Сибирский математический журнал
Июль—август, 2003. Том 44, № 4

УДК 517.946

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Э. Н. Сатторов, Дж. А. Марданов

Аннотация: Рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений Максвелла в пространственной ограниченной области по ее значениям на части границы этой области, т. е. задача Коши. Строится приближенное решение этой задачи, основанное на методе матрицы Карлемана.

Ключевые слова: уравнение Максвелла, задача Коши, некорректные задачи, регулярное решение, приближенное решение, матрица Карлемана

§ 1. Введение

В статье рассматриваются вопросы регуляризации задачи Коши для одной из систем дифференциальных уравнений теории электродинамики в пространстве, а именно уравнений Максвелла в однородной среде. Система уравнений Максвелла эллиптическая, а как известно, задача Коши для эллиптических уравнений некорректна: решение задачи единственно, но неустойчиво (пример Адамара). Для того чтобы постановка задачи была корректной, необходимо сузить класс рассматриваемых решений.

На протяжении последних десятилетий не ослабевал интерес к классической некорректной задаче математической физики. Это направление в исследовании свойств решений задачи Коши для уравнений Лапласа стало изучаться в 1950-х гг. в работах М. М. Лаврентьева, С. Н. Мергеляна и развивалось впоследствии В. Г. Мазьей и В. П. Хавиным, Ш. Ярмухамедовым и др. [1–7].

1. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ — точки евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ и D — область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей ∂D, S — открытая часть $\Sigma = \partial D/S$.

Рассмотрим в области D систему уравнений Максвелла в векторной форме

$$\operatorname{rot} E = i\omega\mu H; \quad \operatorname{rot} H = -i\omega\varepsilon E, \tag{1}$$

где $i = \sqrt{-1}$, ε и μ — электромагнитные постоянные (диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость); $E = (E_1, E_2, E_3)$, $H = (H_1, H_2, H_3)$ — электрический и магнитный векторы, ω — частота электромагнитного колебания.

Постановка задачи. *Известны данные Коши решения системы на поверхности S:*

$$[\nu(y), E(y)] = f(y), \quad [\nu(y), H(y)] = g(y), \quad y \in S, \tag{2}$$

где $f = (f_1, f_2, f_3)$, $g = (g_1, g_2, g_3)$ — заданные непрерывные вектор-функции. Требуется определить функции $E(y)$, $H(y)$ в D, исходя из заданных $f(y)$ и $g(y)$, *т. е. решить задачу аналитического продолжения решения системы уравнений в пространственной области по ее значениям $f(y)$ и $g(y)$ на гладком куске S границы.*

Единственность решения задачи (1), (2) следует из общей теоремы Хольмгрена [8]. После установления единственности в теоретических исследованиях некорректных задач возникают важные вопросы получения оценки условной устойчивости и построения регуляризирующих операторов.

Пусть вместо $f(y)$ и $g(y)$ заданы их приближения $f_\delta(y)$ и $g_\delta(y)$ с точностью δ, $\delta \in (0,1)$, в метрике $\mathbf{C}$, которые могут не принадлежать классу существования решений. В работе строится семейство функций $E(x, f_\delta) = E^{\sigma\delta}(x)$, $H(x, g_\delta) = H^{\sigma\delta}(x)$, зависящее от параметра σ, и доказывается, что при некоторых условиях и специальном выборе параметра $\sigma(\delta)$ при $\delta \to 0$ семейство $E^{\sigma\delta}(x)$, $H^{\sigma\delta}(x)$ сходится в обычном смысле к решению $E(x)$, $H(x)$ задачи (1), (2).

Следуя А. Н. Тихонову, $E^{\sigma\delta}(x)$, $H^{\sigma\delta}(x)$ назовем *регуляризованным решением задачи*. Регуляризованное решение определяет устойчивый метод приближенного решения задачи [9].

Существенно используя результаты работ [1, 6] по задаче Коши для уравнений Гельмгольца, нам удалось построить матрицу Карлемана в явном виде и на ее основе регуляризованное решение задачи Коши для системы уравнений (1). Функция Карлемана для уравнения Гельмгольца построена в работе [6]. Поскольку здесь идет речь о явных формулах, построение матрицы Карлемана в элементарных и специальных функциях представляет значительный интерес.

Ранее в работах [10, 11] было доказано, что для всякой задачи Коши матрица Карлемана для решений эллиптических систем существует, если данные Коши задаются на открытом граничном множестве положительной меры.

