отсекаемая от области* H *характеристикой* $N_\delta S_\delta$ $(\eta=\delta<\eta_N,\ N_\delta\in OC_\infty,\ S_\delta\in OA_\infty)$. *Тогда* $\max\limits_{\overline{H}_\delta}u$ *и* $\min\limits_{\overline{H}_\delta}u$ *достигаются на* $\overline{OS_\delta}$ *и, следовательно,* $\max\limits_{\overline{H}_\delta}|u|$ *также достигается на* $\overline{OS_\delta}$.

Доказательство. Поскольку $\nu_1(\eta)\equiv\nu_2(\eta)\equiv 0$, из соотношений (6)–(9) следует, что

$$u(\xi,\eta)=\tau(\xi)\ \text{на}\ \overline{H}\backslash H_{32}^{\infty},\quad \overline{H}=H\cup OC_\infty\cup OA_\infty\cup O, \tag{13}$$

$$u(\xi,\eta)=\tau_1(\xi)\ \text{на}\ H_{32}^{\infty},\quad \overline{H}_{32}^{\infty}=H_{32}^{\infty}\cup\overline{C_1A_1}\cup C_1C_{1\infty}\cup A_1A_{1\infty}. \tag{14}$$

В частности, (13) и (14) выполняются на $\overline{H}_\delta$. Будучи решением задачи (10) при $\tilde\tau_1(\xi)\equiv 0$, $\tau_1(\xi)$ является линейной функцией на отрезке $[\xi_{C_1},\xi_{A_1}]$ и поэтому достигает на нем минимального и максимального значений на его концах; этими значениями являются $\tau(\xi_{C_1})$ или $\tau(\xi_{A_1})$. Это обстоятельство, наряду с соотношениями (13), (14), позволяет заключить, что

$$\min_{\overline{H}_\delta}u(\xi,\eta)=\min_{\overline{OS_\delta}}u(\xi,\eta),\quad \max_{\overline{H}_\delta}u(\xi,\eta)=\max_{\overline{OS_\delta}}u(\xi,\eta),$$

следовательно, $\max\limits_{\overline{H}_\delta}|u|$ достигается на $\overline{OS_\delta}$.

Следствие 1. *Решение задачи A_∞^{**} единственно.*

Теорема 1. *Если функции $\nu_1^0(x)$, $\nu_2^0(x)$ таковы, что при этом $\nu_1(\eta)$, $\nu_2(\eta)$ равны друг другу в точках M и O_1, N и A_1 вместе со своими производными первого и второго порядков, то решение задачи Θ_1^∞ единственно.*

Если принять во внимание условие 4 задачи Θ_1^∞, то доказательство сформулированной выше теоремы немедленно следует из приводимой ниже леммы 3.

Обозначим через D_ρ конечную область, отсекаемую от области D дугой $O_\rho A_\rho$ окружности $x^2 + y^2 = \rho^2$, $O_\rho(0,\rho)$ $A_\rho(\rho,0)$ и характеристикой $A_\rho C_\rho$, $C_\rho \in O_0C_{0\infty}$, $D_\delta \cap \{(x,y) : y > 0\} = D_\rho^+$, $D_\delta \cap \{(x,y) : y < 0\} = D_\rho^-$.

Лемма 3. *Пусть $u(x,y)$ — решение задачи Θ_1^∞ для $\nu_1^0(x) = \nu_2^0(x) = \tilde{\tau}_1^0(x) = \varphi(y) \equiv 0$, и пусть $u(x,y)$ отлична от 0 всюду в $\overline{D}_\rho$. Тогда $\max\limits_{\overline{D}_\rho}|u|$ достигается на $\overline{O_\rho A_\rho}$.*

Доказательство. Пусть

$$\max_{\overline{D}_\rho}|u| = \max_{\overline{D}_\rho^+}|u| = \max_{\overline{D}_\rho} u > 0.$$

Предположим, что $\max\limits_{\overline{D}_\rho} u$ не достигается на $\overline{O_\rho A_\rho}$. Принимая во внимание, что $\varphi(y) \equiv 0$, заключаем, что он достигается в некоторой внутренней точке $(x_0, 0)$ отрезка $\overline{O_0 A_\rho}$ в силу хорошо известного свойства эллиптических уравнений. Далее, ввиду другого известного свойства данного класса уравнений

$$u_y(x_0, 0+0) < 0. \tag{15}$$

Если $\max\limits_{\overline{D}_\rho^+}|u| = \max\limits_{\overline{D}_\rho} u$, то $u_y(x_0, -0) \geq 0$, при этом последнее неравенство вместе с (15) противоречит свойству 4 решений задачи Θ_1^∞. Поэтому $\max\limits_{\overline{D}_\rho} u$ не может достигаться в $\overline{D}_\rho^+$. Следовательно, он должен достигаться в $\overline{D}_\rho^-$. Но в соответствии с леммой 2 $\max\limits_{\overline{D}_\rho^-} u$ или, что то же самое, $\max\limits_{\overline{D}_\rho} u$ должен достигаться на $\overline{O_0 A_\rho}$, что приводит к противоречию со сказанным выше. Итак, мы приходим к заключению, что

$$\max_{\overline{D}_\rho} u = \max_{\overline{O_\rho A_\rho}} u.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи Θ_1^∞ и $u(x,y) \neq 0$ тождественно в $\overline{D}$. Тогда там существует некоторая точка (x_0, y_0) такая, что $|u(x_0,y_0)| = u_0 > 0$. Аналогично тому, как это сделано выше, построим область D_ρ, которая содержит точку (x_0, y_0). Очевидно, что $\max\limits_{\overline{D}_\rho}|u| \geq u_0 > 0$. Следовательно, $\lim\limits_{\rho\to+\infty} u(x,y) \neq 0$. Это неравенство противоречит условию 3 задачи Θ_1^∞. Полученное противоречие доказывает требуемое.

Замечание 1. При выполнении условий леммы 3 можно доказать, что

$$\max_{\overline{D}_\rho^+}|u| = \max_{\overline{O_\rho A_\rho}}|u|.$$

Для этого следует воспользоваться соотношениями (13)–(15) и (6)–(9).

2.2. Существование решения задачи Θ_1^∞.

