Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 517.953

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

В. Н. Монахов

Аннотация: Изучаются эллиптические системы сильно нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка на плоскости, представленных в комплексной форме. Для таких систем построена теория граничной задачи Гильберта, в значительной мере подобная известной теории для голоморфного вектора. Системы нелинейных эллиптических уравнений описывают проблемы взаимодействия нескольких нелинейных стационарных процессов, происходящих при диффузионном и конвективном переносе массы и тепла гидродинамическими потоками жидкости.

Ключевые слова: эллиптические системы, нелинейная задача, корректность, тепломассоперенос.

1. Уравнения диффузии. Рассматривается процесс распространения тепла и массопереноса примесей гидродинамическими потоками жидкости в открытых каналах или в пористых средах.

Стационарное распределение вектора $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ концентраций компонент примесей φ_k, $k = \overline{1, m-1}$, и температуры φ_m потока смеси на плоскости переменных x, y $(x \equiv x_1, y \equiv x_2)$ описывается следующей системой дифференциальных законов сохранения [1–4]:

$$\operatorname{div} I_k - \rho v \nabla \varphi_k + W_k = 0,\ k = \overline{1, m}, \quad \operatorname{div} \rho v = 0.$$

Здесь $\rho v = V$ — заданный расход смеси, I_k — поток массы компонент ($k = \overline{1, m-1}$) или поток тепла ($k = m$), W_k — скорость возникновения компоненты φ_k в результате химических реакций или фазовых переходов. Представляя I_k в форме Дж. Гиршфельдера [3] $I_k = \sum\limits_{j=1}^{m} L_{kj} \nabla \varphi_j$, приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$L_k \varphi \equiv \operatorname{div} \left(\sum_{j=1}^{m} L_{kj} \nabla \varphi_j - V \varphi_k \right) + W_k = 0, \quad k = \overline{1, m}.$$

Операторы L_k принимают дивергентную форму, если можно пренебречь взаимным влиянием компонент φ_k, а скорости W_k представляются через химические потенциалы Φ_k, $W_k = \operatorname{div} \Phi_k$:

$$\operatorname{div} V_k \equiv \operatorname{div}(\lambda_k \nabla \varphi_k - V \varphi_k + \Phi_k) = 0, \quad \lambda_k > 0,\ k = \overline{1, m},$$

где $\lambda_k = L_{kk}$, $L_{kj} = 0$ при $j \neq k$, V_k — поток φ_k, λ_k — коэффициент диффузии. Предположения $\lambda_k > 0$ обеспечивают эллиптичность уравнений для φ_k.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00645) и программы «Университеты России» (код проекта 04.01.038).

Таким образом, диффузионные процессы можно описать абстрактным дифференциальным уравнением второго порядка для вектора $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$:

$$L\varphi \equiv \sum_{l,k=1}^{2} (A_{kl}\varphi_{x_l x_k} + A_k \varphi_{x_k}) + A = 0,$$

где A_{kl} и A_k — матрицы размера $m \times m$ диффузионного и конвективного переноса, A — вектор скоростей химических реакций. Коэффициенты (A_{kl}, A_k, A) оператора L предполагаются заданными функциями переменных $(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{3m+2}$.

Квазилинейный оператор L называется *эллиптическим*, если отвечающее ему характеристическое уравнение

$$P(\xi) \equiv \left| \sum_{l,k=1}^{2} A_{kl}\xi_l\xi_k \right| = 0, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2),\ |A| = \det A,$$

не имеет вещественных корней $\xi \neq 0$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^{3m+2}$ определения матриц A_{lk}. Введем векторы $u^k = (\varphi_{1x_k}, \ldots, \varphi_{mx_k})$, $k = 1, 2$, проекций потоков компонент φ_i, $i = \overline{1, m}$, на координатные оси и представим уравнение $L\varphi = 0$ в виде

$$\sum_{l,k=1}^{2} \left(A_{lk}u^l_{x_k} + A_k u^k\right) + A = 0, \quad u^2_{x_1} - u^1_{x_2} = 0.$$

Эта система $2m$ дифференциальных уравнений первого порядка для вектора $u = (u^1, u^2) \equiv (u_1, \ldots, u_{2m})$ является эллиптической, если эллиптичен исходный оператор L. Придадим полученной системе уравнений стандартную форму:

$$MU \equiv U_x + AU_y + BU + F = 0, \quad U = (U_1, \ldots, U_{2m}),$$

где A, B — вещественные матрицы размера $2m \times 2m$, $F = (F_1, \ldots, F_{2m})$.

Условие эллиптичности оператора M имеет вид

$$|\xi_1 I + \xi_2 A| \neq 0 \quad \text{при } \xi = (\xi_1, \xi_2) \neq 0,$$

где I — единичная матрица размера $2m \times 2m$. Пусть $A = A(x, y)$. Тогда в предположении эллиптичности оператора M и выполнении некоторых условий регулярности A с помощью замены переменных матрица $A = \{a_{ij}\}$ приводится к *квазидиагональной* в следующем смысле [5]:

$$\sup_i |a_{ii}| = \delta_0 < 1, \quad \sup_{i \neq j} |a_{ij}| = \delta \ll 1.$$

Эти свойства матрицы A позволяют представить уравнение $MU = 0$ в комплексной форме, как и в случае одного уравнения [6]:

$$Nw \equiv w_{\bar{z}} + Q^1 w_z + Q^2 \overline{w}_{\bar{z}} + C^1 w + C^2 \overline{w} + F^0 = 0,$$

$$\rho(Q^1, Q^2) \equiv \sup_i \sum_j \left(\left|\alpha^1_{ij}\right| + \left|\alpha^2_{ij}\right|\right) = \alpha_0 < 1.$$

Предположение $\rho(Q^1, Q^2) < 1$ называют *условием эллиптичности* оператора N, а матрицы $Q^k = \left\{\alpha^k_{ij}\right\}$, $k = 1, 2$, подчиненные этому условию, *квазидиагональными* [5].

2. Граничные задачи. Без нарушения общности областью определения решений φ, U, w рассмотренных в п. 1 уравнений $L\varphi = MU = Nw = 0$ можно считать круг $K = \{z = x + iy : |z| < R\}$, а соответствующие граничные условия — однородными.

Наиболее изученной является задача Дирихле $\varphi|_{\partial K} = 0$ для линейного абстрактного уравнения второго порядка $L\varphi = 0$, коэффициенты которого зависят только от x, y.

Основным подходом к исследованию этой задачи Дирихле является представление ее решений с помощью какого-либо потенциала и тем самым редукция задачи к уравнению с вполне непрерывным оператором — уравнению Фредгольма [7–10]. Безусловная разрешимость задачи Дирихле, как правило, доказывается при очень жестких ограничениях на коэффициенты оператора L (вплоть до их постоянства) или на размеры области $|z| < R \ll 1$. Достаточно подробный обзор этих работ имеется в [7, 8]. Другой метод доказательства разрешимости задачи Дирихле на основе априорных оценок ее решений изложен в [11] применительно к квазилинейному уравнению с векторным оператором в главной части:

$$L\varphi_s \equiv \sum_{l,k=1}^{2} A_{lk}(x, y, \varphi) \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x_l \partial x_k} + A^s(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) = 0, \quad s = \overline{1, m}.$$

Найдены условия безусловной разрешимости этой задачи. Аналогично случаю уравнения второго порядка $Lu = 0$ доказана фредгольмовская (нетеровская) разрешимость задачи Дирихле и более общих задач Гильберта для линейных эллиптических систем уравнений первого порядка $MU = 0$ и $Nw = 0$ [4, 6].

