Сибирский математический журнал
Июль—август, 2003. Том 44, № 4

УДК 510.5+510.6+512.563

ВЫЧИСЛИМЫЕ СЕМЕЙСТВА СУПЕРАТОМНЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

П. Е. Алаев

Аннотация: Описываются семейства суператомных булевых алгебр, обладающие вычислимой нумерацией. Доказывается критерий, сформулированный с использованием только алгоритмических терминов и понятия мажорируемости. Строятся примеры, показывающие, что условие мажорируемости является существенным. Доказывается также некоторый критерий существования вычислимой нумерации для семейства α-атомных алгебр (α — конструктивный ординал).

Ключевые слова: вычислимость, суператомная булева алгебра, вычислимая модель, вычислимая нумерация

Статья посвящена описанию семейств суператомных булевых алгебр, обладающих вычислимой нумерацией. В [1] было доказано, что одна счетная суператомная булева алгебра обладает вычислимым представлением тогда и только тогда, когда ее ранг является конструктивным (вычислимым) ординалом. Данная работа в некотором смысле расширяет этот результат на случай счетного множества алгебр. Доказывается критерий, сформулированный с использованием только алгоритмических терминов и понятия мажорируемости, введенного автором.

Существование у семейства моделей вычислимой нумерации означает конструктивизируемость этого семейства, т. е. возможность с помощью некоторого алгоритма построить одновременно все элементы семейства (с точностью до изоморфизма). Описание конструктивизируемых объектов — одна из классических задач в теории вычислимых моделей. Известно, что класс всех конструктивизируемых булевых алгебр обладает такой нумерацией. Постановка вопроса о полном алгебраическом описании конструктивизируемых семейств не кажется осмысленной, поскольку пока даже нет естественного описания конструктивизируемых булевых алгебр. Однако для суператомных алгебр такое описание есть и вопрос о семействах может быть поставлен. Многие конструкции в теории булевых алгебр основываются на работе с суператомными алгебрами, и построенное описание может быть использовано в таких ситуациях.

Доказывается также некоторый критерий существования вычислимой нумерации у семейства α-атомных алгебр (α — вычислимый ординал). В конце работы строятся примеры, показывающие, что условие мажорируемости существенно.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00593).

1. Предварительные сведения, связь алгебр A и $A \cdot F_\alpha$

Булевы алгебры рассматриваем как модели языка $L_{BA} = \{0, 1, +, \cdot, C\}$, где $+$ соответствует объединению элементов, $\cdot$ — пересечению, C — операции дополнения. Предварительные сведения о них можно найти в [2]. *Алгеброй* кратко называем счетную булеву алгебру. Если A, B — алгебры, то запись $A \leq B$ соответствует тому, что A — подалгебра в B; если $a_1, \ldots, a_n, b \in A$, то $a_1, \ldots, a_n | b$ означает, что $a_1 + \ldots + a_n = b$ и $a_i \cdot a_j = 0$ при $i \neq j$. Обозначение n, кроме натурального числа, может означать также конечную алгебру с n атомами.

Оператор T — это соответствие, которое каждой алгебре A сопоставляет идеал $T(A) \triangleleft A$, и при этом если A, B — алгебры, $a \in A$, $b \in B$ и $\hat{a} \cong \hat{b}$, то $a \in T(A) \Leftrightarrow b \in T(B)$. В этом случае через A/T обозначаем фактор-алгебру $A/T(A)$. *Идеал Фреше* $F(A)$ определим как $\{a \in A \mid a = 0$ или a — конечная сумма атомов$\}$. *Итерированные идеалы Фреше* $F_\alpha(A)$ определяются индукцией по ординалу α: $F_0(A) = \{0\}$, $F_{\alpha+1}(A) = \{a \in A \mid a/F_\alpha(A) \in F(A/F_\alpha(A))\}$, $F_\alpha(A) = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} F_\beta(A)$ для предельных ординалов α. Нетрудно проверить, что F_α являются операторами.

Алгебра A называется *α-атомной* (α — ординал), если алгебры A/F_β атомные для всех $\beta < \alpha$, и суператомной, если $A/F_\alpha = 0$ для некоторого ординала α. Суператомные алгебры кратко называем *с-алгебрами.*

Известно, что с-алгебра $A \neq 0$ в классе всех с-алгебр с точностью до изоморфизма может быть определена парой (α, n), где α — ординал, $n \in \omega$, $n \geq 1$, $A/F_\alpha \cong n$. Эту пару назовем *типом* A и обозначим через $t(A)$. Соответствующий ординал α — *ранг* A — обозначим через $r(A)$. Считаем, что $t(0) = (0, 0)$. Порядок на типах определяем так: $(\alpha, n) \leq (\beta, m)$, если $\alpha < \beta$ или ($\alpha = \beta$ и $n \leq m$).