§ 2. Построение матрицы фундаментальных решений специального вида

Определение 1. *Матрицей фундаментальных решений системы* (1) называется симметричная матрица $E(y,x)$ для вектора $E(x)$:

$$E(y,x) = \|E_{i,j}(y,x)\|_{3\times 3},$$

где

$$\begin{gathered} r = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}, \quad E_{ij} = \frac{\partial^2 V(y,x)}{\partial x_i \partial x_j} + \delta_{ij} k^2 V(y,x), \\ V(y,x)) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}, \quad k = w\sqrt{\varepsilon\mu}, \end{gathered} \tag{3}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, и антисимметричная матрица $H(y,x)$ для вектора $H(x)$:

$$H(y,x) = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial V(y,x)}{\partial x_3} & -\frac{\partial V(y,x)}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial V(y,x)}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial V(y,x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V(y,x)}{\partial x_2} & -\frac{\partial V(y,x)}{\partial x_1} & 0 \end{vmatrix}.$$

Развивая идею М. М. Лаврентьева, который ввел понятие функции Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа [1], дадим следующее

Определение 2. *Матрицей Карлемана задачи* (1), (2) называется (3×3)-матрица $M(y,x,\sigma)$, $N(y,x,\sigma)$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) $M(y,x,\sigma) = E(y,x) + G(y,x,\sigma)$, $N(y,x,\sigma) = H(y,x) + G(y,x,\sigma)$, где σ — положительный числовой параметр, матрица $G(y,x,\sigma)$ по переменной y удовлетворяет системе (1) всюду в области D;

2) $\int\limits_{\Sigma} |M(y,x,\sigma)|\, d_yS \le \varepsilon_1(\sigma)$, $\int\limits_{\Sigma} |N(y,x,\sigma)|\, d_yS \le \varepsilon_2(\sigma)$, где $\varepsilon_1(\sigma)$, $\varepsilon_2(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to \infty$ равномерно по x на компактных подмножествах D; здесь и далее $|M(y,x,\sigma)|$, $|N(y,x,\sigma)|$ — евклидовы нормы матриц $M = \|M_{ij}\|$, $N = \|N_{ij}\|$, т. е.

$$|M| = \left(\sum_{i,j=1}^{3} M_{ij}\right)^{1/2}, \quad |N| = \left(\sum_{i,j=1}^{3} N_{ij}\right)^{1/2},$$

в частности,

$$|E| = \left(\sum_{i=1}^{3} E_i^2\right)^{1/2}, \quad |H| = \left(\sum_{i=1}^{3} H_i^2\right)^{1/2}$$

для векторов $E = (E_1, E_2, E_3)$, $H = (H_1, H_2, H_3)$.

Определение 3. Вектор-функции $E = (E_1, E_2, E_3)$, $H = (H_1, H_2, H_3)$ называются *регулярными в* D, если они непрерывны на $\overline{D} = D \cup \partial D$ и имеют непрерывные частные производные первого порядка в D.

В теории уравнений в частных производных важную роль играют представления решений этих уравнений в виде функции типа потенциала. Из этих представлений приведем здесь формулу Стрэттона — Чу [12].

Теорема 1. *Всякое регулярное решение $E(y)$, $H(y)$ системы уравнений* (1) *в области D определяется формулой*

$$E(x) = -\operatorname{rot} \int\limits_{\partial D} [\nu(y), E(y)] E(y,x)\, d_yS + \frac{1}{ik} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \int\limits_{\partial D} [\nu(y), H(y)] E(y,x)\, d_yS, \quad x \in D,$$

$$H(x) = -\operatorname{rot} \int\limits_{\partial D} [\nu(y), H(y)] H(y,x)\, d_yS - \frac{1}{ik} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \int\limits_{\partial D} [\nu(y), E(y)] H(y,x)\, d_yS, \quad x \in D.$$

Поскольку матрица Карлемана отличается от фундаментальных решений на решение транспонированной системы, то формула Стрэттона — Чу остается справедливой, если в ней заменить фундаментальное решение матрицей Карлемана. Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Всякое регулярное решение $E(y)$, $H(y)$ системы уравнений* (1) *в области D определяется формулой*

$$E(x) = -\operatorname{rot} \int\limits_{\partial D} [\nu(y), E(y)] M(y,x)\, d_yS + \frac{1}{ik} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \int\limits_{\partial D} [\nu(y)], H(y)] M(y,x)\, d_yS, \quad x \in D,$$

$$H(x) = -\operatorname{rot}\int\limits_{\partial D}[\nu(y), N(y)]H(y,x)\,d_yS \\ - \frac{1}{ik}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int\limits_{\partial D}[\nu(y), E(y)]H(y,x)\,d_yS, \quad x \in D,$$

где $M(y,x)$, $N(y,x)$ — матрицы Карлемана.