С помощью обобщенных потенциальных и сингулярных операторов Векуа [6] в работе [12] (см. также [13]) исследована разрешимость задачи Гильберта для квазианалитического вектора:

$$Nw \equiv w_{\bar z} + Q^1 w_z + Q^2 \overline{w}_{\bar z} = 0; \quad \mathrm{Re}[t^{n_k} w_k(t)] = 0, \quad |t| = 1,$$

$$\|Q^1\| + \|Q^2\| = \alpha_0 < 1.$$

Здесь $Q^k = Q^k(z, w) = \{\alpha^k_{ij}\}$, $\|Q^k\| = \sup\limits_{z,w} \bigl(\sum\limits_{ij} |\alpha^k_{ij}|^2\bigr)^{\frac{1}{2}}$, целые числа n_k называют *частными индексами* задачи Гильберта.

Построенная в [12, 13] теория полностью аналогична случаю голоморфного вектора ($Q^1 = Q^2 = 0$) [14], причем ее справедливость установлена также для задачи Гильберта с разрывными коэффициентами в граничном условии.

В работах [15, 16] эта теория была применена к общему уравнению $Nw = 0$ с матрицами Q^1, Q^2, близкими к диагональным или треугольным.

Замечание 1 (о физическом смысле граничных условий). Комплексно-значная вектор-функция $w(z) = (w_1, \dots, w_m)$ выражается через потоки компонент примесей и тепла, поэтому граничные условия задачи Гильберта и, в частности, задачи Дирихле ($n_k = 0$) связаны с заданием этих потоков на границе области течения или с условиями их баланса с внешней средой [1–3].

3. Нелинейные модели течений однородной жидкости. Многие гидродинамические процессы носят существенно нелинейный характер. Например, плоские стационарные потенциальные течения газа [13, 17] и движение жидкости в неидеальных пористых средах [18] описываются следующей нелинейной системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\varphi_y = \rho(q)\psi_x, \quad -\varphi_x = \rho(q)\psi_y, \quad q^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2.$$

Здесь ρ, φ, q — плотность, потенциал и скорость потока жидкости соответственно, ψ — функция тока.

Для комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ эти уравнения принимают вид

$$Nw \equiv w_{\bar z} + \frac{\rho - 1}{\rho + 1}\overline{w}_{\bar z} = 0, \quad \rho = \rho(|w_z|).$$

Обозначим через $M = |1 - \rho^{-1} d(q\rho)/dq|^{1/2}$ число Маха и будем предполагать течение неизменно дозвуковым [13, 17], т. е. полагать, что $M < 1$.

Введем комплексную скорость течения

$$\omega = \sigma - i\theta, \quad \sigma = \int_1^q \xi^{-1}\sqrt{1 - M^2(\xi)}\, d\xi, \quad \theta = \operatorname{arctg}(\varphi_y/\varphi_x).$$

Тогда дифференцированием уравнения $Nw = 0$ по z получим

$$L\omega \equiv \omega_{\bar z} - \mu(\omega)\omega_z = 0, \quad \mu = e^{2i\theta}\frac{1 - a}{1 + a}, \quad a^2 = 1 - M^2 > 0.$$

Нелинейное уравнение $Nw = 0$ называют *эллиптическим*, если эллиптично квазилинейное уравнение $L\omega = 0$, т. е. $\sup|\mu| = \mu_0 < 1$.

По построению для неизменно дозвуковых течений жидкости условие эллиптичности оператора L выполняется автоматически.

В [13] автором изучены различные нелинейные граничные задачи для уравнения $Nw = 0$, в частности, задачи со свободными границами, в которых искомыми являются не только решения $w(z)$ уравнения $Nw = 0$, но и часть границы области определения $w(z)$.

Автором построена также общая теория нелинейных эллиптических систем уравнений [13, 19]:

$$F_k(x, y, \varphi, \psi, \varphi_x, \varphi_y, \psi_x, \psi_y) = 0, \quad k = 1, 2.$$

Показано, что если данная система уравнений эллиптична [5], то эта и ее производная системы могут быть представлены в виде

$$Nw \equiv w_{\bar z} + \mu_1(z, w, \omega)w_z + \mu_2(z, w, \omega)\overline{w}_{\bar z} + f_1(z, w, \omega) = 0, \quad \omega = w_z,$$

$$L\omega \equiv \omega_{\bar z} + q_1(z, w, \omega)\omega_z + q_2(z, w, \omega)\overline{\omega}_{\bar z} + f_2(z, w, \omega) = 0.$$

При этом доказано, что из условия эллиптичности квазилинейного оператора L:

$$\lambda(q_1, q_2) \equiv \sup(|q_1| + |q_2|) = q_0 < 1,$$

следует формальная «эллиптичность» оператора N, рассмотренного как квазилинейный оператор, после подстановки в его коэффициенты производной $\omega(z) = w_z$:

$$l(\mu_1, \mu_2) \equiv \sup(|\mu_1| + |\mu_2|) = \mu_0(q_0) < 1.$$

Установленные свойства нелинейного оператора N позволили автору дать конструктивное доказательство теорем М. А. Лаврентьева (ссылки в [13]) о квазиконформных отображениях решениями систем $F_1 = F_2 = 0$ [13, 19], решить общую задачу квазиконформного склеивания [20], изучить задачу о фильтрации жидкости со свободными границами в неидеальных пористых средах [18].

Результаты автора [13] применены Н. А. Кучером [21] для доказательства безусловной разрешимости задачи Гильберта:

$$Nw = 0, \quad |z| < 1; \quad \mathrm{Re}[t^{n_k} w_k(t)] = 0, \quad |t| = 1, \quad k = \overline{1, m}.$$

Замечание 2 (об уравнениях для потоков жидкости). Рассмотренные в этом пункте математические модели потоков сжимаемой жидкости часто используются при описании процессов тепломассопереноса [1–3]. В общем случае расход смеси $\rho v = V$ считается искомым и к системе диффузионных уравнений добавляются уравнения для потенциалов скоростей компонент неоднородной жидкости, что практически не меняет характера системы уравнений, описанной в п. 1.

4. Нелинейные процессы диффузии многокомпонентной жидкости. Пусть $u(z) = (u_1, \dots, u_m)$ — комплекснозначный вектор потоков массы $u_k(z)$, $k = \overline{1, m-1}$, и тепла $u_m(z)$. Запишем систему уравнений диффузии в виде нелинейного дифференциального оператора первого порядка для $u(z)$:

$$u_{\bar z} = \mu^1 u_z + \mu^2 \bar u_{\bar z} + f \equiv A(z, u, v), \quad v = u_z. \tag{1}$$

(i) Условия гладкости: матрицы μ^i, $i = 1, 2$, и вектор f дважды непрерывно дифференцируемы по (z, u, v), т. е. $(\mu^i, f) \in C^2(\overline{\Omega}_r)$, где $\Omega_r = \{|z| < 1, |u| < r, |v| < r\}$, $0 < r < \infty$.

Продифференцируем обе части (1) по z:

$$v_{\bar z} = \frac{DA}{Dv} v_z + \frac{DA}{D\bar v} \bar v_z + D_z A, \quad A = (A_1, \dots, A_m);$$
$$\frac{DA}{Dv} = \left\{ \frac{\partial A_i}{\partial v_j} \right\}, \quad \frac{DA}{D\bar v} = \left\{ \frac{\partial A_i}{\partial \bar v_j} \right\}$$

— матрицы Якоби по v и $\bar v$,

$$D_z A = A_z + \frac{DA}{Du} v + \frac{DA}{D\bar u} \bar v.$$

Из полученного соотношения и ему комплексно-сопряженного исключим производную $\bar v_z$, в результате чего придем к *производному уравнению* для $v = (v_1, \dots, v_m)$:

$$v_{\bar z} = q^1 v_z + q^2 \bar v_{\bar z} + F \equiv B(z, u, v). \tag{2}$$

Здесь

$$q^1 = R^{(-1)} \frac{DA}{Dv}, \quad q^2 = R^{(-1)} \frac{DA}{D\bar v} \cdot \frac{D\overline{A}}{D\bar v}, \quad R = \left(I - \frac{DA}{D\bar v} \cdot \frac{D\overline{A}}{Dv} \right),$$

$R^{(-1)}$ — обратная матрица,

$$F = \sum_{k+l=0}^{2} F_{kl} v^k \bar v^l = R^{(-1)} \left(D_z A + \frac{DA}{D\bar v} D_{\bar z} \overline{A} \right).$$

Введем обозначения: $\|g(z, u, v)\| = \sup\limits_{z,u,v} |g|$; если $g = \{g_{i,j}\}$ — матрица размера $m \times m$, то $|g| = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{m} |g_{ij}|^2 \right)^{1/2}$.