Известно, что для любой алгебры $A \neq 0$ и любого счетного ординала α существует такая α-атомная алгебра B, что $B/F_\alpha \cong A$, и эта B единственна с точностью до изоморфизма. Обозначим ее через $A \cdot F_\alpha$. Тем самым $(A \cdot F_\alpha)/F_\alpha \cong A$. Алгебру, порожденную линейным порядком L, обозначаем через B_L.

Предварительные сведения по теории алгоритмов можно найти в [3]. Стандартная универсальная функция, описывающая результат работы машины Тьюринга с номером y и оракулом X на входе z, обозначается через $\varphi_y^X(z)$. Выражение вида «по $y \in M$ мы независимо от оракула X можем вычислить z такое, что ... » для некоторого $M \subseteq \omega$ означает, что существует такое $k \in \omega$, что для любого оракула X и $y \in M$ верно: $\varphi_k(y){\downarrow}= z$ и z — «такое, что ... ».

Для работы с вычислимыми ординалами мы вводим множество обозначений O с порядком $<_o$, следуя [3]. Всюду, где это имеет смысл, под вычислимым ординалом α понимается некоторое обозначение из O, соответствующее α. Более того, если два вычислимых ординала α, β используются вместе и $\alpha < \beta$, то мы считаем, что соответствующие обозначения связаны отношением $<_o$. Это, в частности, означает, что выражение типа $\alpha + 1$ однозначно определено для обозначения α и множество $\{\beta \mid \beta < \alpha\}$ является вычислимо-перечислимым.

Если $X \subseteq \omega$, $\alpha \geq 1$ — вычислимый ординал, то мы можем определить оракул X_1, соответствующий классу $\Delta^0_\alpha(X)$. Он равен $X^{(\alpha)}$ при $\alpha \geq \omega$ и $X^{(\alpha-1)}$ при $\alpha < \omega$. В этом случае f называется *частичной* $\Delta^0_\alpha(X)$*-вычислимой функцией*, если $f = \varphi_k^{X_1}$ для некоторого $k \in \omega$. Любое такое k — $\Delta^0_\alpha(X)$*-индекс функции* f; подобным образом могут быть введены $\Delta^0_\alpha(X)$- и $\Sigma^0_\alpha(X)$-индексы для множеств, а также для других естественных классов. Оракул X_1 в дальнейшем обозначаем через $\Delta^0_\alpha(X)$. Иногда $\Delta^0_\alpha(\varnothing)$-индексы называются просто Δ^0_α-*индексами*.

Вычислимая алгебра, или Δ^0_1-*алгебра*, — алгебра такая, что ее носитель — вычислимое подмножество ω, а операции — вычислимые функции на этом подмножестве. Это понятие также может быть обобщено для произвольного оракула X и вычислимого ординала α. В этом случае $\Delta^0_\alpha(X)$-*индексом* такой *алгебры* называем набор из $\Delta^0_\alpha(X)$-индексов носителя и операций.

Последовательность $\Delta^0_\alpha(X)$-алгебр $\{A_k\}_{k\in\omega}$ *вычислима*, если по $k\in\omega$ можно вычислить $\Delta^0_\alpha(X)$-индекс A_k. Индекс вычислимой функции, которая по $k\in\omega$ выдает $\Delta^0_\alpha(X)$-индекс A_k, называем *индексом последовательности*. Аналогично определяются вычислимые последовательности объектов из других классов.

Лемма 1. *Если A — вычислимая алгебра, $\alpha\geq 1$ — вычислимый ординал, то $F_\alpha(A)\in\Sigma^0_{2\alpha}$ и A/F_α — $\Delta^0_{2\alpha+1}$-вычислимая алгебра. Более того, по $\alpha\in O$ и Δ^0_1-индексу A мы можем вычислить $\Sigma^0_{2\alpha}$-индекс $F_\alpha(A)$ и $\Delta^0_{2\alpha+1}$-индекс алгебры, изоморфной A/F_α.*

Доказательство. То, что $F_\alpha\in\Sigma^0_{2\alpha}$, доказывается несложной вычислимой индукцией по α. Второе утверждение непосредственно следует из первого. Лемма доказана.

Предложение 1. *По вычислимому ординалу $\alpha\in O$, $\alpha\geq 1$, и $\Delta^0_{2\alpha+1}$-индексу алгебры $A\neq 0$ мы можем вычислить Δ^0_1-индекс алгебры $A\cdot F_\alpha$.*

Доказательство. В [4] было показано, что если линейный порядок L $\Delta^0_{2\alpha+1}$-вычислим, то порядок $(\omega^*+\omega)^\alpha\times L$ обладает вычислимым представлением, где ω^* — ω с обратным порядком. Эта конструкция является равномерной по L, но равномерность по α требует анализа ряда сложных конструкций и не была указана автором. Кроме того, доказательство такой равномерности требует работы с отношениями $\leq_\beta$ в порядках вида $(\omega^*+\omega)^\alpha\times L$, что достаточно громоздко и не нужно в случае алгебр. Поэтому мы предлагаем другое доказательство.

