Сибирский математический журнал
Июль—август, 2003. Том 44, № 4

УДК 517.946

СВОЙСТВА УРАВНЕНИЯ БЫСТРОЙ ДИФФУЗИИ И ЕГО МНОГОМЕРНЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Э. И. Семенов

Аннотация: Доказана инвариантность уравнения быстрой диффузии в двумерном координатном пространстве и приведена его редукция к одномерному по пространственной переменной аналогу. На основе этих результатов построены новые точные многомерные решения, зависящие от произвольных гармонических функций. Как следствие, получены новые точные решения известного уравнения Лиувилля — стационарного аналога уравнения быстрой диффузии с линейным источником. Рассмотрены некоторые обобщения на системы квазилинейных параболических уравнений.

Ключевые слова: быстрая диффузия, точные многомерные решения, квазилинейные параболические уравнения, уравнение Лиувилля, сопряженные гармонические функции

Введение

В работе исследуется уравнение быстрой диффузии

$$u_t = \Delta \ln u, \quad u = u(x, y, t), \tag{1}$$

в двумерном координатном пространстве, которое встречается во многих прикладных задачах, например при описании процесса растекания сверхтонкой пленки жидкости под действием сил Ван дер Ваальса [1]. Оно возникает при моделировании диффузионных явлений в полупроводниках, полимерах и т. п. Известно [2], что уравнение (1) является особым с точки зрения групповой теории, так как допускает бесконечномерную алгебру точечных симметрий. Это означает, что уравнение (1) в координатном пространстве двух измерений обладает неограниченным запасом инвариантных решений [3]. В литературе соотношение (1) иногда называют уравнением Риччи (Ricci).

В настоящей статье приведены некоторые свойства (1) и на их основе построены новые точные многомерные решения указанного уравнения, зависящие от произвольных гармонических функций.

1. Инвариантность уравнения быстрой диффузии

Под инвариантностью будем понимать неизменяемость вида уравнения под действием какого-либо преобразования.

Определение [4]. Гармонические функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ называются *сопряженными в односвязной области* D, если функция $F(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ есть аналитическая функция аргумента $z = x + iy$ в области D.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS (грант 2000–0015) и Междисциплинарного проекта СО РАН № 131 «Гидродинамика вод Байкала».

Сопряженные гармонические функции связаны уравнениями Коши — Римана

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

определяют одна другую всюду в D с точностью до аддитивной постоянной и, как следствие, обладают следующими свойствами:

$$(\nabla \xi, \nabla \eta) = 0, \quad |\nabla \xi|^2 = |\nabla \eta|^2. \tag{2}$$

Простейшими примерами сопряженных гармонических функций являются гармонические полиномы

$$\xi(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \cos(n\varphi), \quad \eta(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \sin(n\varphi),$$

где $\varphi = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ или $\varphi = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 1. *Если функция $\eta(x, y)$ является гармонической, то гармонической будет функция $\ln\left|\eta_x^2 + \eta_y^2\right|$.*

Доказательство. Для удобства введем обозначение $\psi(x, y) = \eta_x^2 + \eta_y^2$. Тогда

$$\Delta \ln \psi = \left[\psi(\psi_{xx} + \psi_{yy}) - \left(\psi_x^2 + \psi_y^2\right)\right]\psi^{-2}. \tag{3}$$

Последовательно вычисляя необходимые частные производные, находим

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 2\left(\eta_{xx}^2 + \eta_{yy}^2\right) + 4\eta_{xy}^2 + 2\eta_x(\eta_{xx} + \eta_{yy})_x + 2\eta_y(\eta_{xx} + \eta_{yy})_y,$$

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 = 8\eta_x\eta_y\eta_{xy}(\eta_{xx} + \eta_{yy}) + 4\eta_x^2\left(\eta_{xx}^2 + \eta_{xy}^2\right) + 4\eta_y^2\left(\eta_{yy}^2 + \eta_{xy}^2\right).$$

Так как в силу гармоничности $\eta_{xx} = -\eta_{yy}$, последние соотношения примут соответственно вид

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 4\left(\eta_{xx}^2 + \eta_{xy}^2\right), \quad \psi_x^2 + \psi_y^2 = 4\left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right)\left(\eta_{xx}^2 + \eta_{xy}^2\right).$$

Следовательно, выражение (3) тождественно обращается в нуль. Лемма доказана.