(ii) Условия усиленной эллиптичности:

$$\|q^1\| + \|q^2\| = q_0 < 1; \quad \|\mu^1\| + \|\mu^2\| = \mu_0 < 1.$$

Первое из условий (ii) обеспечивает равномерную эллиптичность квазилинейной системы (2) для вектор-функции $v(z)$, второе — эллиптичность квазилинейной системы (1) для вектор-функции $u(z)$ при подстановке в $\mu^i = \mu^i(z,u,v)$ произвольной измеримой вектор-функции $v = V(z)$. В частности, система (1) эллиптична на каждом ее решении $u(z) \in W^1_{p>2}(D)$, $D \subset \mathbb{C}$, $|D| < \infty$.

Замечание 3 (об усиленной эллиптичности). В случае $m = 1$ в работе автора [19] доказано, что второе условие в (ii) является следствием первого, последнее при этом является обычным условием эллиптичности. При $m > 1$ первое условие, вообще говоря, не вытекает из требования классической эллиптичности системы $2m$ нелинейных уравнений для вещественной вектор-функции $U = (\varphi_1, \dots, \varphi_m; \psi_1, \dots, \psi_m)$, $u_k = \varphi_k + i\psi_k$.

Подкласс квазилинейных эллиптических систем уравнений, представленных в форме (1) ($\mu^k = \mu^k(z,u)$, $k = 1,2$, $f \equiv 0$) и подчиненных требованию (ii) усиленной эллиптичности, был впервые введен в [12].

(iii) Условия на рост f и F: $\|f - f_0\| \le [\varepsilon_1 + \rho_1(|u|)] \cdot |u|$, $\|F - F_0\| \le [\varepsilon_2 + \rho_2(|u|,|v|)] \cdot |v|$, $f_0 = f(z,0,v) \neq 0$, $F_0 = F_0(z,u,0)$.

Здесь $\varepsilon_k = \varepsilon_k(\mu_0, q_0) > 0$, $k = 1,2$, — достаточно малые постоянные, $\rho_1(|u|) \to 0$ при $|u| \to \infty$, $\rho_2(|u|,|v|) \to 0$ при $|v| \to \infty$ для любой величины $|u| < \infty$.

Замечание 4 (об условиях роста). Предположения о малости постоянных ε_1 и ε_2, отвечающих за первый порядок роста f и F соответственно по u и v, диктуется тем соображением, что даже простейшее линейное уравнение с ограниченными коэффициентами

$$w_{\bar{z}} = A(z)w + B(z), \quad w = (w_1, w_2),$$

может не иметь ограниченных решений в конечной области D [4].

Отметим, что для изученных в [11] эллиптических систем второго порядка

$$\sum_{k,l=1}^{2} A_{kl}(x,y,\varphi)\varphi_{x_k x_l} + A(x,y,\varphi,\varphi_x,\varphi_y) = 0, \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m),$$

предположению (iii) соответствуют аналогичные условия невозможности роста A по φ_x, φ_y произвольного квадратичного порядка $|\varphi_x|^2 + |\varphi_y|^2$ [11, с. 488].

Замечание 5 (о характере нелинейностей). Коэффициенты уравнений (1) и соответствующие им коэффициенты диффузионных уравнений в п. 1 зависят от производных искомых компонент u_k, $k = \overline{1,m}$, т. е. от градиентов концентраций $u_1, \dots, u_{m-1}$ и температуры u_m. Уравнение для температуры u_m, в котором коэффициент теплопроводности зависит от ∇u_m, описывает процессы с конечной скоростью распространения тепловых возмущений [4, с. 91]. Аналогичные соображения используются и при рассмотрении уравнений для концентраций u_k, $k = \overline{1,m-1}$, с коэффициентами диффузии, зависящими от ∇u_k (нелинейный закон Фика [3]).

5. Задача Гильберта. Построим решение $u(z) = (u_1, \dots, u_m)$ нелинейного уравнения (1) в круге $K : |z| < 1$, удовлетворяющее на его границе краевому условию Гильберта

$$\mathrm{Re}[G(t)u(t)] = g(t), \quad |t| = 1.$$

Будем предполагать невырожденную матрицу $G(t)$ размера $m\times m$ и вектор $g(t)$ трижды непрерывно дифференцируемыми. Тогда заменой искомой функции $u(t)$ граничное условие приводится к виду

$$\mathrm{Re}(t^{n_k}w_k)=0,\quad w=(w_1,\dots,w_m),\quad k=\overline{1,m},$$

где новая функция $w(z)$ удовлетворяет уравнению вида (1). Целые числа $-n_k$ называют *частными индексами задачи Гильберта*, при этом предполагается, что n_k либо все отрицательны, либо все неотрицательны. Если $n_k<0$ (частный индекс $-n_k>0$), то сформулированное условие Гильберта приводится к условию Дирихле

$$\mathrm{Re}\,\omega_k(t)=0,\quad |t|=1,\ \omega_k=z^{n_k}w_k\sum_{i=0}^{n_k}(c_iz^i+\bar c_iz^{-i}),$$

где c_i — произвольные комплексные постоянные, при этом вектор-функция $\omega(z)=(\omega_1,\dots,\omega_m)$ удовлетворяет уравнению, полностью аналогичному (1). Поэтому без нарушения общности будем считать, что решение $u(z)=(u_1,\dots,u_m)$ уравнения (1) удовлетворяет следующей задаче Гильберта:

$$\mathrm{Re}[t^{n_k}u_k(t)]=0,\quad |t|=1,\ n_k\ge 0,\ k=\overline{1,m}. \tag{3}$$

Поскольку частные индексы $-n_k$ неположительны, то к (3) необходимо добавить некоторые условия разрешимости на компоненты u_k искомого вектора, которые будут сформулированы ниже.

Пусть $\rho(z)\in C^2(\overline{K})$ — вещественная срезающая функция: $\rho=1$ при $|z|=r\in[0,1-\delta]$, $\rho=0$ при $r\in[1-\delta/2,1]$, $0<\delta\ll 1$, $\rho(z)\le 1$.

Рассмотрим вспомогательное уравнение (1) с коэффициентами $\mu^i_\delta=\rho\mu^i$, $i=1,2$, $f_\delta=\rho f$. Опустим пока индекс δ в обозначениях коэффициентов, считая, что $\mu^i=f=0$, $i=1,2$, при $|z|=r\in[1-\delta/2,1]$. В этих условиях искомый вектор $u(z)$ является голоморфным ($u_{\bar z}=0$) вблизи границы $\partial K:|z|=1$.