Для фиксированного языка Π_β- и Σ_β-*формулы* для ординалов β определим, как в [5]. Через $\Pi_\beta(\mathfrak{M})$ обозначим множество всех Π_β-предложений, истинных в модели $\mathfrak{M}$, через $\mathfrak{M}\leq_\beta\mathfrak{N}$ — то, что $\Pi_\beta(\mathfrak{M})\subseteq\Pi_\beta(\mathfrak{N})$.

Для каждого $\alpha\in O$ определим линейный порядок L_α так: $L_0=\{0\}$, $L_{\alpha+1}=\sum\limits_{k\in\omega}L_\alpha$. Если α предельный, то система обозначений O однозначно определяет такую вычислимую последовательность ординалов $\{\beta_k\}_{k\in\omega}$, что $\beta_k<\beta_{k+1}<\alpha$, $\beta_k\to\alpha$ при $k\to\infty$. В этом случае $L_\alpha=\sum\limits_{k\in\omega}L_{\beta_k}$. Ясно, что $L_\alpha\cong\omega^\alpha$. Построение L_α можно определить так, чтобы по $\alpha\in O$ можно было вычислить Δ^0_1-индекс L_α, пользуясь принципом вычислимой трансфинитной индукции. Более того, одновременно с построением L_α мы можем определять вычислимую функцию, которая по $x,y\in L_\alpha\cup\{+\infty\}$, $x<y$, будет выдавать пару $(\beta,n)=t(\widehat{[x,y[})$, где $\beta\leq\alpha$, $[x,y[$ — элемент алгебры B_{L_α}.

Для каждого $n\in\omega$ зафиксируем некоторый порядок на $\{0,1\}^n$. Если $\bar a=(a_1,\dots,a_n)$ — набор элементов из алгебры B, то положим

$$\bar a^\perp=\left\{a_1^{\varepsilon_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{\varepsilon_n}\right\}_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{0,1\}^n},$$

где $a^1=a$, $a^0=C(a)$. Ясно, что $\bar a^\perp|1$ в B.

Лемма [6]. *Пусть A, B — алгебры, $a_1, \dots, a_n \in A$, $b_1, \dots, b_n \in B$, α — ординал. Тогда*

(1) $(A, \bar{a}) \leq_\alpha (B, \bar{b})$ *равносильно* $(A, \bar{a}^\perp) \leq_\alpha (B, \bar{b}^\perp)$;

(2) *если* $a_1, \dots, a_n|1$, $b_1, \dots, b_n|1$, *то* $(A, \bar{a}) \leq_\alpha (B, \bar{b})$ *равносильно тому, что* $\hat{a}_i \leq_\alpha \hat{b}_i$ *для* $i \in [1, n]$;

(3) $A \leq_{\alpha+1} B$ *тогда и только тогда, когда для любых* $b_1, \dots, b_n|1$ *из* B *существуют* $a_1, \dots, a_n|1$ *из* A *такие, что* $\hat{b}_i \leq_\alpha \hat{a}_i$ *для* $i \in [1, n]$.

Лемма 2. *По* $\alpha \in O$, $\beta \leqq 2\alpha$ *и* $m, k \in \omega$ *мы можем вычислить* Δ_1^0*-индекс отношения* $\left(B^m_{L_\alpha}, \bar{a}\right) \leq_\beta \left(B^k_{L_\alpha}, \bar{b}\right)$ *на наборах* $\bar{a}, \bar{b}$ *одинаковой длины.*

Доказательство. В силу предыдущей леммы $(B_1, \bar{a}) \leq_\beta (B_2, \bar{b})$ равносильно $(B_1, \bar{a}^\perp) \leq_\beta (B_2, \bar{b}^\perp)$. Если $\bar{a}^\perp = (c_1, \dots, c_s)$, $\bar{b}^\perp = (d_1, \dots, d_s)$, то это, в свою очередь, равносильно $\hat{c}_i \leq_\beta \hat{d}_i$ для $i \in [1, s]$. Если $c \in B^m_{L_\alpha}$, $d \in B^k_{L_\alpha}$, то мы можем найти $t(\hat{c})$, $t(\hat{d})$ и эффективно определить истинность $\hat{c} \leq_\beta \hat{d}$ ввиду следующей леммы. Лемма доказана.

Лемма [7]. *Пусть A, B — c-алгебры, $t(A) = (\alpha, m)$, $t(B) = (\beta, n)$, δ — предельный ординал или 0, $k \in \omega$. Тогда*

(0) $A \leq_0 B$ *тогда и только тогда, когда* $A = B = 0$ *или* ($A \neq 0$ *и* $B \neq 0$). *Пусть ниже* $A, B \neq 0$.