Теперь сформулируем один из основных результатов работы.

Теорема 1. *Если $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ — сопряженные гармонические функции, то уравнение быстрой диффузии* (1) *инвариантно относительно преобразования*

$$u(x, y, t) = \rho(x, y)v(\xi, \eta, t), \tag{4}$$

где $\rho(x, y) = |\nabla \eta|^2$, т. е. под действием (4) *оно переходит само в себя:*

$$v_t = \Delta_{\xi\eta} \ln v. \tag{5}$$

Доказательство. После подстановки соотношения (4) в уравнение (1) и несложных выкладок с учетом свойств сопряженных гармонических функций (2) получим

$$\rho v_t = \Delta_{xy} \ln \rho + \rho \Delta_{\xi\eta} \ln v.$$

Отсюда в силу леммы 1 немедленно следует (5), что и требовалось доказать.

Таким образом, выражение (4) является автопреобразованием для уравнения быстрой диффузии (1) и, следовательно, формулой размножения решений.

Пример 1. Возьмем точное решение уравнения (5) вида [5, 6]

$$v(\xi,\eta,t) = 2\frac{\operatorname{th}(t)}{\xi^2+\eta^2\operatorname{th}^2(t)}.$$

Применяя к этому решению преобразование (4) с произвольно выбранными гармоническими функциями, сконструируем несколько новых точных неавтомодельных анизотропных по пространственным переменным явных решений уравнения (1):

$$u(x,y,t) = 2\frac{\left(\operatorname{cth}^2(x)+\operatorname{tg}^2(y)\right)\operatorname{th}(t)}{1+\operatorname{cth}^2(x)\operatorname{tg}^2(y)\operatorname{th}^2(t)},$$

$$u(x,y,t) = 2\frac{(\operatorname{tg}^2(x)+\operatorname{th}^2(y))\operatorname{th}(t)}{1+\operatorname{tg}^2(x)\operatorname{th}^2(y)\operatorname{th}^2(t)},$$

$$u(x,y,t) = 18\frac{(\operatorname{tg}^2(x^3-3xy^2)+\operatorname{th}^2(3x^2y-y^3))(x^2+y^2)^2\operatorname{th}(t)}{1+\operatorname{tg}^2(x^3-3xy^2)\operatorname{th}^2(3x^2y-y^3)\operatorname{th}^2(t)},$$

$$u(x,y,t) = 18\frac{(\operatorname{tg}^2(\exp(3x)a(y))+\operatorname{th}^2(\exp(3x)b(y)))\exp(x)\operatorname{th}(t)}{1+\operatorname{tg}^2(\exp(3x)a(y))\operatorname{th}^2(\exp(3x)b(y))\operatorname{th}^2(t)},$$

где приняты обозначения

$$a(y) = \cos^3(y) - 3\cos(y)\sin^2(y), \quad b(y) = 3\cos^2(y)\sin(y) - \sin^3(y).$$

Можно заметить, что при $t \to +\infty$ полученные решения стремятся к стационарным.

Результат, аналогичный теореме 1, можно распространить на некоторый класс систем квазилинейных параболических уравнений. Так, имеет место

Теорема 2. *Пусть $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ — сопряженные гармонические функции, а $f_i(u_1,u_2,\dots,u_m)$, $i = 1,2,\dots,n$, $m \le n$, — однородные степени однородности равной единице, т. е.*

$$f_i(\lambda u_1,\lambda u_2,\dots,\lambda u_m) = \lambda f_i(u_1,u_2,\dots,u_m). \tag{6}$$

Тогда система n уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \Delta_{xy}\ln u_i + f_i(u_1,u_2,\dots,u_m) \tag{7}$$

инвариантна относительно преобразований

$$u_i(x,y,t) = \rho(x,y)v_i(\xi,\eta,t), \tag{8}$$

где $\rho = |\nabla\eta|^2$, т. е. переходит сама в себя:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \Delta_{\xi\eta}\ln v_i + f_i(v_1,v_2,\dots,v_m). \tag{9}$$

Доказательство. Подставляя функции (8) в уравнения (7) и учитывая условие однородности (6), приходим к системе

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = \Delta_{xy}(\ln\rho+\ln v_i) + \rho f_i(v_1,v_2,\dots,v_m), \tag{10}$$

при этом нетрудно убедиться, используя свойства сопряженных гармонических функций (2), что

$$\Delta_{xy}\ln v_i = \rho\Delta_{\xi\eta}\ln v_i.$$

Следовательно, из (10) в силу леммы 1 следует система уравнений (9). Теорема доказана.