Используя матрицы Карлемана, легко вывести оценку устойчивости решения задачи Коши (1), (2) (многомерный аналог теоремы о двух константах), а также указать метод эффективного решения этой задачи [2].

Пусть $K(w)$, $w = u + iv$ (u, v вещественные), — целая функция, принимающая на вещественной оси вещественные значения и удовлетворяющая условиям

$$K(u) \neq 0, \quad \sup_{v\geq 1}|v^p K^p(w)| = M(p,u) < \infty, \quad p = 0,1,2, \ -\infty < u < \infty.$$

Положим $S = \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$. Функцию $\Phi(y,x)$ при $\alpha > 0$ определим следующим равенством:

$$-4\pi K(x_3)\Phi(y,x) = \int\limits_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{K(i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3)}{i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3-x_3}\right]\frac{\operatorname{ch}(ku)}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\,du. \tag{4}$$

В [13] при $m = 2n+1$, $n \geq 1$ и $m = 2n$, $n \geq 2$ приведена функция $\Phi(y,x)$.

В [6] доказана следующая

Лемма 1. *Функция $\Phi(y,x)$, определенная формулой (4), представима в виде*

$$\Phi(y,x) = \frac{1}{4\pi}e^{ikr} + V(y,x),$$

где $V(y,x)$ — некоторая функция, определенная для всех значений y, x и удовлетворяющая уравнению Гельмгольца

$$\Delta\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)V + kV = 0, \quad y \in D.$$

С помощью функции $\Phi(y,x)$ построим матрицы

$$M(y,x) = \|M_{ij}(y,x)\|_{3\times3} = \left\|\frac{\partial^2\Phi(y,x)}{\partial x_1\partial x_j} + \delta_{ij}k^2\Phi(y,x)\right\|_{3\times3},$$
$$N(y,x) = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{\partial\Phi(y,x)}{\partial x_3} & -\frac{\Phi(y,x)}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial\Phi(y,x)}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial\Phi(y,x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\Phi(y,x)}{\partial x_2} & -\frac{\partial\Phi(y,x)}{\partial x_1} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Тогда на основе леммы 1 нетрудно доказать, что матрицы $M(y,x)$, $N(y,x)$, определенные по формуле (5), представимы в виде

$$M(y,x) = E(y,x) + G(y,x), \quad N(y,x) = H(y,x) + \Gamma(y,x), \tag{6}$$

где $G(y,x) = |G_{ij}(y,x)|_{3\times3}$, $\Gamma(y,x) = |\Gamma_{ij}|_{3\times3}$ — матрицы, определенные для всех значений y, x и по переменной y удовлетворяющие системе (1).

Теперь приведем основные результаты для данной задачи для конкретных областей.

§ 3. Решение задачи (1), (2) для специальных классов областей

1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная односвязная область, граница которой состоит из куска Σ гиперплоскости $y_3 = 0$ и гладкой поверхности S, лежащей в полупространстве $y_3 > 0$. Рассмотрим в области D задачу (1), (2), т. е. задачу Коши. Для нахождения приближенного решения задачи (1), (2) построим матрицу Карлемана в явном виде.

При $\sigma > 0$ в формуле (4) положим

$$K(w) = \exp \sigma w, \quad w = y_3 + iv, \quad v = \sqrt{u^2 + \alpha^2},$$
$$K(x_3) = \exp \sigma x_3, \quad x_3 > 0, \quad \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2.$$

Выделяя мнимую часть подынтегрального выражения в (3), получим

$$4\pi\Phi_\sigma(y,x) = \varphi_\sigma(y,x)\exp(\sigma y_3 - \sigma x_3),$$
$$\varphi_\sigma(y,x) = \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(ku)}{u^2 + r^2}\left(-\cos\sigma\sqrt{u^2+\alpha^2} + \frac{y_3 - x_3}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\sin\sigma\sqrt{u^2+\alpha^2}\right) du. \tag{7}$$