(1) $A \leq_{\delta+2k+1} B$ *равносильно выполнению одного из пунктов:*

(a) $\alpha = \beta < \delta + k$ *и* $m = n$;

(b) $\alpha = \beta = \delta + k$ *и* $m \geq n$;

(c) $\alpha \geq \delta + k + 1$ *и* $\beta \geq \delta + k$;

(2) $A \leq_{\delta+2k} B$ *равносильно выполнению одного из пунктов:*

(a) $\alpha = \beta < \delta + k$ *и* $m = n$;

(b) $\alpha, \beta \geq \delta + k$.

Отметим, что в [7] доказательство этой леммы не приведено. Она может быть проверена индукцией по δ и при фиксированном δ — индукцией по k.

Пусть T — оператор, $f : A \to B$ — изоморфное вложение. Назовем f *T-стабильным вложением*, если $f^{-1}(T(B)) = T(A)$, и если $a \in T(A)$, то $f(\hat{a}) = \widehat{f(a)}$. Пусть $\{A_n\}_{n\in\omega}$ — последовательность алгебр, $h_n : A_n \to A_{n+1}$ — T-стабильные вложения для $n \in \omega$, C — прямой предел последовательности $\{A_n, h_n\}_{n\in\omega}$. Тогда определены естественные вложения $g_n : A_n \to C$. Оператор T называется *стабильным*, если для любых таких последовательностей $\{A_n\}_{n\in\omega}$ и $\{h_n\}_{n\in\omega}$ вложения g_n также являются T-стабильными.

Лемма 3. *Для любого ординала* α *оператор* F_α *стабилен.*

Доказательство. Пусть $T = F_\alpha$, $\{A_n\}_{n\in\omega}$ — алгебры, $h_n : A_n \to A_{n+1}$ — T-стабильные вложения, C — прямой предел $\{A_n, h_n\}_{n\in\omega}$, $g_n : A_n \to C$ — естественные вложения. Если $a \in T(A_n)$, то $\hat{a} \cong \widehat{h_n(a)}$ и $h_n(a) \in T(A_{n+1})$. Отсюда следует, что $\hat{a} \cong \widehat{g_n(a)}$ и $g_n(a) \in T(C)$.

Докажем, что если $a \in A_n$, $g_n(a) \in T(C)$, то $a \in T(A_n)$. Рассуждения ведем индукцией по α. При $\alpha = 0$ это верно. Пусть верно для α, докажем для $\alpha + 1$. Если $a \notin F_{\alpha+1}(A_n)$, то для любого $k \in \omega$ найдутся $b_1, \dots, b_k|a$ такие, что $b_i \notin F_\alpha(A_n)$. Тогда, поскольку h_n являются и F_α-стабильными, $g_n(b_1), \dots, g_n(b_k)|g_n(a)$ и $g_n(b_i) \notin F_\alpha(C)$ для $i \in [1, k]$; противоречие.

Если α предельный и $a \in F_\alpha(C)$, то $a \in F_\beta(C)$ для некоторого $\beta < \alpha$. Дальнейшее очевидно. Лемма доказана.

Если β — вычислимый ординал, то вычислимое семейство алгебр $\{B_n\}_{n\in\omega}$ называем *β-дружественным*, если отношение $(B_n, \bar{a}) \leq_\gamma (B_m, \bar{b})$ на $n, m \in \omega$, $\bar{a}$ из B_n, $\bar{b}$ из B_m, $|\bar{a}| = |\bar{b}|$, и $\gamma < \beta$ является вычислимо-перечислимым. *Индексом β-дружественного семейства* называем пару из индекса вычислимой функции, которая по $n \in \omega$ вычисляет индекс B_n, и вычислимо-перечислимого индекса указанного отношения.

Теорема [6]. *Пусть B — бесконечная вычислимая алгебра, T — стабильный оператор, $B/T \cong 1$, $T(B)$ — вычислимое подмножество в B. Пусть также $\beta \geq 1$ — вычислимый ординал, $\hat{a} \leq_\gamma \hat{a}\times B$ для любых $\gamma < \beta$ и $a \in B\setminus T(B)$ и $\{B^n\}_{n\in\omega}$ является β-дружественным семейством. Тогда для любой Δ^0_β-вычислимой алгебры $A \neq 0$ существует вычислимая алгебра C со свойствами:*

(1) *$C/T \cong A$;*

(2) *если $x \in C \setminus T(C)$, то существуют $a \in B \setminus T(B)$, $y \leq x$ и T-стабильное вложение $f : \hat{a} \to \hat{y}$;*

(3) *если $x \in T(C)$, то существуют такие $a_1, \dots, a_n \in T(B)$, что $\hat{x} \cong \hat{a}_1 \times \dots \times \hat{a}_n$.*

Более того, по $\beta \in O$, индексам B, $T(B)$, β-дружественного семейства $\{B^n\}_{n\in\omega}$ и Δ^0_β-индексу A можно вычислить Δ^0_1-индекс C.