Поэтому условия разрешимости на $u_k(z)$ имеют вид

$$\int_0^{2\pi}t^{-s}u_k(t)\,d\gamma=0,\ s=\overline{0,n_k},\ n_k>0;\quad \mathrm{Im}\,u_k(1)=0,\ n_k=0. \tag{4}$$

Если некоторая функция $w(z)$ голоморфна в окрестности $|z|=1$ и $\mathrm{Re}\,w(z)=0$, $|z|=1$, то $\mathrm{Re}(izw_z)=0$. Следовательно, из (3) вытекает граничное условие для вектора $v=u_z$:

$$\mathrm{Re}(t^{n_k+1}iv_k)=c_k\equiv n_k\,\mathrm{Im}(t^{n_k}u_k),\quad |t|=1,\quad k=\overline{1,m}. \tag{5}$$

Введем потенциальные операторы

$$T_0(g|z)=T(g|z)-T(g|1),\quad Tg=-\frac{1}{\pi}\iint_K\left[\frac{g(t)}{t-z}+\frac{z\bar g(t)}{1-\bar tz}\right]dK_t,$$

$$T_n(g|z)=-\frac{1}{\pi}\iint_K\left[\frac{g(t)}{t-z}+\frac{\bar t^{-2n-1}\bar g(t)}{1-\bar tz}\right]dK_t,\quad n>1,\ g(z)\in L_p(K),\ p>1.$$

Операторы T_ng, $n\ge 0$, обладают свойствами

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}(T_ng)=g,\quad \frac{\partial}{\partial z}(T_ng)\equiv S_ng;\quad \|S_ng\|_p\le\lambda_n(p)\|g\|_p,$$

$\lambda_n(p)$ — непрерывная функция и $\lambda_n(2) = 1$, $\|g\|_p = (\iint\limits_K |g|^p dK_t)^{1/p}$ — норма элемента в $L_p(K)$, $p > 1$.

По построению функции $u_k = T_0 g_k$, $g_k \in L_p(K)$, $p > 1$, удовлетворяют задаче Дирихле

$$\operatorname{Re} T_0(g_k|e^{i\gamma}) = \operatorname{Im} T_0(g_k|1) = 0, \quad \gamma \in [0, 2\pi],$$

соответствующей $n_k = 0$ в (3), (4). Функции $u_k = T_{n_k} g_k$, $g_k \in L_p(K)$, $p > 1$, при $n_k \geq 1$ удовлетворяют (3) только при выполнении условий (4), которым можно придать следующую форму:

$$\iint\limits_K [g_k(t)t^{s-1} + \bar{g}_k(t)\bar{t}^{2n_k - s - 1}]\, dK_t = 0, \quad s = \overline{1, n_k}. \tag{4*}$$

Рассмотрим теперь многокомпонентные операторы

$$Tg = (T_{n_1} g_1, \ldots, T_{n_m} g_m), \quad Sg = (S_{n_1} g_1, \ldots, S_{n_m} g_m),$$

переводящие каждый вектор $g = (g_1, \ldots, g_m) \in \mathbb{C}^m$ в векторы той же размерности: $Tg \in C^m$, $Sg \in \mathbb{C}^m$. Определяя норму векторов $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ в любом банаховом пространстве B стандартным образом:

$$\|\Phi\|_B = \left(\sum_1^m \|\Phi_k\|_B^2 \right)^{1/2},$$

получим

$$\|Tg\|_{1,p} \leq M\|g\|_p, \quad \|Sg\|_p \leq \lambda(p)\|g\|_p, \quad \lambda(2) = 1,$$

где $\|f\|_{1,p} = \|f\|_{W_p^1}$.

6. Разрешимость квазилинейной задачи. Пусть $\Phi(u) \equiv \Phi(u, \bar{u}) \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}^m$, — комплекснозначная вектор-функция. Отметим, что всюду для краткости использовалось обозначение $\Phi(u)$ для функций $\Phi(u, \bar{u})$ двух комплексных переменных $(u, \bar{u})$.

Рассмотрим приращение

$$\Phi(u, \bar{u}) - \Phi(0, 0) = \Delta_u \Phi + \Delta_{\bar{u}} \Phi, \ \Delta_u \Phi = \Phi(u, \bar{u}) - \Phi(0, \bar{u}), \ \Delta_{\bar{u}} \Phi = \Phi(0, \bar{u}) - \Phi(0, 0).$$

С помощью конструкции, примененной в [22] для вещественных вектор-функций $g(x) \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $g = (g_1, \ldots, g_m)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, легко устанавливаются следующие формулы конечных приращений:

$$\Delta_u \Phi = \frac{D\Phi}{Du}(\theta^1 u, \bar{u}) \cdot u, \quad \Delta_{\bar{u}} \Phi = \frac{D\Phi}{D\bar{u}}(0, \theta^2 \bar{u}) \cdot \bar{u}, \quad \theta^k = \{\theta_{ij}^k\}, \ |\theta_{ij}^k| \leq 1, \ k = 1, 2.$$

Применим эти формулы к разности $(f - f_0) = f(z, u, \bar{u}, v) - f(z, 0, 0, v)$:

$$f - f_0 = \frac{Df}{Du}(z, \theta^1 u, \bar{u}, v) \cdot u + \frac{Df}{D\bar{u}}(z, 0, \theta^2 \bar{u}, v) \cdot \bar{u},$$

и положим $\frac{Df}{Du} = f^1 + g^1$, $\frac{Df}{D\bar{u}} = f^2 + g^2$ (f определена в (1)).

Выберем $f^k(z, u, v)$, $g^k(z, u, v)$, $k = 1, 2$, согласованно с предположениями (iii). Пусть $E_0 = \{z \mid |u(z)| > \nu > 1\}$, $K_0 = K \setminus E_0$, где $\nu = \nu(\varepsilon_1)$ зафиксируем позднее вместе с $\varepsilon_1 > 0$.

Отнесем в f^1 и f^2 значения матриц $\frac{Df}{Du}$ и $\frac{Df}{D\bar{u}}$ на множестве E_0, а в g_k — их значения на K_0 и потребуем, чтобы $\|f^k\| \le 2\varepsilon_1$. Последнее возможно в силу (iii) при достаточно большом $\nu \gg 1$. При этом по построению имеем $\|g^k\| \le M(\varepsilon_1) < \infty$, $k = 1, 2$.

Подставим в коэффициенты уравнения (1) произвольно фиксированные функции $v = v_1(z) \in L_1(K)$ и $u = u_0(z) \in W_p^1(K)$ ($p > 2$ выберем позже) и рассмотрим полученное линейное уравнение

$$L_0 u \equiv u_{\bar z} - \left(\mu_0^1 u_z + \mu_0^2 \bar{u}_{\bar z} + f_0^1 u + f_0^2 \bar{u} + f_0^0\right) = 0,$$

где $f_0^0 = f_{00} + g_0^1 u_0 + g_0^2 \bar{u}_0$ и $\Phi_0 = \Phi(z, u_0, v_1)$, $\Phi_{00} = \Phi(z, 0, 0)$ для любой функции $\Phi(z, u, v)$.