Из формулы (7) видно, что на Σ $(y_3 = 0)$ функция $\Phi_\sigma(y,x)$, ее градиент $\nabla\Phi_\sigma(y,x)$ и вторые частные производные $\frac{\partial^2\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_i \partial y_j}$ $(i,j = 1,2,3)$ при фиксированном $x \in D$ и $\sigma \to \infty$ экспоненциально стремятся к нулю. Тогда из (4)–(7) получим, что матрицы $M_\sigma(y,x)$, $N_\sigma(y,x)$ при $\sigma \to \infty$ также стремятся к нулю на $y \in \Sigma$. В силу определения 2 и формулы (6) матрицы $M_\sigma(y,x)$, $N_\sigma(y,x)$ являются матрицами Карлемана для области D и части Σ.

При $\sigma \geq 1$

$$\int\limits_\Sigma \left\{|\Phi_\sigma(y,x)| + \left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}\right|\right\} d_yS \leq C(x)\sigma\exp(-\sigma x_3), \quad x \in D, \tag{8}$$

где $C(x)$ — постоянная, зависящая от x.

В (5) положим $\Phi(y,x) = \Phi_\sigma(y,x)$, т. е.

$$M(y,x,\sigma) = \|M_{ij}(y,x,\sigma)\|_{3\times3} = \left\|\frac{\partial^2\Phi_\sigma(y,x)}{\partial x_i \partial x_j} + \delta_{ij}k^2\Phi_\sigma(y,x)\right\|_{3\times3},$$
$$N(y,x,\sigma) = \left\|\begin{matrix} 0 & \frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial x_3} & -\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial x_2} & -\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial x_1} & 0 \end{matrix}\right\|. \tag{9}$$

Обозначим

$$E^\sigma(x) = -\operatorname{rot}\int\limits_\Sigma [\nu(y), E(y)]M(y,x,\sigma)\,d_yS + \frac{1}{ik}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int\limits_\Sigma [\nu(y), H(y)]M(y,x,\sigma)\,d_yS, \quad x \in D, \tag{10}$$

$$H^\sigma(x) = -\operatorname{rot}\int\limits_\Sigma [\nu(y), H(y)]N(y,x,\sigma)\,d_yS - \frac{1}{ik}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int\limits_\Sigma [\nu(y), E(y)]N(y,x,\sigma)\,d_yS, \quad x \in D.$$

Теорема 3. *Пусть $E(y)$, $H(y)$ — регулярное решение уравнения* (1) *в области D, на части Σ удовлетворящее условию*

$$|E(y)| \leq 1, \quad |H(y)| \leq 1, \ y \in \Sigma. \tag{11}$$

Тогда при $\sigma \geq 1$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |E(x) - E^\sigma(x)| &\leq C_1(\omega, \mu, x)\sigma^3 \exp(-\sigma x_3), \quad x \in D, \\ |H(x) - H^\sigma(x)| &\leq C_2(\omega, \varepsilon, x)\sigma^3 \exp(-\sigma x_3), \quad x \in D, \end{aligned} \tag{12}$$

где $C_1(\omega, \mu, x)$, $C_2(\omega, \varepsilon, x)$ — постоянная, зависящая от ω, μ, ε, x и размерности пространства.

Доказательство. Используя формулы (7), (9) и оценки (8), нетрудно получить неравенства

$$\begin{aligned} \int\limits_\Sigma M(y, x, \sigma)\, d_y S &\leq C_1(\omega, \mu, x)\sigma^3 \exp(-\sigma x_3), \quad x \in D, \\ \int\limits_\Sigma N(y, x, \sigma)\, d_y S &\leq C_2(\omega, \mu, \sigma)\sigma^3 \exp(-\sigma x_3), \quad x \in D. \end{aligned} \tag{13}$$

Из теоремы 2 для регулярного решения в области D системы (1) вытекает справедливость интегральной формулы Стрэттона — Чу [12]:

$$\begin{aligned} E(x) = -\operatorname{rot} \int\limits_{\partial D} [\nu(y), E(y)] M(y, x, \sigma)\, d_y S \\ + \frac{1}{ik} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \int\limits_{\partial D} [\nu(y), H(y)] N(y, x, \sigma)\, d_y S, \quad x \in D, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(x) = -\operatorname{rot} \int\limits_{\partial D} [\nu(y), H(y)] N(y, x, \sigma)\, d_y S \\ - \frac{1}{ik} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \int\limits_{\partial D} [\nu(y), E(y)] N(y, x, \sigma)\, d_y S, \quad x \in D. \end{aligned}$$

