Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2003. Том 44, № 2

УДК 517.5

ПОКООРДИНАТНО РАВНОМЕРНОЕ СВОЙСТВО КАДЕЦА — КЛИ В НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Тао Занг

Аннотация: Введено новое свойство UKK_c для банахова пространства и показано, что для пространства последовательностей Орлича свойство UKK_c равносильно свойству H_c, а также равносильно свойству $\Phi \in \delta_2$. Доказано, что прямые суммы Орлича $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\right)_{l_\Phi}$ и $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\right)_{l_{(\Phi)}}$ обладают свойством H_c, если каждое X_n ($n \in \mathbb{N}$) обладает свойством H_c и $\Phi \in \delta_2$.

Ключевые слова: пространство последовательностей Орлича, прямая сумма Орлича, свойство UKK_c, свойство H_c

Определение 1. Пусть X — банахово пространство. Будем говорить, что X *обладает покоординатно равномерным свойством Кадеца — Кли* (UKK_c), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $x_n \in B(X)$, $\operatorname{sep}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \inf \|x_n - x_m\| \geq \varepsilon$ ($n \neq m$), $\|x_n\| \to \|x\|$ и $x_n(i) \to x(i)$ влечет $\|x\| \leq 1 - \delta$. Будем говорить, что X *обладает покоординатно равномерным свойством Кадеца — Кли* (H_c), если для любого $x \in X$ и любой последовательности $\{x_n\} \in X$ такой, что $\|x_n\| \to \|x\|$ и $x_n(i) \to x(i)$ для любого $n \in \mathbb{N}$, имеет место сходимость $\|x - x_n\| \to 0$ (см. [1]). Известно, что свойство UKK_c влечет свойство H_c.

Напомним некоторые основные факты о пространствах Орлича.

Определение 2. Пусть

$$\Phi(u) = \int\limits_0^{|u|} \phi(t)\,dt, \quad \Psi(v) = \int\limits_0^{|v|} \psi(s)\,ds$$

— пара дополнительных друг другу $\mathcal{N}$-функций. Пространство Орлича последовательностей l_Φ определяется как

$$l_\Phi = \left\{ x = (x(1), x(2), \dots) : \rho_\Phi(\lambda x) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(\lambda |x(i)|) < \infty \text{ для некоторого } \lambda > 0 \right\}.$$

Нормы Люксембурга и Орлича определяются соответственно так:

$$\|x\|_{(\Phi)} = \inf \left\{ c > 0 : \rho_\Phi\left(\frac{x}{c}\right) \leq 1 \right\},$$

$$\|x\|_\Phi = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |x(i) y(i)| : \rho_\Psi(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi(|y(i)|) \leq 1 \right\} = \inf_{k>0} \frac{1}{k}[1 + \rho_\Phi(kx)].$$

Эти нормы эквивалентны: $\|x\|_{(\Phi)} \le \|x\|_\Phi \le 2\|x\|_{(\Phi)}$. Введем замкнутое сепарабельное подпространство h_Φ в l_Φ:

$$h_\Phi = \left\{ x \in l_\Phi : \rho_\Phi(\lambda x) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(\lambda |x(i)|) < \infty \text{ для любого } \lambda > 0 \right\}.$$

Важным параметром пространства Орлича является скорость роста $\mathscr{N}$-функции. Говорят, что $\mathscr{N}$-функция $\Phi(u)$ *удовлетворяет* δ_2-*условию* для малых u, в обозначениях $\Phi \in \delta_2$, если существуют $u_0 > 0$ и $K > 2$ такие, что $\Phi(2u) \le K\Phi(u)$ для $0 < u \le u_0$. Основные сведения о пространствах Орлича можно найти в [2]. Здесь мы напомним только, что l_Φ сепарабельно тогда и только тогда, когда $\Phi \in \delta_2$; l_Φ рефлексивно, если и только если $\Phi \in \delta_2$ и $\Psi \in \delta_2$.