Будем искать решение задачи Гильберта (1), (3) в виде $u = T\varphi$. В результате подстановки в линеаризованное уравнение $L_0 u = 0$ функции $u = T\varphi$, $\varphi \in L_p(K)$, $p > 2$, приходим к следующему интегральному уравнению для $\varphi(z)$:

$$\varphi - \Lambda_0\varphi = f_0^0; \quad \Lambda_0\varphi = \mu_0^1 S\varphi + \mu_0^2 \overline{S\varphi} + f_0^1 T\varphi + f_0^2 \overline{T\varphi}. \tag{6}$$

Согласно свойствам операторов T и S с учетом условий (ii), (iii) имеем

$$\|\Lambda_0\varphi\|_p \le \lambda_0(p)\|\varphi\|_p, \quad \lambda_0 = \mu_0\lambda(p) + \varepsilon M(p) < 1. \tag{7}$$

Выберем $p > 2$ и $\varepsilon = 4\varepsilon_1$ из условия $\lambda_0 < 1$ в (7). Для этого, например, положим $\lambda(p) = (1+\mu_0)(2\mu_0)^{-1} > 1$ ($\mu_0 < 1$) и в силу монотонности $\lambda(p) = \|S\|_p$ по p найдем $p > 2$ ($\lambda(2) = 1$). Затем выберем $\varepsilon = (4M)^{-1}(1-\mu_0) > 0$ и вычислим $\lambda_0 = (1/4)(3+\mu_0) < 1$. Тогда согласно оценке (7) с $\lambda_0 < 1$ линейный оператор Λ_0 является сжимающим в $L_p(K)$ с выбранным выше $p > 2$. Обозначим через I тождественное преобразование и обратим оператор $(I - \Lambda_0)$ в (6) :

$$\varphi = (I - \Lambda_0)^{-1} f_0^0 \equiv Q_0 \circ T\varphi_0, \tag{8}$$

где $u_0 = T_0\varphi_0$, $\varphi_0 \in L_p(K)$, а $p > 2$ определено выше. Поскольку $\varepsilon_1 > 0$ выбрано, то зафиксировано и $\nu(\varepsilon_1) > 1$. Следовательно, f_0^0 равномерно ограничено, т. е. $\|f_0^0\| \le M$, и из представления (8) получим, что $\|\varphi\|_p \le M_0$.

В силу гладкости коэффициентов μ^i, f^i, $i = 1, 2$, уравнения (1) по u оператор $(I - \Lambda_0)^{-1}$ непрерывен по $u_0 = T\varphi_0$ и тем самым оператор $(Q_0 \circ T)$ в (8) вполне непрерывен в $L_p(K)$, $p > 2$.

Таким образом, преобразование $\varphi = (Q_0 \circ T)\varphi_0$ согласно теореме Шаудера имеет по крайней мере одну неподвижную точку $\varphi = \varphi_0 \in L_p(K)$, $p > 2$.

Отметим, что вектор-функция $u = T\varphi = (T_{n_1}\varphi_1, \dots, T_{n_m}\varphi_m)$ удовлетворяет граничному условию (3) лишь при выполнении соотношений (4*) для $g_k = \varphi_k$.

Подставим теперь в коэффициенты μ_0^i, f_0^i, $i = 1, 2$, и f_0^0 уравнения (6) функции $v = v_1$ и $T\varphi_0 = T\varphi = u$ и, пользуясь равенствами $\varphi = \frac{\partial}{\partial \bar z} T\varphi = u_{\bar z}$, $S\varphi = \frac{\partial}{\partial z} T\varphi = u_z$, получим следующее квазилинейное уравнение для $u(z)$:

$$u_{\bar z} = \mu_1^1 u_z + \mu_1^2 \bar{u}_{\bar z} + f_1^1 u + f_1^2 \bar{u} + f_1^0, \tag{9}$$

где $\mu_1^i = \mu^i(z, u, v_1)$, $f_1^i = f^i(z, u, v_1)$, $i = 1, 2$, $f_1^0 = f^0(z, u, v_1)$. Итак, доказана разрешимость квазилинейной задачи (3), (9).

Теорема 1. *Пусть выполняются предположения* (i)–(iii) *и в коэффициенты уравнения* (1) *подставлена фиксированная вектор-функция* $v = v_1(z) \in L_1(\overline{K})$. *Тогда существует по крайней мере одно решение* $T\varphi = u(z) \in W_p^1(\overline{K})$,

$p > 2$, *полученного квазилинейного уравнения* (9), *удовлетворяющее задаче Гильберта* (3) *при выполнении* $n = \sum_{k=1}^{m} n_k$ *условий разрешимости* (4^*).

Замечание 6. Частные результаты для квазилинейного уравнения (9) доказаны в работе [12] при $f_0^k \equiv 0$, $k = 0, 1, 2$, а в [16] — при $f_0^k \equiv 0$, $k = 1, 2$, и в предположении, что $\sup_u \|f_0^0\|_p < \infty$, $p > 2$.

7. Нелинейная задача. Предположим, что найдено решение $u(z) = T\varphi$, $\varphi \in L_p(K)$, $p > 2$, задачи Гильберта (3) для нелинейного уравнения (1). Тогда функция $v(z) \equiv u_z$является решением задачи Гильберта (5) для уравнения (2).

Рассмотрим голоморфный вектор $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_m)$, компоненты $\Psi_k(z)$ которого удовлетворяют однозначно разрешимой задаче Гильберта:

$$\operatorname{Re} \Psi_k(t) = c_k(t), \ |t| = 1, \quad \operatorname{Im}[\Psi_k(1) - iu_{kz}(1)] = 0,$$

где функции $c_k(t)$ определены в (5).

Пусть $\eta(z) \in C^2(\overline{K})$ — вещественная срезающая функция:

$$\eta = 1 \quad \text{при } |z| = r \in [\delta_1, 1], \quad \eta = 0 \quad \text{при } r \in [0, \delta_1/2], \quad 0 < \delta_1 < 1/4.$$

Тогда вектор $\Phi(z) \in C^2(\overline{K})$,

$$\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m), \quad \Phi_k(z) = -iz^{-n_k - 1}\eta(z)\Psi_k(z), \quad k = \overline{1, m}, \tag{10}$$

по построению удовлетворяет задаче Гильберта (5).

Представим аналогично п. 6 $F(z, u, v)$ в виде

$$F = F_0 + \frac{DF}{Dv} \cdot v + \frac{DF}{D\bar{v}} \cdot \bar{v} \equiv F^0 + F^1 v + F^2 \bar{v}, \quad F_0 = F(z, u, 0).$$

Здесь $\|F^k\| \leq 2\varepsilon_2$ при $\|v\| \geq \nu_0(\varepsilon_2) \gg 1$, $k = 1, 2$, $F^0 = F_0 + G^1 v_0 + G^2 \bar{v}_0$, $\|F^0\| \leq M(\varepsilon_2) < \infty$ при произвольном v_0, $|v_0| < \infty$.

Рассмотрим линейное уравнение

$$Nv \equiv v_{\bar{z}} - \left(q_0^1 v_z + q_0^2 \bar{v}_{\bar{z}} + F_0^1 v + F_0^2 \bar{v} + F_0^0\right) = 0,$$

где для любой функции $P(z, u, v)$, $P_0 = P(z, u_0, v_0)$, $u_0 = T\varphi$ — решение задачи (1), (3).

Будем искать решение уравнения $Nv = 0$ в виде

$$v(z) = T^0\psi + \Phi(z), \quad T^0\psi = -i(T_{n_1+1}\psi_1, \dots, T_{n_m+1}\psi_m), \quad S^0\psi = \frac{\partial(T^0\psi)}{\partial z}.$$

Здесь $(\psi_1, \dots, \psi_m) = \psi(z) \in L_p(\overline{K})$, $p > 2$, — искомый вектор, а $\Phi(z)$, определенная в (10), удовлетворяет граничному условию Гильберта (5).

Подстановкой $v = T^0\psi + \Phi$ в (2) получим следующее интегральное уравнение для $\psi(z)$:

$$\psi - \Lambda^0\psi = F_0^0, \quad \Lambda^0\psi = q_0^1 S^0\psi + q_0^2 \overline{S^0\psi} + F_0^1 T^0\psi + F_0^2 \overline{T^0\psi}. \tag{11}$$

Вычислим норму оператора Λ^0 в (11):

$$\|\Lambda^0\psi\|_p \leq [q_0\lambda(p) + 4\varepsilon_2 M]\|\psi\|_p \equiv \lambda_0\|\psi\|_p,$$

и выберем $p > 2$ и $\varepsilon_2 \ll 1$ из условия $\lambda_0 < 1$ (см. п. 6).