Теорема 2. *Пусть функции $\nu_1^0(x)$ и $\nu_2^0(x)$ таковы, что соответствующие функции $\nu_1(\eta)$, $\nu_2(\eta)$ равны друг другу в точках M и N вместе со своими производными первого и второго порядков. Далее, пусть $\nu_1^0(x) = o(x^{-1-\beta})$, $0 < \beta < 1/2$ при $x \to +\infty$. Тогда задача Θ_1^∞ разрешима, причем в явном виде.*

Доказательство. Рассмотрим задачу N для уравнения (1) в подобласти его эллиптичности D_1. Она заключается в нахождении решения уравнения, удовлетворяющего условиям 3, 5 задачи Θ_1^∞ и условию $u_y(x,0) = \nu(x)$, $0 < x < +\infty$.

Используя функцию Грина, запишем решение задачи N [37]

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \varphi(t)\left[\frac{x}{x^2+(t-y)^2}+\frac{x}{x^2+(t+y)^2}\right]dt+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \nu(t)\ln\frac{y^2+(t-x)^2}{y^2+(t+x)^2}\,dt. \tag{16}$$

Из равенства (16) получаем функциональное соотношение между $\tau(x) = u(x,0)$ и $\nu(x) = u_y(x,0)$:

$$\tau(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \varphi(t)\frac{2x}{x^2+t^2}\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \nu(t)\ln\left|\frac{t-x}{t+x}\right|dt. \tag{17}$$

Применяя хорошо известный результат, полученный А. В. Бицадзе [9], перепишем (12) в следующем виде:

$$\tau'(x) - \nu(x) = \psi'\left(\frac{x}{2}\right), \tag{18}$$

где

$$\psi'\left(\frac{x}{2}\right) = -2\tilde{\nu}(-x).$$

Соотношение (18) может быть переписано в виде

$$\tau(x) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) + \int\limits_0^x \nu(t)\,dt. \tag{19}$$

Из условия «склеивания» 4 задачи Θ_1^∞ и соотношений (17), (19) следует, что функция $\nu(x)$ должна удовлетворять интегральному уравнению

$$\int\limits_0^x \nu(t)\,dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \nu(t)\ln\left|\frac{t-x}{t+x}\right|dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \varphi(t)\frac{2x}{x^2+t^2}\,dt - 2\psi\left(\frac{x}{2}\right).$$

Дифференцируя здесь по переменной x [9], получаем интегральное уравнение относительно функции $\nu(x)$:

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \nu(t)\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x}\right)dt = g(x), \tag{20}$$

где

$$g(x) = -\psi'\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \varphi(t)\frac{t^2-x^2}{(t^2+x^2)^2}\,dt. \tag{21}$$

В классе функций, ограниченных на бесконечности и обращающихся в бесконечность интегрируемого порядка при $x = 0$, уравнение (20) имеет единственное решение [38]

$$\nu(x) = \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2\pi\sqrt{x}}\int_0^\infty t^{1/2}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x}\right)g(t)\,dt. \tag{22}$$

Теперь покажем, что $\nu(x) = o(x^{-\gamma})$ при $x \to \infty$, $\gamma > 1$.

С этой целью рассмотрим функцию

$$f_1(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{t^2 - x^2}{(t^2 + x^2)^2}\varphi(t)\,dt.$$

Воспользуемся формулой 3.241(4) из [39]:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{(p + qx^\nu)^{n+1}}dx = \frac{1}{\nu p^{n+1}}\left(\frac{p}{q}\right)^{\mu/\nu}\frac{\Gamma(1 + n - \mu/\nu)}{\Gamma(1+n)} \quad (0 < \mu/\nu < n + 1).$$

Принимая в расчет, что $\varphi(t) = o(t^{-\beta})$ $(0 < \beta < \frac{1}{2})$ и $\left|\frac{t^2-x^2}{(t^2+x^2)^2}\right| \le 1$, применим вышеприведенную формулу и получим следующую оценку:

$$|f_1(x)| \le \frac{2}{\pi}\frac{1}{2x^2}\left(\frac{x^2}{1}\right)^{\frac{1-\beta}{2}}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1)} = o(x^{-1-\beta}) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Из данной оценки, условий теоремы и соотношения (21) следует, что $g(x) = o(x^{-1-\beta})$ при $0 < \beta < \frac{1}{2}$.

Оценим интеграл

$$J(x) = \int_0^\infty g(t)\left(\frac{t}{x}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x}\right)dt.$$

Имеем

$$J(x) = \int_0^\infty g(t)\left(\frac{t}{x}\right)^{1/2}\frac{1}{t-x}\,dt - \int_0^\infty g(t)\left(\frac{t}{x}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{t+x}\right)dt = i_1(x) - i_2(x).$$

Принимая во внимание, что $g(t) = \xi(t)t^{-1-\beta}$, где $\xi(t) \to 0$ при $x \to +\infty$, введем новую переменную $z = t/x$. Тогда получаем, что

$$i_1(x) = -x^{-1-\beta}\int_0^\infty \xi(xz)\frac{z^{-1/2-\beta}}{1-z}\,dz, \quad i_2(x) = x^{-1-\beta}\int_0^\infty \xi(xz)\frac{z^{-1/2-\beta}}{1+z}\,dz,$$

$\xi(xz) \to 0$ при $xz \to \infty$. В соответствии с формулой 3.241(3) из [39]

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1-x^q}dx = \frac{\pi}{q}\operatorname{ctg}\frac{p\pi}{q} \quad (p < q)$$

и $i_1(x) = o(x^{-1-\beta})$. Согласно формуле 3.241(2) из [39]

$$i_2(x) = \int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{1+x^\nu}dx = \frac{\pi}{\nu}\csc\frac{\mu\pi}{\nu} \quad (\operatorname{Re}\nu \ge \operatorname{Re}\mu > 0).$$

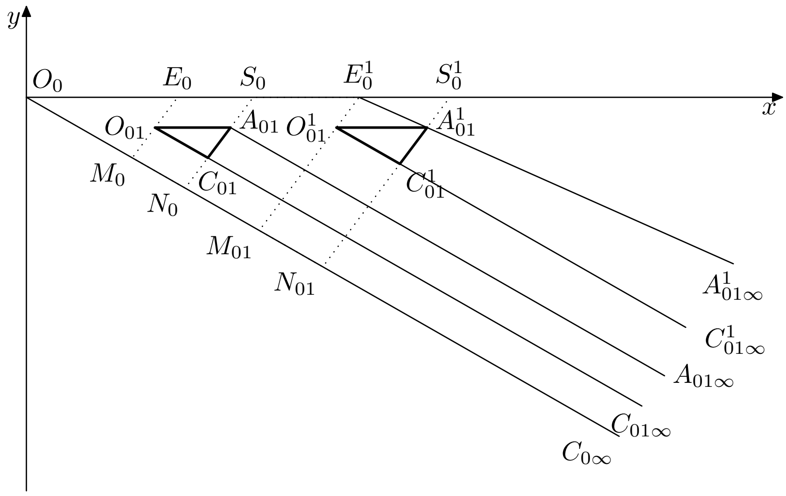

Рис. 3. Область с трехсвязной подобластью гиперболичности.