Перепишем эти равенства в виде

$$\begin{aligned} E(x) = -\operatorname{rot} \int\limits_S [\nu(y), E(y)] M(y, x, \sigma)\, d_y S + \frac{1}{ik} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \int\limits_S [\nu(y), H(y)] M(y, x, \sigma)\, d_y S \\ - \operatorname{rot} \int\limits_\Sigma [\nu(y), E(y)] M(y, x, \sigma)\, d_y S + \frac{1}{ik} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \int\limits_\Sigma [\nu(y), H(y)] M(y, x, \sigma)\, d_y S, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} H(x) = -\operatorname{rot} \int\limits_S [\nu(y), H(y)] N(y, x, \sigma)\, d_y S = \frac{1}{ik} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \int\limits_S [\nu(y), E(y)] N(y, x, \sigma)\, d_y S \\ - \operatorname{rot} \int\limits_\Sigma [\nu(y), H(y)] N(y, x, \sigma)\, d_y S - \frac{1}{ik} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \int\limits_\Sigma [\nu(y), E(y)] N(y, x, \sigma)\, d_y S. \end{aligned}$$

Теперь неравенство (12) следует из (10), (11), (13) и (14). Теорема доказана. Приведем результат, который позволяет вычислить $E(x)$, $H(x)$ приближенно, когда на поверхности S вместо $E(y)$ и $H(y)$ заданы их непрерывные приближения $f_0(y)$ и $g_0(y)$, $0<\delta<1$:

$$\max_S |E(y)-f_\delta(y)|<\delta, \quad \max_S |H(y)-g_\delta(y)|<\delta. \tag{15}$$

Функции $E^{\sigma\delta}(x)$, $H^{\sigma\delta}(x)$ определим формулой

$$\begin{aligned} E^{\sigma\delta}(x) &= -\operatorname{rot}\int\limits_S M(y,x,\sigma) f_\delta\, d_yS + \frac{1}{ik}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int\limits_S M(y,x,\sigma) g_\delta(y)\, d_yS, \quad x\in D, \\ H^{\sigma\delta}(x) &= -\operatorname{rot}\int\limits_S N(y,x,\sigma) g_\delta(y)\, d_yS - \frac{1}{ik}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int\limits_S N(y,x,\sigma) f_\delta(y)\, d_yS, \quad x\in D, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\sigma=\frac{1}{x_3^0}\ln\frac{1}{\delta}$, $x_3^0=\max\limits_{x\in D} x_3$.

Теорема 4. *Пусть $E(y)$, $H(y)$ — регулярное решение системы (1) в области D, удовлетворяющее граничному условию*

$$|E(y)|\le 1, \quad |H(y)|\le 1, \ y\in\partial D. \tag{17}$$

Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} |E(x)-E^{\sigma\delta}(x)| &\le C_3(\omega,\mu,x)\delta^{\frac{x_3}{x_3^0}}\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^3, \\ |H(x)-H^{\sigma\delta}(x)| &\le C_4(\omega,\varepsilon,x)\delta^{\frac{x_3}{x_3^0}}\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^2, \quad x\in D, \end{aligned} \tag{18}$$

Доказательство. Из формул (10), (14) и (16) имеем

$$\begin{aligned} E(x)-E^{\sigma\delta}(x) &= -\operatorname{rot}\int\limits_S M(y,x,\sigma)([\nu(y),E(y)]-f_\delta(y))\, d_yS \\ &+\frac{1}{ik}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int\limits_S M(y,x,\sigma)([\nu(y),H(y)]-g_\delta(y))\, d_yS-\operatorname{rot}\int\limits_\Sigma N(y,x,\sigma)([\nu(y),E(y)]\, d_yS \\ &+\frac{1}{ik}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int\limits_\Sigma M(y,x,\sigma)[\nu(y),H(y)]\, d_yS, \quad x\in D, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} H(x)-H^{\sigma\delta}(x) &= -\operatorname{rot}\int\limits_S N(y,x,\sigma)([\nu(y),H(y)]-g_\delta(y))\, d_yS \\ &-\frac{1}{ik}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int\limits_S N(y,x,\sigma)([\nu(y),E(y)]-f_\delta(y))\, d_yS \\ &-\operatorname{rot}\int\limits_\Sigma N(y,x,\sigma)[\nu(y),H(y)]\, d_yS-\frac{1}{ik}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int\limits_\Sigma N(y,x,\sigma)[\nu(y),E(y)]\, d_yS, \quad x\in D. \end{aligned}$$