Пусть $(X_n)_n^\infty$ — последовательность банаховых пространств с нормами соответственно $\|\cdot\|_n$ и Φ — $\mathscr{N}$-функция. Рассмотрим прямые суммы Орлича $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\right)_{l_\Phi}$ и $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\right)_{l_{(\Phi)}}$, определенные соответственно так:

$$\left\{ x = x(i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i,\ (\|x(i)\|)_{i\in\mathbb{N}} \in l_\Phi \right\}, \quad \|x\|_\Phi = \|(\|x(i)\|_{X_i})\|_\Phi$$

и

$$\left\{ x = x(i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i,\ (\|x(i)\|)_{i\in\mathbb{N}} \in l_{(\Phi)} \right\}, \quad \|x\|_{(\Phi)} = \|(\|x(i)\|_{X_i})\|_{(\Phi)}.$$

Лемма 1 (см. [2, с. 23]). *Пусть $u \in l_\Phi$, $v \in l_\Psi$. Тогда*
(i) $\|u\|_{(\Phi)} \le 1 \Rightarrow \rho_\Phi(u) \le \|u\|_{(\Phi)}$;
(ii) $\|u\|_{(\Phi)} > 1 \Rightarrow \rho_\Phi(u) > \|u\|_{(\Phi)}$;
(iii) $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u(i)v(i) \le \|u\|_\Phi \|v\|_{(\Psi)}$ (*неравенство Гёльдера*);
(iv) $\|u\|_{(\Phi)} \le \|u\|_\Phi \le 2\|u\|_{(\Phi)}$ $(u \ne 0)$.

Лемма 2 (см. [2, с. 24]). *Пусть $\Phi \in \delta_2$, $u_n, u \in l_{(\Phi)}$. Тогда*
(i) $\rho_\Phi(u_n) \to \infty \Rightarrow \|u_n\|_{(\Phi)} \to \infty$;
(ii) $\|u\|_{(\Phi)} = 1 \Rightarrow \rho_\Phi(u) = 1$;
(iii) *для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\|u\|_{(\Phi)} \ge \varepsilon \Rightarrow \rho_\Phi(u) \ge \delta$;*
(iv) *для любого $\varepsilon \in (0,1)$ найдется $\delta \in (0,1)$ такое, что $\rho_\Phi(u) \le 1 - \varepsilon \Rightarrow \|u\|_{(\Phi)} \le 1 - \delta$;*
(v) *для любого $\varepsilon \in (0,1)$ найдется $\delta \in (0,1)$ такое, что*

$$\rho_\Phi(u) > 1 + \varepsilon \Rightarrow \|u\|_{(\Phi)} \ge 1 + \delta.$$

Лемма 3 (см. [2]). *Если $\{x_n\}$ из l_Φ ограничена, $k_n \in K(x_n)$ и $k_n \to \infty$, то $x_n \to 0$ по мере, где $K(x_n) = [k^*, k^{**}]$, $k^* = \inf\{k > 0 : \rho_\Psi(p(k|x_n|)) \ge 1\}$, $k^{**} = \sup\{k > 0 : \rho_\Psi(p(k|x_n|)) \ge 1\}$.*

Лемма 4 (см. [3]). *Справедливы следующие равенства:*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\right)^*_{h_{(\Phi)}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n^*\right)_{l_\Psi}, \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\right)^*_{h_\Phi} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n^*\right)_{l_{(\Psi)}}.$$

Теорема 1. *Пусть $X = l_\Phi$ или $l_{(\Phi)}$. Следующие утверждения равносильны:*

(i) *X обладает свойством UKK_c;*

(ii) *X обладает свойством H_c;*

(iii) $\Phi \in \delta_2$.

Доказательство. Ясно, что проверить надо только (iii)$\Rightarrow$(i). Пусть сначала $X = l_{(\Phi)}$. Так как $\Phi \in \delta_2$, согласно лемме 2 для любого $\varepsilon > 0$ существует $\beta > 0$ такое, что

$$\|x\|_{(\Phi)} \geq \frac{\varepsilon}{4} \quad \Rightarrow \quad \rho_\Phi(x) \geq \beta.$$

Для такого $\beta > 0$, вновь используя лемму 2, найдем $\delta \in (0, 1)$ такое, что

$$\|x\|_{(\Phi)} \geq 1 - \delta \quad \Rightarrow \rho_\Phi(x) \geq 1 - \beta.$$