Тогда по теореме Шаудера, как и в п. 6, существует неподвижная точка $\psi = \psi_0 \in L_p(\overline{K})$ оператора $(I - \Lambda^0)^{-1} F_0^0$, которой отвечает решение $v = T^0\psi + \Phi$ квазилинейного уравнения

$$v_{\bar{z}} = B(z, u_0, v), \quad u_0 = T\varphi_0.$$

Отметим, что согласно (iii) постоянная в оценке $\|\psi\|_p \le N$ зависит от $\|u_0\| = \|T\varphi_0\| \le M$.

Построим решение $u = T\varphi$, $\varphi \in L_p(\overline{K})$, $p > 2$, уравнения (1), в правую часть которого подставлено $V = T^0\psi + \Phi$:

$$u_{\bar{z}} = A(z, u, V), \quad \|A\| \le M_1 \|V\| \le M_2.$$

Аналогично предыдущему с помощью теоремы Шаудера устанавливается существование решения $\varphi(z)$, $\|\varphi\|_p \le M$, функционального уравнения $\varphi = A(z, T\varphi, V)$ и тем самым определяется искомый вектор $u(z) = T\varphi$. В результате этих построений доказана разрешимость распадающейся системы уравнений

$$u_{\bar{z}} = A(z, u, V), \quad v_{\bar{z}} = B(z, U, v).$$

Здесь $(U, V) \in \Omega \subset W_p^1(\overline{K})$, $p > 2$, — произвольные вектор-функции, подчиняющиеся полученным выше априорным оценкам для $u = T\varphi$ и $v = T^0\psi + \Phi$:

$$\Omega = \{u, v \mid \|u, v\|_{1,p} \le \overline{M},\ p > 2\}. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь квазилинейную систему уравнений (1), (2) относительно вектора (u, v) и заметим, что его компонента $u(z)$ по построению удовлетворяет нелинейному уравнению (1). Чтобы обеспечить выполнение граничных условий (3), (5) для (u, v), достаточно представить (1), (2) в следующей форме:

$$u = TA \equiv H_1(u, v), \quad v = T^0(B - \Phi_{\bar{z}}) + \Phi \equiv H_2(u, v). \tag{13}$$

Действительно, дифференцирование по $\bar{z}$ соотношений (13) приводит к (1), (2), причем вектор-функция $u = TA$ удовлетворяет (3) при выполнении условий (4), а $v = u_z$ автоматически подчиняется граничному условию (5). Напомним, что для известных $u(z)$ и $v(z)$ условия (4) эквивалентны (4*) для $g(z) = A[z, u(z), v(z)]$. Оператор $(H_1, H_2) \equiv H(u, v)$ в (13) преобразует $(u, v) \in W_p^1(\overline{K})$ в вектор $H(u, v) \in W_p^2(\overline{K})$ и, следовательно, является вполне непрерывным в $W_p^1(\overline{K})$. Поскольку по построению $H(\Omega) \to \Omega$, система уравнений (13) имеет по крайней мере одно решение $(u, v) \in \Omega \subset W_p^1(\overline{K})$.

По доказанному $u_z = v(z) \in W_p^1(\overline{K})$, откуда вытекает, что $u \in W_p^2(\overline{K})$, $p > 2$.

Следует еще отметить, что оценка $\|u\|_{2,p} = \|u\|_{W_p^2} \le M$ не зависит от параметра $\delta > 0$ срезки $\rho(z)$, введенной в п. 5, и поэтому без нарушения общности можно положить $\delta = 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* (i)–(iii). *Тогда существует по крайней мере одно решение* $u = T\varphi \in W_p^2(\overline{K})$, $p > 2$, *нелинейного уравнения* (1), *которое при выполнении* $n = \sum_{k=1}^{m} n_k \ge 0$ *условий разрешимости* (4*) *удовлетворяет краевому условию* (5).

8. Слабо нелинейные системы. Как указано в замечании 2, условие на рост $f(z, u, v)$ в (iii) вызвано существом дела — есть примеры, подтверждающие его необходимость. Условие на порядок роста $F(z,u,v)$ в (iii) продиктовано в основном потребностью получения априорной оценки $\|u_z\|_{1,p} \le M$, обеспечивающей компактность нелинейного оператора в (6) для $\varphi = u_{\bar z}$: $\varphi = A(z, T\varphi, S\varphi)$.

Чтобы поднять гладкость решения $u(z)$ уравнения (1), не обращаясь к производному уравнению (2) для $v = u_z$, и тем самым освободиться от ограничения на рост F в (iii), сделаем дополнительные предположения.

(iv) Условия слабой нелинейности A и ограничения роста f:

(a) $\|D_v(\mu^k_{ij}, f_i), D_{\bar v}(\mu^k_{ij}, f_i)\| \le \varepsilon \ll 1$;

(b) $\|f - f_0\| \le [\varepsilon_1 + \rho(|u|)]|u|$, $\rho \to 0$ при $|u| \to \infty$, $\varepsilon_1 \ll 1$.

Предположения (iv) (b) полностью совпадают с соответствующим ограничением в (iii). Поэтому сохраняются доказанная в п. 6 разрешимость квазилинейного уравнения (9) и априорная оценка его решения $u(z)$, $\|u\|_{1,p} \le M$.

Подставим в коэффициенты (9) произвольные функции $u_0(z)$, $\|u_0\|_{1,p} \le M$, и $v_1(z)$, $\|v_1\|_{1,p} \le N$ (константа N фиксируется позднее) и рассмотрим полученное линейное уравнение (9), в котором

$$\mu^k_1(z) \equiv \mu^k[z, u_0(z), v_1] \in C^\alpha(\overline{K}), \quad k = 1, 2,$$

$$f^i_1(z) \equiv f^i[z, u_0(z), v_1] \in C^\alpha(\overline{K}), \quad i = 0, 1, 2,$$

где показатель Гёльдера $\alpha = (p-2)/p$ соответствует вложению $W^1_p(\overline{K}) \subset C^\alpha(\overline{K})$, $p > 2$.

Рассмотрим круг $K_\nu : |z - z_0| < \nu$, $K_\nu \subset K$, с центром в произвольной точке z_0, радиус которого будет выбран ниже. Введем срезающую вещественную функцию $\xi = \xi(z) \in C^2(\overline{K}_\nu)$, полагая $\xi = 1$ при $|z - z_0| \equiv r \in [\delta_0, 1 - \delta_0]$; $\xi = 0$ при $r \notin R_\delta \equiv [\delta_0/2, 1 - \delta_0/2]$, $\delta_0 \ll 1$. Умножим обе части уравнения (9) на $\xi(z)$ и преобразуем его к виду

$$h_{\bar z} = \mu^1_\nu(z) h_z + \mu^2_\nu(z) \bar h_{\bar z} + f_\nu(z), h = \xi(z) u(z), \tag{14}$$

$$\mu^i_\nu = \mu^i_1(z), \quad f_\nu = \xi\big[f^1_1 u + f^2_1 \bar u + f_1\big] + \xi_{\bar z} u - \mu^1_1 \xi_z u - \mu^2_1 \xi_{\bar z} \bar u,$$

$\big(\mu^1_\nu, \mu^2_\nu, f_\nu\big) \in C^\alpha(\overline{K}_\nu)$, $\alpha = (p-2)/p > 0$. Поскольку $h = \xi = \xi_z = \xi_{\bar z} = 0$ при $|z - z_0| \notin R_\delta$, можно считать, что и $\big(\mu^1_\nu, \mu^2_\nu, f^\nu\big) = 0$ при $|z - z_0| \notin R_\delta$.

Введем новую независимую переменную $\zeta = (z - z_0)$ и, не меняя обозначений, будем полагать $\big(h, \mu^1_\nu, \mu^2_\nu, f_\nu\big)$ заданными функциями переменного ζ в круге $K_\nu : |\zeta| < \nu$.