Здесь $M(y,x,\sigma)$, $N(y,x,\sigma)$ определяются из (7) и (9), т. е. $M(y,x,\sigma)$, $N(y,x,\sigma)$ — матрицы Карлемана рассматриваемой задачи Коши. Из условий теоремы и неравенств (13), (14) и (17) выводим неравенства

$$\Big| - \operatorname{rot} \int_S M(y,x,\sigma)([\nu(y),E(y)] - f_\delta(y))\, d_yS + \frac{1}{ik} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \int_S M(y,x,\sigma)([\nu(y),H(y)] - g_\delta(y))\, d_yS \Big| \le C_3(\omega,\mu,x) C(\sigma) \exp\big(\sigma x_3^0 - \sigma x_3\big), \quad x \in D, \tag{20}$$

$$\Big| - \operatorname{rot} \int_S N(y,x,\sigma)([\nu(y),H(y)] - g_\delta(y))\, d_yS - \frac{1}{ik} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \int_S N(y,x,\sigma)([\nu(y),H(y)] - f_\delta(y))\, d_yS \Big| \le C_4(\omega,\varepsilon,x) C(\sigma) \exp\big(\sigma x_3^0 - \sigma x_3\big), \quad x \in D.$$

В силу теоремы 3 и (17) получим

$$\Big| - \operatorname{rot} \int_S M(y,x,\sigma)[\nu(y),E(y)]\, d_yS + \frac{1}{ik} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \int_S M(y,x,\sigma)[\nu(y),H(y)]\, d_yS \Big| \le C_3(\omega,\mu,x) C(\sigma) \exp(-\sigma x_3), \quad x \in D, \tag{21}$$

$$\Big| - \operatorname{rot} \int_S N(y,x,\sigma)[\nu(y),H(y)]\, d_yS - \frac{1}{ik} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \int_S N(y,x,\sigma)[\nu(y),E(y)]\, d_yS \Big| \le C_4(\omega,\mu,x) C(\sigma) \exp(\sigma x_3), \quad x \in D.$$

Теперь из (19)–(21) имеем

$$\begin{aligned} |E(x) - E^{\sigma\delta}(x)| &\le C_3(\omega,\mu,x)\sigma^2\big(1 + \sigma \exp \sigma x_3^0\big) \exp(-\sigma x_3), \quad x \in D, \\ |H(x) - H^{\sigma\delta}(x)| &\le C_4(\omega,\varepsilon,x)\sigma^2\big(1 + \sigma \exp \sigma x_3^0\big) \exp(-\sigma x_3), \quad x \in D. \end{aligned} \tag{22}$$

Так как $\sigma = \frac{1}{x_3^0} \ln \frac{1}{\delta}$, из (22) следует (18), а именно

$$|E(x) - E^{\sigma\delta}(x)| \le C_3(\omega,\mu,x) \left[\frac{1}{x_3^0}\right]^2 \delta^{\frac{x_3}{x_3^0}} \left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^3, \quad x \in D,$$

$$|H(x) - H^{\sigma\delta}(x)| \le C_4(\omega,\varepsilon,x) \left[\frac{1}{x_3^0}\right]^2 \delta^{\frac{x_3}{x_3^0}} \left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^3, \quad x \in D.$$

Теорема доказана.

Из доказанных теорем вытекает

Следствие 1. *Предельные равенства*

$$\lim_{\sigma\to\infty} E^\sigma(x) = E(x), \quad \lim_{\sigma\to\infty} H^\sigma(x) = H(x),$$
$$\lim_{\sigma\to 0} E^{\sigma\delta}(x) = E(x), \quad \lim_{\sigma\to 0} H^{\sigma\delta}(x) = H(x)$$

выполняются равномерно на каждом компакте из D.

Формула (10) дает в явном виде приближенное решение задачи (1), (2) в точке $x \in D$, а формула (16) представляет приближенное решение, когда данные Коши на поверхности S заданы приближенно. Эти формулы основаны на постановке и методе анализа, предложенных М. М. Лаврентьевым (см. [1]).