Вернемся к доказательству предложения. Пусть α и A — указанные в условии объекты. Положим $\beta = 2\alpha + 1$, $T = F_\alpha$, $B = B_{L_\alpha}$ и применим к ним конструкцию из теоремы, получая вычислимую алгебру C. Все условия теоремы и равномерность построения объектов нетрудно проверить с учетом изложенных выше лемм. Из п. (2) теоремы следует α-атомность C: если $x \in C \setminus F_\alpha(C)$, то для любого $\gamma < \alpha$ найдется $z \leq x$ такой, что $\widehat{z/F_\gamma(C)} \cong 1$. Тем самым $C \cong A\cdot F_\alpha$. Предложение доказано.

2. Основная теорема и серия контрпримеров

Лемма 4. *Пусть $X \subseteq \omega$ — произвольный оракул и $M \subseteq \omega$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *$M \in \Sigma^0_2(X)$;*

(2) *существует вычислимая последовательность $\Sigma^0_1(X)$-множеств $\{R_k\}_{k\in\omega}$ такая, что $\omega = R_0 \supseteq R_1 \supseteq \dots$ и $n \in M \Leftrightarrow R_n \setminus R_{n+1} \neq \varnothing$.*

Более того, по $\Sigma^0_2(X)$-индексу M можно независимо от X вычислить индекс последовательности $\{R_k\}_{k\in\omega}$, и наоборот.

Доказательство. Переход (1) $\Rightarrow$ (2): если $M \in \Sigma^0_2(X)$, то существует такая $\Delta^0_1(X)$-функция $f(n,t)$, что $n \in M \Leftrightarrow (\exists t_0)(\forall t \geq t_0) f(n,t) = 1$ для любого $n \in \omega$. Положим $R_k = \{\langle m, y\rangle \in \omega \mid m \geq k$ или $m < k$ и $(\exists t \geq y) f(m,t) \neq 1\}$. Нетрудно проверить все нужные свойства.

Переход (2) $\Rightarrow$ (1): $n \in M \Leftrightarrow \exists x (x \in R_n \& x \notin R_{n+1})$. Лемма доказана.

Пусть S — некоторое семейство алгебр. Положим $I(S) = \{(\alpha, n) \mid (\alpha, n) = t(A)$ для некоторой c-алгебры $A \in S\}$, $I_\alpha(S) = \{n \in \omega \mid (\alpha, n) \in I(A)\}$ для ординалов α, $I^*(S) = \{\alpha$ — ординал $\mid I_\alpha(S) \neq \varnothing\}$. *Вычислимой Δ^0_β-нумерацией семейства S* (β — вычислимый ординал) называем такую вычислимую последовательность Δ^0_β-алгебр $\{A_n\}_{n\in\omega}$, что S равно $\{A_n \mid n \in \omega\}$ с точностью до изоморфизма. Вычислимые Δ^0_1-нумерации называем просто *вычислимыми нумерациями*.

Предложение 2. *Если семейство суператомных алгебр S обладает вычислимой нумерацией, то $I^*(S) \leq \alpha$ для некоторого вычислимого ординала α.*

Доказательство. Пусть $\{A_n\}_{n\in\omega}$ — вычислимая нумерация S. Можно найти вычислимую последовательность линейных порядков с наименьшими элементами $\{L_n\}_{n\in\omega}$ так, что $B_{L_n} \cong A_n$. Если $L = \sum\limits_{n\in\omega} L_n$ и $B = B_L$, то B вычислима и суператомна и $I^*(S) \leq r(B)$. Согласно [1] $r(B)$ является вычислимым ординалом. Предложение доказано.

Пусть S — семейство суператомных алгебр, $\alpha = \sup I^*(S)$ — вычислимый ординал. Говорим, что S — *мажорируемое семейство*, если по паре (β, n), где $\beta \leq \alpha$, $n \geq 1$ и существует $B \in S$ с $t(B) \geq (\beta, n)$, мы можем вычислить Δ^0_1-индекс некоторой $B \in S$ с $t(B) \geq (\beta, n)$.

Теорема 1. *Пусть S — счетное семейство суператомных алгебр, и пусть $\alpha = \sup I^*(S)$ — вычислимый ординал. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *S обладает вычислимой нумерацией;*

(2) *$I_\beta(S) \in \Sigma^0_{2\beta+2}$ равномерно по $\beta \leq \alpha$ и S мажорируемо.*

Доказательство. Переход (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\{B_x\}_{x\in\omega}$ — вычислимая нумерация S. Тогда $n \in I_\beta(S) \Leftrightarrow \exists x \in \omega \exists a_1, \dots a_n \in B_x[(a_1, \dots, a_n|1$ в $B_x)$, $a_1, \dots, a_n \notin F_\beta(B_x)$ и $(\forall i \leq n)(\forall b \leq a_i)(b \in F_\beta(B_x)$ или $a_i \cdot C(b) \in F_\beta(B_x))]$. Как замечено выше, $F_\beta(B_x) \in \Sigma^0_{2\beta}$, отсюда $I_\beta(S) \in \Sigma^0_{2\beta+2}$.