Поэтому $J(x) = o(x^{-1-\beta})$. Следовательно, с учетом того, что $g(x) = o(x^{-1-\beta})$, получаем, что $\nu(x) = o(x^{-1-\beta})$, $0 < \beta < 1$.

Теперь заметим [37], что в случае, когда $\varphi(x)$ на любом отрезке $[0, N]$, $N > 0$, удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ $(0 < \lambda < 1)$, имеем $\nu(x) = \nu^*(x)x^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $\nu^*(x) \in H[0, \delta]$, $\delta > 0$. Следовательно, $\nu(x)$ в точке $x = 0$ имеет особенность порядка менее единицы.

При нахождении функции $\nu(x)$ решение исследуемой задачи Θ_1^∞ получено в явной форме: в области эллиптичности $u(x, y)$ находится по формуле (16), а в области гиперболичности она определяется в соответствии с формулами (6)–(9).

§ 3. Уравнение Лаврентьева — Бицадзе в трехсвязной области (задача Θ_2^∞)

Рассмотрим уравнение Лаврентьева — Бицадзе (4) в области $D^1 = D_1 \cup I_\infty \cup D_2^1$ (рис. 3) с трехсвязной подобластью гиперболичности $D_2^1 = \Delta\backslash(G \cup G^1)$. Она может быть построена следующим образом. Будем смещать область D_2 (см. рис. 1) вдоль оси абсцисс до тех пор, пока точка O_0 не совместится с точкой S_0. При этом область D_2 переходит в область $\widetilde{D}_2$ той же формы, открытый треугольник $G = O_{01}A_{01}C_{01}$ (см. рис. 1) переходит в треугольник $O_{01}^1 A_{01}^1 C_{01}^1$, а $D_2^1 = \Delta\backslash(G \cup G^1)$. Увеличивая абсциссу каждой из точек прообраза на величину, равную длине отрезка O_0S_0, получаем абсциссу каждой новой точки: $E_0^1(1/2+3/4; 0)$, $S_0^1(3/4+3/4; 0)$, $O_{01}^1(3/8+3/4; -1/8)$, $A_0^1(5/6+3/4; -1/8)$, $C_{01}^1(1/2 + 3/4; -1/4)$. Очевидно, что такие сдвиги можно воспроизвести произвольное количество раз, последовательно помещая O_0 в точки S_0, S_0^1, S_0^2, K, S_0^n. Описанная методика позволяет создавать сколь угодно многосвязные подобласти гиперболичности для уравнения Лаврентьева — Бицадзе. Однако такой подход невозможен, когда подобласть гиперболичности уравнения (4) конечна [33]. После первого сдвига ситуация в области $\widetilde{D}_2$ в точности такая же, что и в области D_2 до сдвига (с точки зрения решения возникающих в ней задач). Такая же ситуация наблюдается на каждом из последующих сдвигов. Поэтому исследование достаточно ограничить рассмотрением случая единственного сдвига, т. е. изучать уравнение (4) в области D^1. Ниже мы сумеем убедиться в оправданности подобного подхода.

Задача Θ_2^∞. *Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:*

1) $LBu \equiv 0$ *в* $D_1 \cup \big[D_2^1 \backslash \big(C_{01}C_{01\infty} \cup A_{01}A_{01\infty} \cup C_{01}^1 C_{01\infty}^1 \cup A_{01}^1 A_{01\infty}^1\big)\big]$;

2) $u \in C^0(\overline{D}^1) \cap C^1\big[\overline{D}^1 \backslash \big(O_0 \cup I_{0\infty} \cup C_{01}C_{01\infty} \cup A_{01}A_{01\infty} \cup C_{01}^1 C_{01\infty}^1 \cup A_{01}^1 A_{01\infty}^1\big)\big]$; $l_0 u = \frac{1}{2}(u_y - u_x) \in C^0\big[D_2^1 \cup I_{0\infty} \cup O_{01}C_{01} \cup OO_{01}^1 C_{01}^1 \cup (\overline{G} \backslash G) \cup (\overline{G}^1 \backslash G^1)\big]$;

3) $\lim\limits_{\rho\to\infty} = 0$, $\rho = (x^2+y^2)^{1/2}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;

4) *существуют конечные пределы* $\lim\limits_{y\to+0} u_y(x,y) = \lim\limits_{y\to-0} u_y(x,y)$, $x > 0$;

5) $u(0,y) = \varphi(y)$, $\varphi(y) \in C^2[0,+\infty]$, $\lim\limits_{y\to+\infty} \varphi(y) = 0$, $\varphi(y) = o(y^{-\beta})$ *при* $y \to +\infty$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$; $\varphi(y)$ *удовлетворяет условию Гёльдера на любом отрезке* $[0,y]$, $y > 0$;

6) $\Lambda_1^0 u = \frac{1}{4}(u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy}) = \tilde{\tau}_1^0(x)$ *на* $C_{01}A_{01}$, $\tilde{\tau}_1^0(x) \in C^0(C_{01}A_{01})$ *и* $\tilde{\tau}_1^0(x)$ *— абсолютно интегрируемая функция на* $\overline{C_{01}A_{01}}$;

6.1) $\Lambda_1^0 u = \tilde{\tau}_{11}^0(x)$ *на* $C_{01}^1 A_{01}^1$, $\tilde{\tau}_{11}^0(x) \in C\big(C_{01}^1 A_{01}^1\big)$ *абсолютно интегрируема на* $\overline{C_{01}^1 A_{01}^1}$;

7) $l_0 u = \nu_1^0(x)$ *на* $O_0 C_{0\infty}$, $\nu_1^0(x) \in C^2(O_0 C_{0\infty})$ *абсолютно интегрируема на любом отрезке* $[0,x]$, $x > 0$.