Пусть теперь $x_n \in B(l_{(\Phi)})$, $\|x_n\|_{(\Phi)} \to \|x\|_{(\Phi)}$, $x_n(i) \to x(i)$ и $\|x_n - x_m\|_{(\Phi)} \geq \varepsilon$ $(n \neq m)$. Покажем, что $\|x\|_{(\Phi)} \leq 1 - \delta$, откуда будет следовать справедливость (i). Действительно, если $\|x\|_{(\Phi)} > 1 - \delta$, то можно выбрать конечное подмножество I в $\mathbb{N}$ такое, что $\|x|_I\|_{(\Phi)} > 1 - \delta$. Так как $x_n(i) \to x(i)$, то $x_n \to x$ равномерно на I, ибо I конечно. Следовательно, существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\|x_n|_I\|_{(\Phi)} > 1 - \delta, \quad \|(x_n - x_m)|_I\|_{(\Phi)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $n, m > k$. Из первого неравенства вытекает, что

$$\rho_\Phi(x_n|_I) > 1 - \beta \quad (n > k),$$

в то время как из второго —

$$\|(x_n - x_m)|_{\mathbb{N}/I}\|_{(\Phi)} \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad (m, n > k,\ m \neq n)$$

(поскольку $\|x_n - x_m\|_{(\Phi)} \geq \varepsilon$), откуда $\|x_n|_{\mathbb{N}/I}\|_{(\Phi)} \geq \frac{\varepsilon}{4}$ или $\|x_m|_{\mathbb{N}/I}\|_{(\Phi)} \geq \frac{\varepsilon}{4}$. Допустим, что $\|x_n|_{\mathbb{N}/I}\|_{(\Phi)} \geq \frac{\varepsilon}{4}$. Тогда $\rho_\Phi(x_n|_{\mathbb{N}/I}) \geq \beta$. Последнее невозможно, ибо $\rho_\Phi(x_n|I) + \rho_\Phi(x_n|_{\mathbb{N}/I}) = \rho_\Phi(x_n) \leq 1$.

Теперь докажем (iii)$\Rightarrow$(i) для $X = l_\Phi$. Для заданного $\varepsilon > 0$ ввиду леммы 2 найдется $\beta \in (0, 1)$ такое, что $\|x\|_\Phi \geq \frac{\varepsilon}{8}$ влечет $\rho_\Phi(x) \geq 2\beta$. Мы завершим доказательство, показав, что для данной $x_n \in B(l_\Phi)$, $\|x_n\|_\Phi \to \|x\|_\Phi$, $x_n(i) \to x(i)$, $\|x_n - x_m\|_\Phi \geq \varepsilon$ $(n \neq m)$, выполняется неравенство $\|x\|_\Phi \leq 1 - \beta$. В самом деле, если $x = 0$, то все ясно. Пусть $x \neq 0$. Тогда по лемме 3 $\{k_n\}$, где $k_n \in K(x_n)$, ограничена. Переходя в случае необходимости к подпоследовательности, будем считать, что $k_n \to k$. Далее, возьмем конечное подмножество I в $\mathbb{N}$ такое, что $\|x|_I\|_\Phi \geq \|x\|_\Phi - \beta$. Поскольку $x_n \to x$ равномерно на I, согласно первой части доказательства есть бесконечно много $n \in \mathbb{N}$ таких, что $\|x_n|_{\mathbb{N}/I}\|_\Phi \geq \frac{\varepsilon}{4}$. Отсюда $\|x_n|_{\mathbb{N}/I}\|_\Phi \geq \frac{\varepsilon}{8}$ по лемме 1. Значит, $\rho_\Phi(x_n|_{\mathbb{N}/I}) \geq 2\beta$. Так как из $\|x_n\|_\Phi \leq 1$ следует, что $k_n > 1$ для бесконечного множества номеров $n \in \mathbb{N}$, имеем

$$\begin{aligned} 1 - 2\beta \geq \|x_n\| - \rho_\Phi(x_n|_{\mathbb{N}/I}) &\geq \|x_n\|_\Phi - k_n^{-1}\rho_\Phi(k_n x_n|_{\mathbb{N}/I}) \\ &= k_n^{-1}[1 + \rho_\Phi(k_n x_n|_I)] \to k^{-1}[1 + \rho_\Phi(kx|_I)] \geq \|x|_I\|_\Phi \geq \|x\|_\Phi - \beta. \end{aligned}$$