Представим вектор-функцию $h(\zeta) = \xi(\zeta) u(\zeta)$, $|\zeta| < \nu$, в виде $h = T^\nu g$, где T^ν — оператор T, взятый по кругу K_ν, и пусть $S^\nu g = (\partial T^\nu g)/\partial \zeta$. После подстановки $h = T^\nu g$ в (14) получим интегральное уравнение для $g(\zeta)$

$$g - \Lambda_\nu g = f_\nu, \quad \Lambda_\nu g = \mu^1_\nu S^\nu g + \mu^2_\nu \overline{S^\nu g}, \tag{15}$$

решение которого будем искать в банаховом пространстве $C^\alpha(\overline{K}_\nu)$, где $\alpha = (p-2)/p > 0$.

Примем следующие обозначения норм элементов $\varphi(\zeta)$ в $C^\alpha(\overline{D})$, $\alpha \in [0,1]$, и $C^{1+\alpha}(\overline{D})$, $\alpha \in (0,1]$:

$$\varphi \in C(\overline{D}) : \|\varphi\|_D = \sup_D |\varphi(z)|;$$

$$\varphi \in C^\alpha(\overline{D}), \alpha \in (0,1] : H^\alpha(\varphi, D) = \sup_{(z,\zeta) \in \overline{D}} \frac{|\varphi(z) - \varphi(\zeta)|}{|z - \zeta|^\alpha},\ \|\varphi\|^{(\alpha)}_D = \|\varphi\|_D + H^\alpha(\varphi, D);$$

$$\varphi \in C^{1+\alpha}(\overline{D}), \alpha \in (0,1] : \|\varphi\|_D^{(1+\alpha)} = \|\varphi\|_D + \|\varphi_z, \varphi_{\bar z}\|_D^{(\alpha)}.$$

Индекс D в обозначениях норм, как правило, опускается.

Сингулярные операторы S^ν являются ограниченными в $C^\alpha(\overline{K}_\nu)$, $\alpha \in (0,1)$, причем

$$\|S^\nu g\| \le M\nu^\alpha \|g\|^{(\alpha)}, \quad H^\alpha(S^\nu g) \le M\|g\|^{(\alpha)},$$

где M зависит только от α, $\alpha \in (0,1)$ [13].

Поскольку $\mu_\nu^k(0) = 0$, то

$$\left\|\mu_{\nu ij}^k(\zeta) - \mu_{\nu ij}^k(0)\right\| \le M_0\nu^\alpha, \quad H^\alpha(\mu_\nu^i) \le M_0.$$

Следовательно, с учетом приведенных выше оценок для $S^\nu g$ находим

$$\left\|\mu_\nu^i S^\nu g\right\|^{(\alpha)} \le \left\|\mu_\nu^i\right\| H^\alpha(S^\nu g) + \left\|\mu_\nu^i\right\|^{(\alpha)} \|S^\nu g\| \le M_1\nu^\alpha \|g\|^{(\alpha)}.$$

Тогда для Λ_ν в (15) имеем

$$\|\Lambda_\nu g\|^{(\alpha)} \le 2M_1\nu^\alpha \|g\|^{(\alpha)} \equiv (1/2)\|g\|^{(\alpha)}, \quad \nu = (4M_1)^{-1/2},$$

т. е. при выбранном ν линейный оператор Λ_ν является сжимающим в $C^\alpha(\overline{K}_\nu)$, $\alpha = (p-2)/p > 0$. Постоянные M_0 и M_1 зависят от $\left\|f_1^k, \mu_1^k\right\|^{(\alpha)}$ и тем самым от N, $N > \|v_1\|_{1,p}$, $p > 2$. Исключим эту зависимость. В силу (i), (ii) и оценки $\|u_0\|_{1,p} \le M$ получим

$$\left\|\mu_1^k, f_1\right\|^{(\alpha)} \le M_2 \quad \text{при } v_1 \equiv 0, \quad k = 1,2.$$

Зафиксируем $N < \infty$ и выберем $\varepsilon = \varepsilon(N) \ll 1$ в (iv) из условия

$$\left\|\mu_1^k, f_1\right\|^{(\alpha)} \le 2M_2 \quad \text{при } \|v_1\|_{1,p} \le N,$$

что, очевидно, возможно.

В результате такого выбора $\varepsilon(N)$ постоянные M_0, M_1 в оценках норм оператора Λ_ν и вектора f_ν в (15) не зависят от N.

Итак, существует единственное решение $(I - \Lambda_\nu)^{-1} f_\nu = g(\zeta) \in C^\alpha(\overline{K}_\nu)$, $\alpha > 0$ уравнения (15), при этом в кольце $\delta_0 \le |\zeta| = |z - z_0| \le 1 - \delta_0$, $0 < \delta_0 \ll 1$, будет $h(z - z_0) \equiv u(z)$, где $u(z)$ — решение уравнения (9). Так как точка $z_0 \in K$ произвольна, решение уравнения (9) $u(z)$ принадлежит $C^{1+\alpha}(\overline{K}^\delta)$, K^δ: $|z| < 1 - \delta_0$, $\alpha = (p-2)/p > 0$, причем в $\overline{K}^\delta$ имеет место равномерная оценка

$$\|u(z)\|^{(1+\alpha)} \le N_1, \quad \alpha = \frac{p-2}{p} > 0. \tag{16}$$

Докажем справедливость (16) в замкнутом круге $\overline{K}$: $|z| \le 1$. Для этого выберем произвольную точку t_ν, $|t_\nu| = 1$, и рассмотрим дугу окружности $\Gamma \subset \partial K$, Γ: $|t - t_\nu| < \delta_0/4$, $|t| = 1$.

Из точек t_0, $|t_0 - t_\nu| < \delta_0/4$, $|t| = 1$, проведем кривую $L_0 \subset K$ так, чтобы $\partial D = (\Gamma \cup L_0) \in C^2$ и диаметр $|D|$ области $D \subset K$ находился в пределах $\delta_0/4 \le |D| \le \delta_0/2$. Затем из точек t_k, $|t_k - t_\nu| = \frac{\delta_0}{8k}$, $|t_k| = 1$, $k = 1,2$, проведем кривые $L_k \subset K$ на расстоянии $|(L_k, L_{k+1})| = \frac{\delta_0}{8}$, $k = 0,1$. Области, ограниченные кривыми $\partial D_{k+1} = (L_k \cup L_{k+1} \cup \Gamma_{k+1})$, $k = 0,1$, $\Gamma_k \subset \partial D$, Γ_k: $\frac{\delta}{8k} < |t - t_\nu| < \frac{\delta}{4k}$, $k = 1,2$, обозначим через $D_k \subset D$, $k = 1,2$. Введем вещественную срезающую функцию $d(z) \in C^2(\overline{D})$: $d = 1$ при $z \in D \setminus (D_1 \cup D_2) \equiv D_0$ и $d = 0$ при $z \in D_1$. Рассмотрим в области $D \subset K$ вектор $w(z) = (w_1, \ldots, w_m)$ с компонентами

$w_k(z) = -iz^{-n_k}\, d(z)u_k(z)$, удовлетворяющими уравнению вида (1) с гладкими коэффициентами и граничному условию Дирихле

$$\operatorname{Re} w_k(\tau) = 0, \quad \operatorname{Im} w_k(t_\nu) = \operatorname{Re} u_k(t_\nu), \quad \tau \in \partial D.$$

Тогда аналогично предыдущему получим, что $w_k(z) \in C^{1+\alpha}(\overline{D})$, и поскольку

$$w_k(z) = -iz^{-n_k} u_k(z), \quad z \in D_0,$$

то $\|u(z)\|^{(1+\alpha)} \leq N_2$, N_2 — абсолютная постоянная.

Ввиду произвольности точки t_ν, $|t_\nu| = 1$, справедливость (16) в круге $|z| \leq 1$ доказана.