2. Редукция уравнения быстрой диффузии к своему одномерному по пространственной переменной аналогу

Теорема 3. *Пусть $\eta(x, y)$ — произвольная гармоническая функция, отличная от постоянной, тогда уравнение быстрой диффузии (1) с помощью преобразования*

$$u(x, y, t) = \left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right) v(\eta, t) \tag{11}$$

редуцируется к своему одномерному по пространственной переменной η аналогу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 \ln v}{\partial \eta^2}. \tag{12}$$

Доказательство. После подстановки выражения (11) в уравнение (1) приходим к равенству

$$\psi(x, y) \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta_{xy}(\ln \psi(x, y) + \ln v), \tag{13}$$

причем легко показать, что

$$\Delta_{xy} \ln v = \psi(x, y) \frac{\partial^2 \ln v}{\partial \eta^2},$$

где $\psi(x, y) = \eta_x^2 + \eta_y^2$. Таким образом, из равенства (13) в силу леммы 1 следует уравнение (12), что и требовалось доказать.

Значит, проинтегрировав уравнение (12) и используя формулу (11), можно построить класс точных решений уравнения быстрой диффузии (1), зависящих от произвольной гармонической функции.

Пример 2. Пусть $\eta(x, y)$ — гармонический полином четвертой степени, т. е. $\eta(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ или $\eta(x, y) = 4(x^3y - xy^3)$. Тогда $\eta_x^2 + \eta_y^2 = 16(x^2 + y^2)^3$. В этом случае преобразование

$$u(x, y, t) = 16(x^2 + y^2)^3 v(\eta, t)$$

дает анизотропное по пространственным переменным x и y решение уравнения (1), при этом функция $v(\eta, t)$ определяется из соотношения (12). Поскольку, уравнение (12) заменой $v = w^{-1}$ сводится к уравнению с квадратичными нелинейностями

$$w_t = w w_{\eta\eta} - (w_\eta)^2,$$

то в дополнение построим некоторые точные решения уравнения (12), используя подход, изложенный в [7, 8]:

$$v(\eta, t) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\,\mathrm{sh}(\lambda t)}{k_1 \cos(\eta) + k_2 \sin(\eta) + \sqrt{k_1^2 + k_2^2}\,\mathrm{ch}(\lambda t)},$$

$$v(\eta, t) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\cos(\lambda t)}{k_1 \cos(\eta) + k_2 \sin(\eta) - \sqrt{k_1^2 + k_2^2}\sin(\lambda t)},$$

$$v(\eta, t) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\sqrt{k_1^2 - k_2^2}\cos(\lambda t)}{k_1 \mathrm{ch}(\eta) + k_2 \mathrm{sh}(\eta) + \sqrt{k_1^2 - k_2^2}\sin(\lambda t)},$$

$$v(\eta, t) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\sqrt{k_1^2 - k_2^2}\,\mathrm{sh}(\lambda t)}{k_1 \mathrm{ch}(\eta) + k_2 \mathrm{sh}(\eta) - \sqrt{k_1^2 - k_2^2}\,\mathrm{ch}(\lambda t)}.$$

Здесь $\lambda \neq 0, k_1 > k_2$ — произвольные числовые параметры.

Замечание. Аналог теоремы 3 для системы квазилинейных параболических уравнений (7) доказан в работе автора [9].