8) $l_0 u = \nu_2^0(x)$ *на* $\overline{O_{01}A_{01}}$, $\nu_2^0(x) \in C^2(\overline{O_{01}A_{01}})$.

8.1) $l_0 u = \nu_{21}^0(x)$ *на* $\overline{O_{01}^1 A_{01}^1}$, $\nu_{21}^0(x) \in C^2\big(\overline{O_{01}^1 A_{01}^1}\big)$.

В данной задаче предполагается, что $\varphi(y)$, $\bar{\tau}_1^0(x)$, $\bar{\tau}_{11}^0(x)$, $\nu_1^0(x)$, $\nu_2^0(x)$, $\nu_{21}^0(x)$ — заданные функции.

3.1. Рассмотрим уравнение (4) в области D_2^1. Во введенных выше обозначениях возьмем $\tau(x) = u(x, 0-0)$, $\nu(x) = u_y(x, 0-0)$ и постараемся установить соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$. Положим $\xi, \eta = \pm x + y$. Такая замена переменных преобразует уравнение (4) к виду

$$Lu \equiv u_{\xi,\eta} = 0,$$

область D_2^1 преобразуется в H^1 (рис. 4), точки из области D_2^1 соответственно переходят в точки, в обозначениях которых опускается (первый) нижний индекс «0», например, O_{01} — в O_1, S_0 — в S, $S_{0\infty}$ — в S_∞ и т. д. Преобразования $\tau(x)$ и $\nu(x)$, $l_0 u$, $\Lambda_1^0 u$, $\nu_1^0(x)$, $\nu_2^0(x)$ были приведены выше; $\tau_{11}^0(x)$ преобразуется в $\tau_{11}(\xi)$, $\nu_{21}^0(x)$ — в $\nu_{21}(\xi)$.

Задача $A_{\infty 1}^{**}$. *Найти функцию $u(\xi,\eta)$ со следующими свойствами:*

1) $Lu \equiv 0$ *в* $H^1 \backslash \big(C_1 C_{1\infty} \cup A_1 A_{1\infty} \cup C_1^1 C_{1\infty}^1 \cup A_1^1 A_{1\infty}^1\big)$;

2) $u \in C^0(\overline{H}^1) \cap C^1\big[\overline{H}^1 \backslash \big(O \cup I_\infty \cup C_1 C_{1\infty} \cup A_1 A_{1\infty} \cup C_1^1 C_{1\infty}^1 \cup A_1^1 A_{1\infty}^1\big)\big] \cap C^2\big[H^1 \backslash \big(C_1 C_{1\infty} \cup A_1 A_{1\infty} \cup C_1^1 C_{1\infty}^1 \cup A_1^1 A_{1\infty}^1\big)\big]$; $lu \in C^0[\overline{H}^1 \backslash O]$;

3) $u = \tau(\xi)$ *на* $0 \cup I$, $\tau(\xi) \in C^0(O \cup I) \cap C^2(I)$;

4) $\Lambda_1 u = u_{\xi\xi} = \tilde{\tau}_1(\xi)$ *на* $C_1 A_1$, $\tilde{\tau}_1(\xi) = \tilde{\tau}_1^0(\xi/2 + 3/8)$;

4.1) $\Lambda_1 u = \tilde{\tau}_{11}(\xi)$ *на* $C_1^1 A_1^1$, $\tilde{\tau}_{11}(\xi) = \tilde{\tau}_{11}^0(\xi/2 + 3/4)$;

5) $lu = \nu_1(\eta)$ *на* OC_∞, $\nu_1(\eta) = \nu_1^0(-\eta/2)$;

6) $lu = \nu_2(\eta)$ *на* $\overline{O_1 A_1}$, $\nu_2(\eta) = \nu_2^0(-\eta - 1/8)$, *и функции* $\nu_1(\eta)$, $\nu_2(\eta)$ *равны друг другу в точках* M *и* O_1, N *и* A_1 *вместе со своими производными первых двух порядков;*

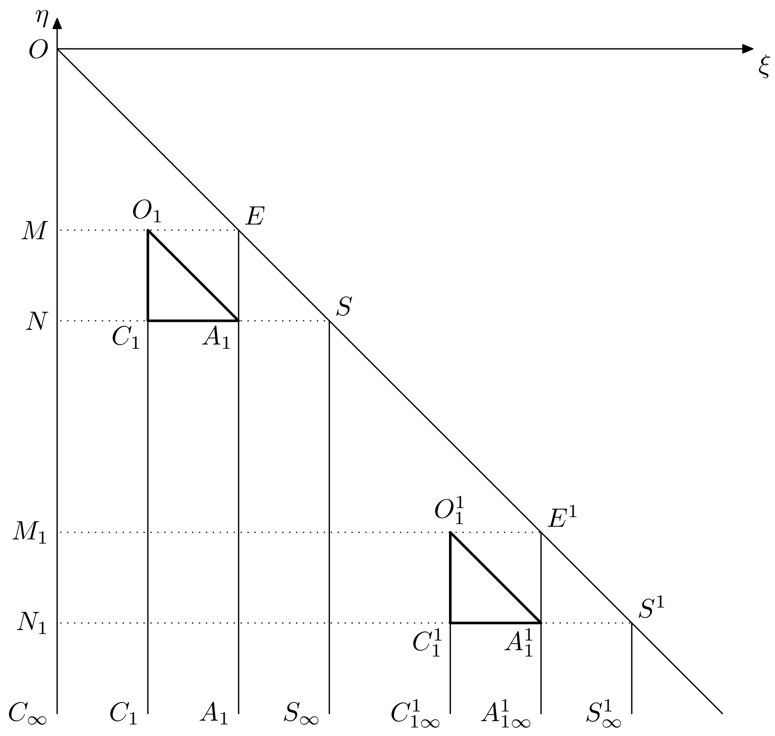

Рис. 4.