Докажем мажорируемость S. Пусть (β, n), $\beta \leq \alpha$, $n \geq 1$, — пара такая, что в S есть алгебра с бóльшим типом. Последовательность $\{B_x/F_\beta\}_{x\in\omega}$ можно рассматривать как вычислимую последовательность суператомных $\Delta^0_{2\beta+1}$-алгебр, поэтому, используя оракул $\Delta^0_{2\beta+1}$, мы можем найти такой x, что B_x/F_β содержит по крайней мере n атомов. Тем самым, используя оракул $\Delta^0_{2\beta+1}$, мы нашли $\Delta^0_{2\beta+1}$-индекс такой алгебры C, что $C \cdot F_\beta \in S$, $t(C) \geq (0, n)$. Отсюда следует, что мы можем с помощью вычислимой процедуры найти $\Delta^0_{2\beta+1}$-индекс такой C и, с помощью предложения 1 переходя к Δ^0_1-индексу $B = C \cdot F_\beta$, получим искомую алгебру $B \in S$, $t(B) \geq (\beta, n)$.

Переход (2) $\Rightarrow$ (1). Можно считать, что S не содержит нулевой алгебры. Зафиксируем $\beta \leq \alpha$, тогда $I_\beta(S) \in \Sigma^0_{2\beta+2}$. Рассмотрим сначала случай, когда $\beta < \alpha$. Из мажорируемости следует, что по $k \geq 1$ мы можем вычислить Δ^0_1-индекс алгебры A^*_k, $t(A^*_k) \geq (\beta, k)$, и перейти затем к $\Delta^0_{2\beta+1}$-индексу $A_k = A^*_k/F_\beta$. Пусть $\omega = R_0 \supseteq R_1 \supseteq \dots$ — вычислимая последовательность $\Sigma^0_{2\beta+1}$-множеств такая, что $n \in I_\beta(S) \Leftrightarrow R_{n-1} \setminus R_n \neq \varnothing$ для $n \geq 1$. Для каждой пары $\langle x, k\rangle \in \omega$, $k \geq 1$, построим $\Delta^0_{2\beta+1}$-алгебру $B_{\langle x,k\rangle}$ так:

(a) если $x \in R_k$, то $B_{\langle x,k\rangle} \cong A_k$;

(b) если $x \in R_{n-1} \setminus R_n$, $0 < n \leq k$, то $B_{\langle x,k\rangle} \cong n$.

Работая с оракулом $\Delta^0_{2\beta+1}$, строим алгебру по шагам и одновременно перечисляем R_i: начинаем с одноатомной алгебры; если на некотором шаге обнаруживаем, что $x \in R_1$, то расширяем ее до двухатомной, и т. д. Если $x \in R_k$, то расширяем построенное до A_k. В результате получим алгебру с $\Delta^0_{2\beta+1}$-вычислимо-перечислимым множеством элементов, от которой нетрудно перейти к $\Delta^0_{2\beta+1}$-алгебре $B_{\langle x,k\rangle}$.

Переходя теперь к $B_{\langle x,k\rangle} \cdot F_\beta$, получим вычислимую нумерацию некоторого подсемейства $S_\beta \subseteq S$, причем если $n \in I_\beta(S)$, то в S_β найдется алгебра с типом (β, n).

Если $I_\alpha(S)$ конечно, то, объединяя нумерации всех S_β, $\beta < \alpha$, и добавляя конечное число алгебр, получим нумерацию S. Если же $I_\alpha(S)$ бесконечно, то изложенное выше построение нужно провести и для $\beta = \alpha$. Теорема доказана.

Для семейства алгебр S через S/F_α обозначим $\{A/F_\alpha \mid A \in S\}$.

Следствие 1. *Если α — вычислимый ординал, S — счетное семейство α-атомных алгебр, $S/F_\alpha \neq \{0\}$, то S обладает вычислимой нумерацией тогда и только тогда, когда*

(1) *S/F_α обладает вычислимой $\Delta^0_{2\alpha+1}$-нумерацией;*

(2) *$I_\beta(S) \in \Sigma^0_{2\beta+2}$ равномерно по $\beta < \alpha$.*

Доказательство. Необходимость. Если $\{B_x\}_{x\in\omega}$ — вычислимая нумерация S, то $\{B_x/F_\alpha\}_{x\in\omega}$ — вычислимая $\Delta^0_{2\alpha+1}$-нумерация S/F_α и $I_\beta(S) \in \Sigma^0_{2\beta+2}$ в силу изложенных ранее соображений.