Хорошо известно [10, с. 84], что уравнение Лапласа в двумерном координатном пространстве инвариантно относительно конформного преобразования независимых переменных

$$\frac{\partial x}{\partial q_2} = \frac{\partial y}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial x}{\partial q_1} = -\frac{\partial y}{\partial q_2}, \tag{14}$$

при этом $\frac{\partial x}{\partial q_1}$, $\frac{\partial y}{\partial q_2}$ не обращаются одновременно в нуль. Примером такого преобразования может служить система параболических координат

$$x = q_2^2 - q_1^2, \quad y = 2q_1q_2.$$

Применим преобразование (14) к исследуемому уравнению (1), которое перепишется следующим образом:

$$u_t = f(q_1, q_2)\Delta_{q_1q_2} \ln u, \quad u = u(q_1, q_2, t). \tag{15}$$

Здесь принято обозначение $f(q_1, q_2) = x_{q_1}^2 + x_{q_2}^2$. Так как в силу (14) функция $x = x(q_1, q_2)$ является гармонической, из леммы 1 вытекает, что

$$\Delta_{q_1q_2} \ln f(q_1, q_2) = 0. \tag{16}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Если выполнено соотношение* (16), *то неоднородное уравнение быстрой диффузии* (15) *преобразованием*

$$u(q_1, q_2, t) = \frac{1}{f(q_1, q_2)}\big[f_{q_1}^2 + f_{q_2}^2\big]v(\eta, t), \quad \eta = \ln f(q_1, q_2), \tag{17}$$

редуцируется к однородному и одномерному по пространственной переменной η *уравнению* (12).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3, отличие в том, что в формуле (11), записанной в переменных q_1 и q_2, надо положить $\eta(q_1, q_2) = \ln f(q_1, q_2)$.

Пример 3. Уравнение нелинейной диффузии

$$u_t = \exp(x^2 - y^2)\Delta \ln u, \quad \text{или} \quad w_t = \exp(x^2 - y^2 - w)\Delta w,$$

где $w(x, y, t) = \ln v(x, y, t)$, обладает точным несимметричным по пространственным переменным решением

$$u(x, y, t) = 4(x^2 + y^2)\exp(x^2 - y^2)v(\eta, t), \quad \eta = x^2 - y^2.$$

При этом функция $v(\eta, t)$ удовлетворяет уравнению (12), точные решения которого приведены в примере 2.

Отметим, что некоторые точные решения уравнения (1), отличные от построенных в разд. 1, 2 настоящей работы, можно найти в [1, 2, 11–14].

3. Точные решения уравнения Лиувилля в двумерном координатном пространстве

Нетрудно показать, что основные результаты разд. 1, 2 непосредственно, обобщаются на уравнение быстрой диффузии с линейным источником (стоком)

$$u_t = \Delta \ln u - \lambda u, \tag{18}$$

где $\lambda \in \mathrm{Re}\setminus\{0\}$. Так как формулы (4), (11), (17) явно не зависят от времени, теоремы 1, 3 и 4 останутся справедливыми для стационарного (эллиптического) уравнения (18)

$$\Delta \ln u = \lambda u,$$

которое заменой $u = \exp(\lambda w)$ сводится к известному уравнению Лиувилля

$$\Delta w = \exp(\lambda w). \tag{19}$$

Итак, из теоремы 1 и леммы 1 вытекает

Утверждение 1. *Уравнение Лиувилля* (19) *инвариантно относительно преобразования*

$$w(x, y) = v(\xi, \eta) + \frac{1}{\lambda} \ln |\rho(x, y)|, \tag{20}$$

где $\rho = |\nabla\eta|^2$, *а* $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ — *сопряженные гармонические функции.*

Применяя к уравнению (19) преобразование (11), получим обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ), которое легко интегрируется, тем самым убеждаемся, что имеет место

Утверждение 2. *Уравнение Лиувилля* (19) *в двумерном координатном пространстве обладает точными решениями вида*

$$w(x, y) = \frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{2A^2}{\lambda} \big(\eta_x^2 + \eta_y^2\big) \sec^2(A\eta) \right|,$$

$$w(x, y) = \frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{2A^2}{\lambda} \big(\eta_x^2 + \eta_y^2\big) \operatorname{sech}^2(A\eta) \right|,$$

где $\eta(x, y)$ — *произвольная гармоническая функция, отличная от постоянной,* $A, \lambda \in \mathrm{Re}\setminus\{0\}$.

Замечание. Результаты утверждений 1 и 2 ранее получены С. Р. Свирщевским в работах [13, 14].