6.1) *$lu = \nu_{21}(\eta)$ на $O_1^1 A_1^1$, $\nu_{21}(\eta) = \nu_{21}^0(-\eta - 1/8)$, и функции $\nu_1(\eta)$, $\nu_2(\eta)$ равны друг другу в точках M_1^1 и O_1^1, N_1 и A_1^1 вместе со своими производными первых двух порядков.*

Выше отмечено, что бесконечная область $\widetilde{D}_2$, отсекаемая линией $S_0 S_{0\infty}$ от области D_2, имеет ту же структуру, что и область D_2. Кроме того, $\frac{\partial}{\partial\eta} u_{33}^{\infty}(\xi,\eta) = \nu_1(\eta)$ на SS_∞. Следовательно, задача A_∞^{**} для этих областей одна и та же. Это позволяет при изложении опустить многие очевидные детали.

Обозначим через H^* образ области $\widetilde{D}_2$ при замене переменных $\xi, \eta = \pm x + y$.

Лемма 4. *Решение задачи $A_{\infty 1}^{**}$ в области $H \backslash H^*$ определяется по формулам* (6)–(8), *а в области H^* — по формулам, аналогичным* (6)–(9).

Чтобы установить соотношение между $\tau(x) = \nu(x, 0-0)$ и $\nu(x) = u_y(x, 0-0)$, рассмотрим новую функцию

$$\tilde{\nu}_1(\eta) = \begin{cases} \nu_1(\eta), & \eta_M \le \eta \le 0, \\ \nu_2(\eta), & \eta_N \le \eta \le \eta_M, \\ \nu_1(\eta), & \eta_{M_1} \le \eta \le \eta_N, \\ \nu_{21}(\eta), & \eta_{N_1} \le \eta_{M_1}, \\ \nu_1(\eta), & \eta < \eta_{N_1}. \end{cases}$$

Очевидно, что $\tilde{\nu}_1(\eta) \equiv 0$ при $\nu_1(\eta) = \nu_2(\eta) = \nu_{21}(\eta) \equiv 0$. С помощью функции $\tilde{\nu}_1(\eta)$ решение задачи $A_{\infty 1}^{**}$ вблизи прямой $\eta = -\xi$ допускает запись в виде

$$u(\xi,\eta) = \tau(\xi) + \int\limits_{-\xi}^{\eta} \tilde{\nu_1}(t)\,dt. \tag{23}$$

Значит,

$$u_\xi(\xi,-\xi) + u_\eta(\xi,-\xi) = \tau'(\xi) + 2\tilde{\nu_1}(-\xi).$$

Из (23) получаем следующее соотношение для $u_y(x,-0)$:

$$\tau'(x) - \nu(x) = -2\tilde{\nu_1}(-x), \quad x > 0. \tag{24}$$

Это основное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ аналогично соотношению (12) для задачи Θ_1^∞.

Лемма 5. *Пусть $u(\xi,\eta)$ является решением задачи $A_{\infty 1}^{**}$ при $\tilde{\tau}_1(\xi) = \tilde{\tau}_{11}(\xi) = \nu_1(\xi) = \nu_2(\xi) = \nu_{21}(\xi) \equiv 0$, и пусть H_δ является конечной областью, отсекаемой от области H^1 характеристикой $N_\delta S_\delta$ ($\eta = \delta < \eta_{N_1}$, $N_\delta \in OC_\infty$, $S_\delta \in OA_\infty$). Тогда $\max\limits_{\overline{H}_\delta} u$ и $\min\limits_{\overline{H}_\delta} u$ достигаются на $\overline{OS_\delta}$ и, следовательно, $\max\limits_{\overline{H}_\delta} |u|$ достигается там же.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

Следствие 2. *Решение задачи $A_{\infty 1}^{**}$ единственно.*

Обозначим через D_ρ конечную область, отсекаемую от области D^1 дугой окружности $O_\rho A_\rho$ и характеристикой $A_\rho C_\rho$ ($\rho > x_{S_1}$), $O_\rho(0,\rho)$, $A_\rho(\rho,0)$, $C_\rho \in O_0C_\infty$; $D_\rho^+ = D_\delta \cap \{(x,y) : y > 0\}$, $D_\rho^- = D_\delta \cap \{(x,y) : y < 0\}$.

Лемма 6 (принцип максимума). *Пусть $u(x,y)$ — решение задачи Θ_2^∞ при $\varphi(y) = \tilde{\tau}_1^0(x) = \tilde{\tau}_{11}^0(x) = \nu_1^0(x) = \nu_2^0(x) = \nu_{21}^0(x) \equiv 0$ и $u(x,y) \neq 0$ тождественно в $\overline{D}_\rho$. Тогда $\max\limits_{\overline{D}_\rho} |u|$ достигается на $\overline{O_\rho A_\rho}$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3 при $\rho > x_{S_1}$.

Теорема 3. *Пусть функции $\nu_1^0(x)$ и $\nu_2^0(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Далее, пусть функции $\nu_1^0(x)$, $\nu_{21}^0(x)$ таковы, что соответствующие им функции $\nu_1(\eta)$, $\nu_{21}(\eta)$ равны друг другу в точках M_1 и O_1^1, N_1 и A_1^1 вместе со своими производными первых двух порядков. Тогда решение задачи Θ_2^∞ единственно.*

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ является решением однородной задачи Θ_2^∞. Тогда, в частности, справедливо равенство

$$\lim_{\rho\to+\infty} u(x,y) = 0, \quad x \geq 0,\ y \geq 0. \tag{25}$$

Предположим, что $u(x,y) \neq 0$ тождественно в $\overline{D}^1$. Пусть существует точка $(x_0,y_0) \in \overline{D}^1$ такая, что $|u(x_0,y_0)| = u_0 > 0$. Выберем $\rho > x_{S_1}$ достаточно большим, чтобы при использовании в вышеупомянутой конструкции точка (x_0,y_0) принадлежит $\overline{D}_\rho$. Согласно лемме 5

$$\max_{\overline{D}_\rho} |u| = \max_{\overline{O_\rho A_\rho}} |u| \geq u_0.$$

Переходя к пределу при $\rho \to +\infty$ в вышеприведенном неравенстве, получаем, что он отличен от нуля. Полученное противоречие с равенством (25) доказывает теорему.