Подставим в коэффициенты (2) произвольную функцию $u_*(z)$, $\|u_*\|^{(1+\alpha)} \leq N_1$, N_1 из (16), и рассмотрим линейное уравнение для $v(z)$:

$$Hv \equiv v_{\bar v} - \left(q_*^1 v_z + q_*^2 \bar v_{\bar z} + F_*\right) = 0.$$

Здесь $q_k(z, u_*, u_{*z}) \equiv q_*^k(z) \in C^\alpha(\overline{K})$, $k = 1, 2$, $F(z, u_*, u_{*z}) \equiv F_*(z) \in C^\alpha(\overline{K})$, $\alpha = 1 - 2/p > 0$.

Представим решение уравнения $Hv = 0$ в виде $v = T^0\psi + \Phi$ и вычислим $\psi(z)$:

$$\psi = (I - P_*)^{-1}\left(F_* + q_*^1 \Phi_z + q_*^2 \overline{\Phi}_{\bar z} - \Phi_{\bar z}\right), \quad \|\psi\|_p \leq N_0,$$

где $P_* = \left(q_*^1 S^0 + q_*^2 \overline{S^0}\right)$ — сжимающий оператор в $L_p(\overline{K})$, $p > 2$.

Тогда $(T^0\psi + \Phi) = v(z) \in W_p^1(\overline{K})$, $p > 2$, и, в частности, $\|v\| \leq N$. Эта оценка $\|v\|$ позволяет окончательно выбрать постоянную $\varepsilon = \varepsilon(N)$ в условии (iv).

Полученные оценки $u(z)$, $v(z)$ в $W_p^1(\overline{K})$, $p > 2$, означают, что $(u, v) \in \Omega \subset W_p^1(\overline{K})$, Ω определено в (12). Следовательно, согласно теореме 2 существует решение $u(z) = T\varphi \in W_p^2(\overline{K})$, $p > 2$, нелинейного уравнения (1).

Применяя теперь построения из доказательства оценки (16) к решению $v(z) \in W_p^1(\overline{K})$, $p > 2$, уравнения $Hv = 0$, приходим к неравенству $\|v\|^{(1+\alpha)} \leq N_2$.

Таким образом, для решения $u(z)$ нелинейного уравнения (1) получена следующая оценка:

$$\|u, u_z, u_{\bar z}\|^{(1+\alpha)} \leq M, \quad \alpha = 1 - 2/p > 0. \tag{17}$$

Теорема 3. *Если коэффициенты нелинейного уравнения* (1) *подчиняются условиям* (i), (ii), (iv), *то для его решения* $u(z)$ *справедливы утверждения теоремы* 2 *и дополнительно выполняется неравенство* (17).

9. Пример нелинейного краевого условия. Пусть компоненты $u_k(z)$ решения $u = (u_1, \ldots, u_m)$ уравнения (1) на окружности $|t| = 1$ удовлетворяют нелинейному граничному условию

$$|u_k(t)| = r_k > 0, \quad |t| = 1, \quad k = \overline{1, m}. \tag{18}$$

Заданные постоянные r_k соответствуют величине потоков массы $u_k(t)$, $k = \overline{1, m-1}$, и тепла $u_m(t)$ через границу ∂K: $|t| = 1$ области диффузии K: $|z| < 1$. Без нарушения общности положим $r_k = 1$, $k = \overline{1, m}$, чего всегда можно добиться растяжением $u_k(z)$. Отметим, что условия (18) описывают также проблему построения квазиконформных отображений $u_k(z)$, $u_k : K \to K$, таким образом чтобы решение $u(z)$ однородного уравнения (1) переводило прямое произведение $K^m = K \times \cdots \times K$ кругов K: $|z| < 1$ в прямое произведение K^m в плоскости переменных $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $u : K^m \to K^m$.

Рассмотрим вспомогательное уравнение вида (1), в котором $\mu^i_\rho = \rho\mu^i$, $f_\rho = \rho f$, где $\rho(|z|) \in C^2(K)$ — вещественная срезающая функция, $\rho = 1$ при $|z| = r \in [\delta, 1-\delta]$ и $\rho = 0$ при $r \in [0, \delta/2] \cup [1-\delta/2, 1]$, $0 < \delta \ll 1$, $\rho(|z|) \leq 1$, индекс ρ в обозначениях коэффициентов опускается.

Продолжим по симметрии компоненты $u_k(z)$ через окружность $|z| = 1$ до функций, определенных при всех $z \in \mathbb{C}$ [13]. Коэффициенты полученного уравнения вида (1), очевидно, сохраняют гладкость указанных при $|z| < 1$ функций μ^1, μ^2, f, причем по построению $\mu^1 = \mu^2 = f \equiv 0$ при $|z| > 1/\delta$. Нормируем функции $u_k(z)$ условиями

$$u_k(0) = 0, \quad |u_{kz}(\infty)| = 1, \quad k = \overline{1, m},$$

и будем искать их в виде [13]

$$u_k = z + T_\delta g_k, \quad T_\delta g = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{K_\delta} \frac{zg(t)}{t(t-z)}\, dK_{\delta t}, \tag{19}$$

где $g_k(t) \in L_p(K_\delta)$, $p > 2$, — искомые функции, K_δ: $|z| < 1/\delta$. По построению $u_k(z)$ в форме (19) удовлетворяют (18) и введенным выше условиям нормировки, а для доказательства разрешимости задачи (1), (18) в круге K: $|z| < 1$ применимы методы, разработанные в предыдущих пунктах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рахматулин Х. А., Сагомонян А. Я., Бунимович А. Н., Зверев Н. Н.* Газовая динамика. М.: Высшая школа, 1965.
2. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1.
3. *Гиршфельдер Дж., Кертис У., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
4. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
5. *Боярский Б. В.* Теория обобщенного аналитического вектора // Ann. Pol. Math. 1966. V. 16. P. 281–320.
6. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.
7. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
8. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
9. *Вишик М. И.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Мат. сб. 1961. Т. 29, № 3. С. 615–676.
10. *Вольперт А. Н.* Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости // Тр. Моск. мат. о-ва. 1961. Т. 10. С. 41–87.
11. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
12. *Антонцев С. Н., Монахов В. Н.* Краевые задачи с разрывными граничными условиями для квазилинейных эллиптических систем $2m$ ($m \geq 1$) уравнений первого порядка // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1967. Т. 8, № 2. С. 65–73.
13. *Монахов В. Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977.
14. *Векуа И. Н.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970.
15. *Раенко Е. А.* Об однозначной разрешимости задачи Дирихле для квазианалитического вектора // Динамика сплошной среды. 2000. Вып. 116. С. 90–97.
16. *Раенко Е. А.* Краевые задачи для квази-голоморфного вектора // Динамика сплошной среды. 2001. Вып. 118. С. 65–70.
17. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

18. *Монахов В. Н.* Фильтрация жидкости со свободной границей в неидеальных пористых средах при нелинейном законе сопротивления // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 5. С. 1098–1101.
19. *Монахов В. Н.* Отображения многосвязных областей решениями нелинейных L-эллиптических систем уравнений // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220, № 3. С. 520–523.
20. *Монахов В. Н.* О принципе квазиконформного склеивания для нелинейных уравнений сильно эллиптических по М. А. Лаврентьеву // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, № 5. С. 1070–1074.
21. *Кучер Н. А.* Краевая задача Римана — Гильберта для одного класса нелинейных эллиптических систем на плоскости // Динамика сплошной среды. 1974. Вып. 18. С. 239–242.
22. *Монахов В. Н.* Об одном вариационном методе решения задач гидродинамики со свободными границами // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1106–1121.

Статья поступила 26 февраля 2003 г.

Монахов Валентин Николаевич
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
monakhov@hydro.nsc.ru