Аналогично из теоремы 4 для стационарного неоднородного уравнения (15) с линейной добавкой следует, что справедливо

Утверждение 3. *Неоднородное уравнение Лиувилля*

$$\Delta w = \eta(x, y) \exp(\lambda w), \tag{21}$$

где $\eta(x, y)$ — *произвольная гармоническая функция, отличная от постоянной, имеет точное решение*

$$w(x, y) = \frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{3}{\lambda} \frac{\eta_x^2 + \eta_y^2}{\eta^3} \right|.$$

Отметим, что точные решения неоднородного уравнения Лиувилля (21), когда $\eta(x, y)$ является некоторой голоморфной функцией специального вида, приведены в [15].

Как обобщение результатов этого раздела на некоторые системы уравнений приведем стационарную математическую модель переноса заряда с взаимодействием Пуассона, возникающую в теории полупроводников.

Пример 4. Эллиптическая система уравнений вида

$$\Delta u = \exp(u) + A|\nabla\Phi|^2, \Delta v = \exp(v) - B|\nabla\Phi|^2,$$
$$\Delta\Phi = \exp(v) - \exp(u), \tag{22}$$

обладает точным решением вида

$$u(x,y) = f(\eta) + \ln\left|\eta_x^2 + \eta_y^2\right|, \quad v(x,y) = \psi(\eta) + \ln\left|\eta_x^2 + \eta_y^2\right|, \quad \Phi(x,y) = \varphi(\eta),$$

где $\eta(x,y)$ — произвольная гармоническая функция, отличная от постоянной; $A, B \in \mathrm{Re}\setminus\{0\}$. При этом функции f, ψ, φ определяются из системы ОДУ

$$f'' = \exp(f) + A\varphi'^2, \quad \psi'' = \exp(\psi) - B\varphi'^2, \quad \varphi'' = \exp(\psi) - \exp(f).$$

В случае $A = -B$ система (22) допускает частное точное решение

$$u(x,y) = v(x,y) = f(\eta) + \ln\left|\eta_x^2 + \eta_y^2\right|, \quad \Phi(x,y) = \eta(x,y),$$

причем функция $f(\eta)$ удовлетворяет линейному ОДУ

$$f'' = f + A$$

второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пухначев В. В.* Многомерные точные решения уравнения нелинейной диффузии // Прикл. механика и техн. физика. 1995. Т. 36, № 2. С. 23–31.
2. *Галактионов В. А., Дородницын В. А., Еленин Г. Г. и др.* Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 28. С. 95–205. (Итоги науки и техники).
3. *Дородницын В. А., Князева И. В., Свирщевский С. Р.* Групповые свойства уравнения теплопроводности в двумерном и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 7. С. 1215–1223.
4. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968.
5. *Рудых Г. А., Семенов Э. И.* Точные неавтомодельные решения уравнения $u_t = \Delta \ln u$ // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 5. С. 787–792.
6. *Рудых Г. А., Семенов Э. И.* Существование и построение анизотропных решений многомерного уравнения нелинейной диффузии. II // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 1. С. 176–195.
7. *Галактионов В. А., Посашков С. А.* О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29, № 4. С. 497–506.
8. *Свирщевский С. Р.* Нелинейные дифференциальные операторы первого и второго порядков, обладающие инвариантными линейными пространствами максимальной размерности // Теорет. и мат. физика. 1995. Т. 105, № 2. С. 198–207.
9. *Семенов Э. И.* Об анизотропных решениях одной системы нелинейных параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 9. С. 1291–1292.
10. *Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г. и др.* Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964.
11. *Аристов С. Н.* Периодические и локализованные точные решения уравнения $h_t = \Delta \ln h$ // Прикл. механика и техн. физика. 1999. Т. 40, № 1. С. 22–26.
12. *Капцов О. В.* Точные решения одного диффузионного уравнения // Тр. междунар. конф. «Математические модели и методы их исследования». Красноярск, 2001. Т. 1. С. 289–291.

13. *Свирщевский С. Р.* Групповая классификация и инвариантные решения нелинейных полигармонических уравнений // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 10. С. 1772–1781.

14. *Свирщевский С. Р.* Групповые свойства моделей теплопроводности: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 1984.

15. *Сабитов И. Х.* О решениях уравнения $\Delta u = f(x, y)e^{cu}$ в некоторых специальных случаях // Мат. сб. 2001. Т. 196, № 6. С. 89–104.

Статья поступила 26 ноября 2002 г.

Семенов Эдуард Иванович
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
semenov@icc.ru