Теорема 4. *Если функции* $\nu_1^0(x)$, $\nu_2^0(x)$, $\nu_{21}^0(x)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 3, *то задача* Θ_2^∞ *разрешима, и притом в явном виде.*

Доказательство. Подставляя $\nu_1(x)$ вместо $\nu_1(-x)$ в соотношение (18) и применяя условие 4, получаем из (18) и (17) так же, как это было проделано выше, интегральное уравнение вида (20) относительно функции $\nu(t)$. Решение этого интегрального уравнения определяется равенством вида (22). Таким образом, разрешимость задачи Θ_2^∞ доказана.

Краевая задача Θ_n^∞ формулируется аналогично, ее однозначная разрешимость для уравнения (4) доказывается таким же образом.

Замечание 2. При доказательстве данной теоремы, а также теоремы 1 использована идея доказательства теоремы 1 [36] в полуполосе.

§ 4. Общее уравнение Лаврентьева — Бицадзе

Рассмотрим уравнение (5) в области D (см. рис. 1); $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y) \in C^0(\overline{D})$, $C(x,y) \le 0$ в D_1; $A(x,y)$, $B(x,y) \in C^1(\overline{D}_2)$.

В области D_2 уравнение (5) имеет вид

$$LPu = u_{xx} - u_{yy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = 0. \tag{26}$$

Рассмотрим в области D_2 оператор

$$\tilde{l}_0 u = \frac{1}{2}(u_y - u_x) - \frac{1}{4}[A(x,y) + B(x,y)]u. \tag{27}$$

Предположим, что функция $u(x,y)$ обладает свойством

$$\tilde{l}_0 u \in C^0[D_2 \cup I_\infty \cup (\overline{G} \backslash G)].$$

Задача Θ_1^∞**.** *Найти функцию* $u(x,y)$, *обладающую свойствами* 2–6 *решения задачи* Θ_1^∞ *для уравнения Лаврентьева — Бицадзе* (4), *а также следующими дополнительными свойствами:*

1) $LPu \equiv 0$ *в* $D_1 \cup [D_2 \backslash (C_{01}C_{01\infty} \cup A_{10}A_{10\infty})]$;

7) $\tilde{l}_0 u = \nu_1(x)$ *на* $\overline{O_0 C_{0\infty}}$;

8) $\tilde{l}_0 u = \nu_2(x)$ *на* $\overline{O_0 A_0}$.

В рассматриваемой задаче $\varphi(y)$, $\tilde{\tau}_1^0(x)$, $\nu_1^0(x)$, $\nu_2^0(x)$, $\nu_{21}^0(x)$ — заданные функции, соответствующие такого же рода функциям в задаче Θ_1^∞ для уравнения (4).

Предполагается, что функции, о которых пойдет речь ниже, обладают свойствами 1 и 2 решения задачи Θ_1^∞.

4.1. Единственность решения задачи Θ_1^∞.

Положим $\xi, \eta = \pm x + y$ в области D_2. При этом область D_2 переходит в область H (рис. 2), а уравнение (5) преобразуется в уравнение

$$Pu \equiv u_{\xi\eta} + a(\xi,\eta)u_\xi + b(\xi,\eta)u_\eta + c(\xi,\eta)u = 0, \tag{28}$$

$$a(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}\left[A\left(\frac{\xi-\eta}{2}; \frac{\xi+\eta}{2}\right) + B\left(\frac{\xi-\eta}{2}; \frac{\xi+\eta}{2}\right)\right];$$

$$b(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\left[A\left(\frac{\xi-\eta}{2}; \frac{\xi+\eta}{2}\right) - B\left(\frac{\xi-\eta}{2}; \frac{\xi+\eta}{2}\right)\right],\ c(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}C\left(\frac{\xi-\eta}{2}; \frac{\xi+\eta}{2}\right).$$

Оператор $\tilde{l}_0 u$ переходит в $\tilde{l}u = u_\eta + a(\xi,\eta)u$.

Разобьем область H на части H_1, H_{21}, H_{22}^1 и т. д. (см. рис. 2) так, как это сделано ранее.

Чтобы сформулировать принцип максимума [32, 33] применительно к области H, выполним следующее построение. Пусть Q — произвольная точка из $D_2 \cup \overline{O_1C_1}$. Проведем через точку Q горизонтальную характеристику $\eta = \text{const}$ до ее пересечения с $OC_\infty \cup \overline{O_1A_1}$ в некоторой точке P. Точка P принадлежит $\overline{O_1A_1}$, если $Q \in (H_{22} \cup EO_1 \cup SA_1)$, в противном случае $P \in OC_\infty$. Ниже через PQ обозначен отрезок интегрирования.

Пусть $\beta = \exp\bigl\{\int\limits_{PQ} b(\xi,\eta)\,d\xi\bigr\}$, $h = a_\xi + ab - c$ — инвариант Римана [2] для уравнения (28).

Определение 1. Говорят, что коэффициенты уравнения (5) *удовлетворяют условиям* (C) или (D) [32], если $a(\xi,\eta) < 0$ на $OC_\infty \cup \overline{O_1A_1}$ и $a(P) + \int\limits_{PQ} \beta(2|h| + c)\,d\xi < 0$ или $\beta(Q)a(Q) + \int\limits_{PQ} \beta|h|\,d\xi < 0$.

Пусть H_δ — конечная область, отсекаемая от области H горизонтальной характеристикой $\eta = \delta$ $(\delta < \eta_S)$, S_δ, C_δ — точки, в которых характеристика пересекает I_∞ и OC_∞ соответственно.

Лемма 7 (принцип максимума модуля [34, 35, теорема 1]). *Пусть коэффициенты уравнения* (5) *удовлетворяют условию* (C) *или* (D), *и пусть* $u(\xi,\eta)$ — *решение уравнения* (28) *такое, что* $\tilde{l}u = 0$ *на* $OC_\delta \cup O_1A_1$ *и* $u(\xi,\eta) \not\equiv 0$ *тождественно в* $\overline{H}_\delta$. *Тогда* $\max\limits_{\overline{H}_\delta}|u|$ *достигается только на* $\overline{OS_\delta} \cup \overline{A_1C_1}$.