Достаточность. Пусть некоторая $A \in S$, $A/F_\alpha \neq 0$, тогда A вычислима. Повторяя доказательство перехода (2) $\Rightarrow$ (1) из теоремы 1 для всех $\beta < \alpha$ и считая при этом, что в условии мажорируемости каждой паре (β, n) сопоставляется индекс A (т. е. $A^*_k = A$), получим вычислимую нумерацию подсемейства $S_0 \subseteq S$, состоящего из $\{B \in S \mid B$ — с-алгебра, $r(B) < \alpha\}$ и, может быть, A.

Если $\{B_x\}_{x\in\omega}$ — вычислимая $\Delta^0_{2\alpha+1}$-нумерация для S/F_α, то $M = \{x \in \omega \mid B_x \neq 0\} \in \Sigma^0_{2\alpha+1}$, и существует $\Delta^0_{2\alpha+1}$-вычислимая $f : \omega \to M$, $\mathrm{ran}(f) = M$. Тогда $\{B_{f(x)}\}_{x\in\omega}$ можно считать вычислимой $\Delta^0_{2\alpha+1}$-нумерацией $S/F_\alpha \setminus \{0\}$ и, переходя к $\{B_{f(x)} \cdot F_\alpha\}_{x\in\omega}$, получить вычислимую нумерацию, покрывающую $S \setminus S_0$. Следствие доказано.

Свойство мажорируемости для семейства с-алгебр S является достаточно сложным. Если $\alpha = \sup I^*(S) \in I^*(S)$, т. е. $I_\alpha(S) \neq \varnothing$, то оно в силу этого следствия сводится к существованию у S/F_α вычислимой $\Delta^0_{2\alpha+1}$-нумерации, где S/F_α — семейство конечных алгебр. Последнее может быть определено только в алгоритмических терминах. Пусть X — оракул, $M \subseteq \omega$. Назовем M *X-мажорируемым множеством*, если существует X-вычислимая функция $f(k,i)$ со свойствами:

(1) $f(k,0) = k$, $f(k,i) \leq f(k,i+1)$ для $k, i \in \omega$;

(2) существует $\lim\limits_{i\to\infty} f(k,i) \in M$.

Очевидно, что X-мажорируемое множество бесконечно. Сходное понятие ранее рассматривалось в [8].

Следствие 2. *Если S — семейство конечных алгебр, X — произвольный оракул, то S обладает вычислимой X-нумерацией тогда и только тогда, когда $I_0(S)$ лежит в классе $\Sigma^0_2(X)$ и является конечным или X-мажорируемым.*

Доказательство. Пусть $I_0(S)$ бесконечно (в конечном случае все очевидно). Доказываем для $X = \varnothing$. Из теоремы 1 получаем: S обладает вычислимой нумерацией тогда и только тогда, когда $I_0(S) \in \Sigma^0_2$ и существует вычислимая функция h, которая по $k \in \omega$ дает Δ^0_1-индекс алгебры $B^k \in S$, содержащей по крайней мере k атомов.

Если S обладает такой нумерацией, то положим $f(k,i)$ равной максимуму из k и числа атомов в B^k_i, где $\{B^k_i\}_{i\in\omega}$ — вычислимая последовательность конечных алгебр, $B^k_i \leq B^k_{i+1}$ для $i \in \omega$, $B^k = \bigcup\limits_{i\in\omega} B^k_i$. Получаем $\varnothing$-мажорируемость $I_0(S)$.

Обратно, если $f(k,i)$ — функция из определения $\varnothing$-мажорируемости для $I_0(S)$, то мы можем в качестве $h(k)$ взять индекс $B^k = \bigcup\limits_{i\in\omega} B^k_i$, где B^k_i — конечная алгебра с $f(k,i)$ атомами. Следствие доказано.

В [8] приведена конструкция, дающая пример бесконечного Σ^0_2- (даже Δ^0_2)-множества, которое не является $\varnothing$-мажорируемым. Этот пример может быть релятивизован. Это показывает, что в теореме 1 условие мажорируемости является существенным в случае $\sup I^*(S) \in I^*(S)$.

Покажем, что при $\alpha = \sup I^*(S) \notin I^*(S)$ свойство мажорируемости S также нельзя опустить. Случай $\alpha \notin I^*(S)$ возможен только для предельного ординала. Пусть α — вычислимый предельный ординал, $\{I_\beta\}_{\beta<\alpha}$ — семейство множеств такое, что $\Sigma^0_{2\beta+2}$-индекс I_β вычисляется по $\beta < \alpha$. По аналогии с прошлым определением назовем это семейство *мажорируемым*, если по $\beta < \alpha$, $n \in \omega$ можно вычислить Δ^0_1-индекс такой c-алгебры B, что $t(B) \geq (\beta, n)$, $t(B) \in \bigcup\limits_{\gamma<\alpha} \{\gamma\} \times I_\gamma$.

Предложение 3. *Для любого вычислимого предельного ординала α существует такое семейство множеств $\{I_\beta\}_{\beta<\alpha}$, что $I_\beta \in \Sigma^0_{2\beta+2}$ равномерно по $\beta < \alpha$, $0 \notin I_\beta$ и*

(1) $(\forall \beta < \alpha)(\exists \gamma \geq \beta) I_\gamma \neq \varnothing$;

(2) $\{I_\beta\}_{\beta<\alpha}$ не мажорируемо.