2. Теперь приведем аналогичные результаты для областей типа конуса. Пусть D_ρ — ограниченная односвязная область из $\mathbb{R}^3$ с границей, состоящей из части Σ поверхности конуса

$$\alpha_1 = \tau y_3, \quad \alpha_1^2 = y_1^2 + y_2^2, \quad \tau = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2\rho}, \quad y_3 > 0,\ \rho > 1,$$

и гладкого куска поверхности S, лежащего внутри конуса. Будем считать $x_0 = (0, 0, x_3) \in D_\rho$.

Введем обозначения

$$\beta = \tau y_3 - \alpha_0, \quad \gamma = \tau x_3 - \alpha_0, \quad \alpha_0^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2;$$
$$w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2}\tau + \beta, \quad w_0 = i\tau\alpha + \beta.$$

Будем считать, что существует регулярное решение системы (1) в области D_ρ, удовлетворяющее условию Коши на поверхности S, т. е. $E, H \in C^1(D_\rho) \cap C(\overline{D}_\rho)$. С целью построения приближенного решения задачи Коши (1), (2) в точке $x_0 \in D_\rho$ в формуле (4) положим

$$K(w) = E_\rho(\sigma^{1/\rho} w), \quad Kx_3 = E_\rho(\sigma^{1/\rho}\gamma), \quad \sigma > 0, \tag{23}$$

где $E_\rho(w)$ — целая функция Миттаг-Леффлера [14]. Возьмем в формуле (4) $\Phi(y, x) = \Phi_\sigma(y, x)$ и определим матрицу Карлемана по формуле (9). Здесь

$$\Phi_\sigma(y, x) = \frac{\varphi_\sigma(y, x)}{4\pi E_\rho(\sigma^{1/\rho}\gamma)}, \quad y \neq x,$$

где $\varphi_\sigma(y, x)$ определяется равенством

$$\varphi_\sigma(y, x) = \int_0^\infty \operatorname{Im} \frac{E_\rho(\sigma^{1/\rho} w)}{i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3 - x_3} \frac{\operatorname{ch}(ku)\, du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad y \neq x.$$

Из свойств $E_\rho(w)$ следует, что при $y \in \Sigma$, $0 < u < \infty$ функция $\Phi_\sigma(y, x)$, определенная формулами (4), (23), ее градиент и ее вторые частные производные $\frac{\partial^2 \Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_i \partial y_j}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ при фиксированном $x \in D_\rho$ и $\sigma \to \infty$ стремятся к нулю. Тогда из (4), (9) и (23) получим, что матрицы $M(y, x, \sigma)$, $N(y, x, \sigma)$ являются матрицами Карлемана для области D_ρ и части Σ.

Введем следующие обозначения:

$$E^\sigma(x_0) = -\operatorname{rot}\int_S [\nu(y), E(y)] M(y, x_0, \sigma)\, d_y S$$
$$+ \frac{1}{ik} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_S [\nu(y), H(y)] M(y, x, \sigma)\, d_y S, \quad x_0 \in D_\rho, \tag{24}$$

$$H^{\sigma\delta}(x_0) = -\operatorname{rot}\int_S M(y, x_0, \sigma) f_\delta(y)\, d_y S$$
$$- \frac{1}{ik} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_S [\nu(y), E(y)] N(y, x, \sigma)\, d_y S, \quad x_0 \in D_\rho,$$

$$E^{\sigma\delta}(x_0) = -\operatorname{rot}\int\limits_S M(y, x_0, \sigma) f_\delta f_\delta(y)\, d_yS$$
$$+ \frac{1}{ik}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int\limits_S M(y, x, \sigma) g_\delta(y)\, d_yS, \quad x_0 \in D_\rho, \quad (25)$$

$$H^{\sigma\delta}(x_0) = -\operatorname{rot}\int\limits_S N(y, x_0, \sigma) f_\delta(y)\, d_yS$$
$$+ \frac{1}{ik}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int\limits_S N(y, x, \sigma) g_\delta(y)\, d_yS, \quad x_0 \in D_\rho,$$

$$\sigma = \frac{1}{R}\ln\frac{1}{\delta}, \quad R^\rho = \max_{y\in S}\operatorname{Re} w_0^\rho, \ 0 < \delta < 1.$$