Замечание 3. Лемма 7 остается справедливой и при более строгих ограничениях (которые, однако, допускают более простую запись): $a < 0$ на $OC_\infty \cup \overline{A_1C_1}$, но $h \le 0$ и $c \le 0$ на $H_\delta \cup \overline{S_\delta C_\delta}$ (см. [34, 35]). Поскольку O_1A_1 не является отрезком характеристики, данную лемму не удается доказать в другой форме $(\max\limits_{\overline{H}_2}|u| = (\max\limits_{OS_\delta \cup \overline{A_1C_1}}|u|)$, даже если предполагаются выполненными еще более строгие условия: $a \le 0$, $h \le 0$ и $c \le 0$ на $H_\delta \cup S_\delta C_\delta$, а также $u_\eta \le 0$ на $OS_\delta \cup \overline{A_1C_1}$. Принцип максимума Агмона — Ниренберга — Проттера был доказан в случае, когда выполнены все приведенные выше условия [18].

Теорема 5. *Если все коэффициенты уравнения* (5) *удовлетворяют условию* (C) *или* (D), *то решение задачи* Θ_1^∞ *для уравнения* (5) *единственно.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Оно основывается на справедливости леммы 3 применительно к уравнению (5), если его коэффициенты удовлетворяют условию леммы 7 и используется аргументация доказательства леммы 2.

4.2. Разрешимость задачи Θ_1^∞. Обсуждение.

В этом пункте полезно принять во внимание результаты работы [21]. В ней разрешимость задачи Трикоми доказывается путем ее окончательного сведения к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно функции $\nu(x) = u_y(x,0)$. Существование его решения следует из принципа максимума Агмона — Ниренберга — Проттера [18].

Для построения интегрального уравнения задачи Трикоми, а также задачи Θ_1^∞ сначала требуется выразить $\tau(x) = u(x,+0)$ через $\nu(x) = u_y(x,+0)$, $\tau(x) = u(x,-0)$ через $\nu(x) = u_y(x,-0)$, а затем применить так называемые условия «склеивания»: $u(x,+0) = u(x,-0)$ и $u_y(x,+0) = u_y(x,-0)$. В [21] задача N была решена при помощи специального метода на основе ее решения для уравнения

Лапласа. Мы в состоянии получить решение задачи N для уравнения Лапласа в четверти плоскости и можем им воспользоваться в своих целях.

Но для того чтобы выразить $u(x,-0)$ через $u_y(x,-0)$, нам потребуется решить интегральное уравнение Вольтерра второго рода с двумя переменными в каждой из частей, на которые разбита область H (см. рис. 2) для решения задачи Θ_1^∞. Этого можно избежать в случае, когда инвариант Римана [2] для уравнения (28) $h = a_\xi + ab - c$ равен нулю в так называемой «простейшей» области H_0 [34, 35]. Каждая из частей H_1, H_{21}, … , H_{34} областей H (см. рис. 2) является «простейшей».

Пусть $\xi = r(\eta)$ и $\eta = m(\xi)$ — уравнения отрезков γ_l и γ_h прямых, которые ограничивают область H_0 слева и сверху соответственно, причем H_0 такого же вида, что и вышеперечисленные области.

Задача A_0**.** *Найти функцию $u(\xi,\eta)$ со следующими свойствами:*

1) *$Lu \equiv 0$ в H_0;*

2) *$u \in C^0(\overline{H}_0) \cap C^1(\overline{H}_0 \backslash \bar{\gamma}_h) \cap C^2(H_0)$;*

3) *$u = \tau(\xi)$ на $\bar{\gamma}_h$, $\tau(\xi) \in C^0(\bar{\gamma}_h) \cap C^2(\gamma_h)$;*

4) *$\bar{l}u = \nu(\xi)$ на γ_l, $\nu(\xi) \in C^1(\gamma_l)$ и $\nu(\xi)$ является абсолютно интегрируемой функцией на $\bar{\gamma}_l$.*

В данной задаче функции $\tau(\xi)$, $\nu(\xi)$ предполагаются заданными.

Пусть

$$N(\xi,\eta) = \exp\left\{-\int\limits_{m(\xi)}^{\eta} a(\eta,t)\,dt\right\}, \quad P(\xi,\eta) = \exp\left\{-\int\limits_{r(\eta)}^{\xi} b(t,\eta)\,dt\right\}.$$

Тогда непосредственно можно проверить, что решение задачи A_0 при $h(\xi,t) \equiv 0$ определяется формулой [35, следствие 1]

$$u(\xi,\eta) = N(\xi,\eta)\left[\tau(\xi) + \int\limits_{m(\xi)}^{\eta} N^{-1}(\xi,s)P(\xi,s)\nu(s)\,ds\right]. \tag{29}$$

Для уравнения (4) имеем

$$u(\xi,\eta) = \tau(\xi) + \int\limits_{m(\xi)}^{\eta} \nu(s)\,ds. \tag{30}$$

Формула (30) применялась в п. 2.1.

В области H_1 (см. рис. 2) согласно (29) имеем

$$u_1(\xi,\eta) = N(\xi,\eta)\left[\tau(\xi) + \int\limits_{-\xi}^{\eta} N^{-1}(\xi,s)P(\xi,s)\nu_1(s)\,ds\right],$$

$$N(\xi,\eta) = \exp\left\{-\int\limits_{-\xi}^{\eta} a(\xi,t)\,dt\right\}, \quad P(\xi,\eta) = \exp\left\{-\int\limits_{0}^{\xi} b(t,\eta)\,dt\right\},$$

$$u_{21}(\xi,\eta) = N(\xi,\eta)\left[u_1(\xi,\eta_M) + \int\limits_{\eta_M}^{\eta} N^{-1}(\xi,s)P(\xi,s)\nu_1(s)\,ds\right],$$

$$N(\xi,\eta)=\exp\left\{-\int\limits_{\eta_M}^{\eta}a(\xi,t)\,dt\right\},\quad P(\xi,\eta)=\exp\left\{-\int\limits_{0}^{\xi}b(t,\eta)\,dt\right\}.$$

Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока не будет найдена функция $u_{34}^{(\infty)}(\xi,\eta)$. Как и в п. 2.1, мы можем определить функцию $\tilde{\nu}(\xi)$, затем обозначить через $u(\xi,\eta)$ решение задачи A_{∞}^{**} в областях, прилегающих к прямой $\xi=-\eta$, после чего вывести представление $\tau(x)=u(x,0)$ через $\nu(x)=u_y(x,-0)$. На следующем этапе необходимо перейти к решению задачи Θ_1^{∞} согласно схеме из [21]. Аналогичная методика применима и к решению задачи Θ_n^{∞}.