Теорема 2. (i) *Если банаховы пространства X_n обладают свойством H_c и $\Phi \in \delta_2$ для любого n, то $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\right)_{l_\Phi}$ и $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\right)_{l_{(\Phi)}}$ обладают свойством H_c.*

(ii) *Если $\Phi \in \delta_2$ и в банаховых пространствах X_n покоординатная сходимость является сходимостью по норме для каждого n, то $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\right)_{l_{(\Phi)}}$ и $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\right)_{l_\Phi}$ обладают свойством UKK_c.*

Доказательство. Достаточно показать справедливость (i). Если x_n, $x \in S(X)$, $\|x_n\| \to \|x\|$ и $x_n(i) \to x(i)$, то $\|x_n(i)\|_{X_i} \le \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n(i)\|_{X_i}$. Покажем, что $\limsup\limits_{n\to\infty} \|x_n(i)\|_{X_i} \le \|x(i)\|_{X_i}$. Если это не так, то существуют $i_0 \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $(x_n(i_0))_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что

$$\|x_n(i_0)\| \ge \|x(i_0)\|_{X_i} + \varepsilon.$$

Так как $\|x_n\| = \|x\| = 1$, положим

$$\|x_n\| = \frac{1}{k_n}\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(k_n\|x_n(i)\|)\right),$$

и пусть $k_n \to k_0$. Очевидно, $k_0 \ge 1$ и $k_n < \infty$, значит,

$$\begin{aligned} 1 = \|x_n\| &= \frac{1}{k_n}\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(k_n\|x_n(i)\|)\right) \\ &\ge \frac{1}{k_0}\Big(1 + \sum_{i\ne i_0} \Phi(k_0\|x(i)\|)\Big) + \frac{1}{k_0}\Phi(k_0(\|x(i_0)\| + \varepsilon)) \\ &> \frac{1}{k_0}\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(k_0\|x(i)\|)\right) + \Phi(\varepsilon) \ge \|x\| + \Phi(\varepsilon); \end{aligned}$$

противоречие. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n(i)\|_{X_i} = \|x(i)\|_{X_i}$ $(i \in \mathbb{N})$. Поскольку X_i обладает свойством H_c, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n(i) - x(i)\| = 0$ $(i \in \mathbb{N})$ и $k_0 = 1 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \Phi(k_0\|x(i)\|)$, так что существует натуральное I такое, что

$$\sum_{i=I+1}^{\infty} \Phi(k_0\|x(i)\|) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \sum_{i=1}^{I} \Phi(k_0\|x(i)\|) > k_0 - 1 - \frac{\varepsilon}{4},$$

и существует N такое, что для $n > N$ имеем $|k_n - k_0| < \frac{\varepsilon}{4}$,

$$\sum_{i=1}^{I} \Phi(k_n\|x_n(i)\|) > k_0 - 1 - \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \sum_{i=I+1}^{\infty} \Phi(k_n\|x_n(i)\|) < \frac{2}{4}\varepsilon + |k_n - k_0| < \frac{3}{4}\varepsilon.$$

Пусть $n > N' > N$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{I} \Phi(\|x_n(i) - x(i)\|) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{\|x_n(i) - x(i)\|}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{i=I+1}^{\infty} (\Phi(k_n\|x_n(i)\|) + \Phi(k_0\|x(i)\|)) < \varepsilon,$$

откуда $\|x_n - x\| \to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Foralewski P., Hudzik H.* On some geometrical and topological properties of generalized Calderon — Lozanovskij sequence spaces // Houston J. Math. 1999. V. 25, N 3. P. 523–542.
2. *Chen S. T.* Geometry of Orlicz spaces. Dissertationes Math. 1996. V. 356. P. 1–204.
3. *Cui Y., Hudzik H., Zhang T.* On some geometric properties of certain Köthe sequence spaces // Math. Bohem. 1999. V. 124, N 2–3. P. 303–314.

Статья поступила 4 апреля 2002 г., окончательный вариант — 27 августа 2002 г.

Tao Zhang (Тао Занг)
Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China
abc7212@163.com