Теорема 5. *Пусть $E(y)$, $H(y)$ — регулярное решение системы (1) в области D_ρ, на части Σ удовлетворяющее условию*

$$|E(y)| \le 1, \quad |H(y)| \le 1, \quad y \in \Sigma = \partial D/S. \quad (26)$$

Тогда при $x = x_0 \in D_\rho$, $\sigma \ge \sigma_0 > 0$ справедливы неравенства

$$|E(x) - E^\sigma(x_0)| \le C_5(x_0)\sigma^5 \exp(-\sigma\gamma^\rho), \quad |H(x) - H^\sigma(x_0)| \le C_6(x_0)\sigma^4 \exp(-\sigma\gamma^\rho), \quad (27)$$

где

$$C_5(x_0) = C_5(\omega, \mu, \rho)\int\limits_{\partial D_\rho}\frac{dy}{r^3}, \quad C_6(x_0) = C(\omega, \varepsilon, \rho)\int\limits_{\partial D_\rho}\frac{dy}{r^3}, \quad r = |y - x_0|.$$

Теорема 6. *Пусть $E(y)$, $H(y)$ — регулярное решение системы (1) в области D_ρ, удовлетворяющее (26) на всей границе. Тогда справедливы неравенства*

$$|E(x_0) - E^{\sigma\delta}(x_0)| \le C_5(x_0)\delta^{\left(\frac{\gamma}{R}\right)^\rho}\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^5,$$
$$|H(x_0) - H^{\sigma\delta}(x_0)| \le C_6(x_0)\delta^{\left(\frac{\gamma}{R}\right)^\rho}\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^4, \quad x_0 \in D_\rho,$$

где $C_5(x_0)$, $C_6(x_0)$ определяется из (27).

Следствие 2. *Предельные равенства*

$$\lim_{\sigma\to\infty} E^\sigma(x_0) = E(x_0), \quad \lim_{\sigma\to\infty} H^\sigma(x) = H(x_0),$$
$$\lim_{\sigma\to\infty} E^{\sigma\delta}(x_0) = E(x_0), \quad \lim_{\sigma\to\infty} H^{\sigma\delta}(x) = H(x_0)$$

выполняются равномерно на каждом компакте из D_ρ.

Доказательство теорем 5, 6 аналогично доказательству теорем 3, 4.

Формула (24) дает в явном виде приближенное решение задачи (1), (2), а формула (25) — приближенное решение, когда данные Коши на S заданы приближенно.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность академику М. М. Лаврентьеву и профессору Ш. Ярмухамедову за постановку задачи и постоянные обсуждения в процессе ее решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962.
2. *Лаврентьев М. М.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН. СССР. Сер. мат. 1956. Т. 20, № 6. С. 819–842.
3. *Мергелян С. Н.* Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11, № 5. С. 3–26.
4. *Иванов В. К.* Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. С. 131–136.
5. *Ярмухамедов Ш. Я.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Мат. заметки. 1975. Т. 18, № 1. С. 57–61.
6. *Ярмухамедов Ш. Я.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235, № 2. С. 281–283.
7. *Сатторов Э., Марданов Дж.* Регуляризация решения задачи Коши для системы уравнений Максвелла // Ill-Posed and non-classical problems of mathematical physics and analysis, Самарканд, 11–15 сентября 2000 г. Самарканд, 2000.
8. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
9. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе резуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501–504.
10. *Айзенберг Л. А., Тарханов Н. Н.* Абстрактная формула Карлемана // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298, № 6. С. 1292–1296.
11. *Тарханов Н. Н.* О матрице Карлемана для эллиптических систем // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 2. С. 294–297.
12. *Stratton J. A., Chu L. J.* Diffraction theory of electromagnetic waves // Phys. Repav. 1939. V. 56. P. 99–107.
13. *Сатторов Э.* Интегральное представление субгармонических функций в бесконечной области / Ред. журн. «Сиб. мат. журн.». Новосибирск, 1997. Деп. в ВИНИТИ 08.11.97, № 2287-В97.
14. *Джарбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.

Статья поступила 20 июня 2002 г.

Сатторов Эрмамат Норкулович, *Марданов Джалгаш Абдумажитович*
Самаркандский гос. университет им. А. Навои,
механико-математический факультет,
Университетский бульв., 15, Самарканд 703004, Узбекистан
Sattorov-e@rambler.ru