Теперь становится ясным, что даже в рассмотренном случае $h(\xi,\tau)\equiv 0$ решение задачи θ_1^{∞} является очень громоздким и получить его весьма нелегко.

В заключение отметим, что данная работа является продолжением наших исследований, опубликованных в [40].

Авторы считают приятным долгом поблагодарить рецензентов за ценные замечания, которые помогли улучшить качество работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tricomi F. G.* Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2 ordine di tipo misto // Rendiconti Atti dell' Accademia Nazionale dei Lincei. 1923. N 5. P. 133–247.
2. *Tricomi F. G.* Lezioni Sulle Equazioni a Derivate Parziali. Torino, 1954.
3. *Holmgren A. E.* Sur un probleme aux limites pour l'equation $y^m z_{xx}+z_{yy}=0$ // Arc. Mat. Astronom Fys. 1926. Bd 19B, N 14. S. 1–3.
4. *Cibrario (Cinquini) M.* Sulla reduzione a forma conanica dele equazione lineari alee derivate parziali di secondo ordine di tipo misto // Rend. Ist. Lombardo. 1932. V. 65. P. 889–906.
5. *Gellerstedt S.* Quellues probleme mixtes pour l'equation $y^m z_{xx}+z_{yy}=0$ // Arc. Mat. Astronom Fys. 1938. Bd 26A, N 3. S. 1–32.
6. *Франкль Ф. И.* К теории сопел Лаваля // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1945. Т. 9, № 5. С. 387–422.
7. *Франкль Ф. И.* Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973.
8. *Лаврентьев М. А., Бицадзе А. В.* К проблеме уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1950. Т. 79, № 3. С. 373–376.
9. *Bitsadze A. V.* Equations of Mixed Type. Oxford: Pergamon Press, 1964; New York: Macmillan, 1964.
10. *Bitsadze A. V.* Some Classes of Partial Differential Equations. New York: Gordon and Breach, 1958.
11. *Germain P., Bader R.* Sur le probleme de Tricomi // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. 1951. V. 232, N 5. P. 463–465.
12. *Germain P., Bader R.* Maximum theorems and reflection of simple waves. NASA Technical Report. 1955. N 3299.
13. *Бабенко К. И.* К теории уравнений смешанного типа: Дис. д-ра физ.-мат. наук. М., 1952. 191 с.
14. *Бабенко К. И.* О принципе максимума для уравнения Эйлера — Дарбу // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 4. С. 777–782.
15. *Protter M. H.* A Boundary Value Problem for an Equation of Mixed Type // Trans. Amer. Math. Soc. 1951. V. 71. P. 416–429.
16. *Капилевич М. Б.* Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа // Мат. сб. 1952. Т. 30, № 1. С. 11–38.
17. *Кароль И. Л.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88, № 2. С. 197–200.
18. *Agmon S., Nirenberg L., Protter M. H.* A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications of mixed elliptic-hyperbolic type // Comm. Pure App. Math. 1953. V. 6, N 4. P. 455–470.
19. *Morawetz C. S.* Uniqueness theorem for Frankl's problem // Comm. Pure App. Math. 1954. V. 7. P. 697–703.

20. *Morawetz C. S.* Note on a maximum principle and a uniqueness theorem for elliptic-hyperbolic equation // Proc. Roy. Soc. 1956. V. A236. P. 141–144.
21. *Пулькин С. П.* Задача Трикоми для общего уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Докл. АН СССР. 1958. Т. 118, № 1. С. 38–41.
22. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
23. *Линейные* уравнения математической физики / В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. М.: Наука, 1964.
24. *Protter M. H., Weinberger H. F.* Maximum Principles in Differential equations. New Jersey: Prentice-Hall, 1967.
25. *Келдыш М. В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 2. С. 181–183.
26. *Fichera G.* On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of the second order // Boundary Problems in differential equations. Madison: Univ. of Wisconsin Press, 1960. P. 97–120.
27. *Терсенов С. А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск: НГУ, 1973.
28. *Репин О. А.* Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1992.
29. *Лернер М. Е.* О принципе максимума для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа второго рода // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185, № 5. С. 991–994.
30. *Saigo M. I.* On uniqueness and estimations for solutions of modified Frankl' problem for linear and non-linear equations of mixed type // Proc. Japan Acad. 1972. N 1. P. 28–33.
31. *Лернер М. Е.* Принцип максимума для гиперболических уравнений в одно- и многосвязных областях произвольной формы // Неклассические задачи уравнений математической физики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982. С. 109–112.
32. *Лернер М. Е.* Принципы максимума для гиперболических уравнений и систем уравнений в неклассических областях // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 5. С. 848–858.
33. *Лернер М. Е.* О постановке и разрешимости одного класса краевых задач для уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317, № 3. С. 361–365.
34. *Лернер М. Е.* О разрешимости одной краевой задачи для гиперболических уравнений в неклассических областях // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 4. С. 704–716.
35. *Лернер М. Е.* Принципы максимума и методика постановки новых краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типов в конечных одно- и многосвязных областях произвольной формы // Вестн. Самарск. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. 1996. № 4. С. 5–24.
36. *Лернер М. Е., Репин О. А.* Об одной задаче с двумя нелокальными краевыми условиями для уравнения смешанного типа // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 6. С. 1260–1275.
37. *Fleischer N. M.* Boundary value problems for equations of mixed type in the case of unbounded domains // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1965. V. 10, N 5. P. 607–613.
38. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
39. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1963.
40. *Лернер М. Е., Репин О. А.* Краевые задачи для уравнения смешанного типа в областях с двусвязной подобластью гиперболичности // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 10. С. 1361–1364.

Статья поступила 8 апреля 2002 г.

Лернер Моисей Ефимович
Самарский гос. технический университет,
ул. Галактионовская, 14, Самара 443010

Репин Олег Александрович
Самарская гос. экономическая академия
ул. Советской Армии, 141, Самара 443090
Academy@ssea.ru