Доказательство. Воспользуемся несложной диагонализацией. Пусть $\{\beta_n\}_{n\in\omega}$ — вычислимая последовательность ординалов такая, что $0 < \beta_0 < \beta_1 < \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \alpha$. Положим $I_\gamma = \varnothing$ при $\gamma \notin \{\beta_0, \beta_1, \ldots\}$. Пусть фиксировано $n \in \omega$, определим I_{β_n}. Используя оракул $\Delta^0_{2\beta_n+1}$, мы можем определить: верно ли, что $\varphi_i(\beta_i, 1)\downarrow$ и $\varphi_i(\beta_i, 1)$ — индекс некоторой вычислимой алгебры. Будем для простоты считать, что $\varphi_i(\beta_i, 1)$ таковы для всех $i \leq n$, и пусть B_i — вычислимая алгебра с индексом $\varphi_i(\beta_i, 1)$, $B'_i = B_i/F_{\beta_n}$. Тогда $B'_i = \bigcup\limits_{t\in\omega} B'_{i,t}$, где $B'_{i,t}$ — конечные алгебры, $B'_{i,t} \leq B'_{i,t+1}$ и $m_{i,t}$ — число атомов в $B'_{i,t}$ — вычисляется по $t \in \omega$, $i \in [0, n]$ с оракулом $\Delta^0_{2\beta_n+1}$. Положим $I^t_{\beta_n} = \{1, \ldots, n+2\} \setminus \{m_{0,t}, \ldots, m_{n,t}\}$. Ясно, что $I^t_{\beta_n}$ стабилизируется при $t \to \infty$, пусть $I_{\beta_n} = \lim\limits_{t\to\infty} I^t_{\beta_n}$. Тогда $I_{\beta_n} \in \Delta^0_{2\beta_n+2}$ и $I_{\beta_n} \neq \varnothing$.

Допустим, что семейство $\{I_\beta\}_{\beta<\alpha}$ мажорируемо, $\varphi_i(\beta, n)$ — функция, по $\beta < \alpha$ и $n \in \omega$ вычисляющая индекс B с указанными в определении свойствами. Пусть B_0 — алгебра с индексом $\varphi_i(\beta_i, 1)$, $t(B_0) = (\gamma, k)$, тогда $\gamma = \beta_n$ для некоторого $n \geq i$ и $k \in I_{\beta_n}$. По построению I_{β_n} имеем $m_{i,t} \to k$ при $t \to \infty$ и $k \notin I_{\beta_n}$; противоречие. Предложение доказано.

В данной работе вычислимость некоторого семейства алгебр S означает существование вычислимой нумерации, в которой представлены все элементы S с точностью до изоморфизма. Из этого следует естественное свойство: если B — вычислимая алгебра, то семейство $S = \{B\}$ также вычислимо. Можно было бы рассмотреть другое определение вычислимого семейства, потребовав, чтобы в вычислимой нумерации были представлены все конструктивизации всех элементов S с точностью до вычислимого изоморфизма или просто до равенства. Такой подход, однако, вряд ли является естественным. Известно, что класс всех конструктивизаций вычислимой алгебры с бесконечным числом атомов эффективно-бесконечен. Это означает, что если B — такая алгебра, $\{B_x\}_{x\in\omega}$ — вычислимая последовательность алгебр и $B_x \cong B$ для $x \in \omega$, то найдется вычислимая $B' \cong B$, которая не будет вычислимо-изоморфна никакой B_x. Следовательно, семейство $\{B\}$ не будет вычислимым.

Автор благодарит чл.-корр. РАН С. С. Гончарова за предложенное им более простое доказательство предложения 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаров С. С.* Конструктивизируемость суператомных булевых алгебр // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 1. С. 31–40.

2. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.

3. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

4. *Ash C. J.* A construction for recursive linear orderings // J. Symbolic Logic. 1991. V. 56, N 2. P. 673–683.

5. *Ash C. J.* Recursive labelling systems and stability of recursive structures in hyperarithmetical degrees // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. V. 298, N 2. P. 497–514.

6. *Алаев П. Е.* Вычислимые однородные булевы алгебры и одна метатеорема // Алгебра и логика (в печати).

7. *Ash C. J.* Categoricity in hyperarithmetical degrees // Ann. Pure Appl. Logic. 1987. V. 34, N 1. P. 1–14.

8. *Хисамиев Н. Г.* Критерий конструктивизируемости прямой суммы циклических p-групп // Изв. АН Каз. ССР. Сер. физ.-мат. 1981. Т. 98, № 1. С. 51–55.

Статья поступила 15 июля 2002 г.

Алаев Павел Евгеньевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`alaev@math.nsc.ru`