Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 517.984.54

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. И. Шестаков

Аннотация: Исследуется обратная спектральная задача для оператора Штурма — Лиувилля с кусочно постоянным коэффициентом $A(x)$ с разрывами в точках x_k, $k = 1, \dots, n$, и величинами скачков $A_k = A(x_k + 0)/A(x_k - 0)$. Показано, что если точки разрыва $x_1, \dots, x_n$ несоизмеримы, т. е. никакая их линейная комбинация с целыми коэффициентами не равна нулю, то спектральная функция данного оператора однозначно определяет все точки разрыва x_k и величины скачков A_k. Найден алгоритм, позволяющий находить величины x_k, A_k за конечное число шагов.

Ключевые слова: обратная задача, разрывные коэффициенты, операторы Штурма — Лиувилля, спектральная функция.

Введение

Классическая обратная спектральная задача Штурма — Лиувилля состоит в определении коэффициента $A(x)$ дифференциального оператора в пространстве $L_2(0, \infty)$, порожденного дифференциальным выражением

$$A^{-1}(x)\frac{d}{dx}\left(A\frac{du}{dx}\right)$$

с краевым условием

$$u'(0) = 0,$$

по его спектральной функции $\rho(\lambda)$, которая считается известной (см. [1–4]). При этом, как правило, предполагается, что коэффициенты таких операторов являются достаточно гладкими или по крайней мере непрерывными функциями. В то же время во многих прикладных вопросах возникают операторы с разрывными коэффициентами. До последнего времени вообще было неясно, в каких особенностях спектральной функции заложена информация о разрывах коэффициентов. В недавно опубликованной работе Д. Г. Шепельского [5] показано, что для оператора с кусочно-постоянным коэффициентом $A(x)$ с разрывами в точках $x_1 > \dots > x_n > 0$, действующего в пространстве функций с условиями на разрывах

$$u(x_k + 0) = u(x_k - 0), \quad u'(x_k + 0)A_k = u'(x_k - 0),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00–01–00912).

производная соответствующей спектральной функции имеет вид

$$\frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}}\ \frac{4^n \prod\limits_{k=1}^{n} A_k}{u_n^2(\lambda) + v_n^2(\lambda)}, \tag{1}$$

где

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}(\lambda) = [a_1 E + b_1 M(\alpha_1\sqrt{\lambda})]\dots[a_n E + b_n M(\alpha_n\sqrt{\lambda})]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_k = 2x_k, \quad a_k = A_k + 1, \quad b_k = A_k - 1, \quad M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Однако сам вопрос определения параметров $x_1, \dots, x_n$, $A_1, \dots, A_n$ так и остался открытым и решение его очевидно только в случае $n = 1$. В настоящей работе эта задача исследуется для $n \geq 2$. Показано, что если точки разрыва $x_1, \dots, x_n$ несоизмеримы, т. е. никакая линейная комбинация $x_1, \dots, x_n$ с целочисленными коэффициентами не равна 0, то выражение (1) единственным образом определяет параметры $x_1, \dots, x_n$, $A_1, \dots, A_n$.

1. Основная функция и ее структура

Разберемся сначала в структуре исходной формулы (1). Прежде всего заметим, что при $\lambda = 0$ имеем

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}(0) = \prod_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} 2A_k & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \prod\limits_{k=1}^{n} 2A_k \\ 0 \end{pmatrix}$$

и, значит,

$$u_n^2(0) + v_n^2(0) = 4^n \prod_{k=1}^{n} A_k^2.$$

Переходя к пределу в выражении для $\pi\sqrt{\lambda}\rho'(\lambda)$, получаем

$$\lim_{\lambda\to 0} \pi\sqrt{\lambda}\rho'(\lambda) = \frac{4^n \prod\limits_{k=1}^{n} A_k}{u_n^2(0) + v_n^2(0)} = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} A_k}.$$

Отсюда и из (1) сумма $u_n^2(\lambda) + v_n^2(\lambda)$ легко выражается через $\rho'(\lambda)$. В дальнейшем считаем эту сумму известной с точностью до множителя 4^n. Будем называть ее *основной функцией*, соответствующей исходному набору параметров $x_1, \dots, x_n$, $A_1, \dots, A_n$, и обозначать ее через $f(\lambda)$.

Для дальнейшей работы введем систему специальных обозначений. Рассмотрим множество мультииндексов $\vec{I}$, элементами которых являются числа 1, 0, -1, подчиненных следующему правилу: знаки ненулевых элементов $\vec{I}$ чередуются, а первый ненулевой элемент равен 1, т. е.

$$\vec{I} = (0, \dots, 0, 1, -1, 0, 0, 1, 0, -1, \dots).$$

Такие мультииндексы условно будем называть *подходящими* и через $\mathscr{M}_m$ будем обозначать множество всех подходящих мультииндексов длины m.

Для $\vec{I} = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathscr{M}_n$ положим

$$A(\vec{I}) = \prod_{k:i_k=0} a_k, \quad B(\vec{I}) = \prod_{k:i_k\neq 0} b_k. \tag{2}$$

В случае, когда $\vec{I} = 0$, будем предполагать, что $A(0) = a_1 \dots a_n$ при $n > 0$, $A(0) = 1$ при $n = 0$ и $B(0) = 1$.

Лемма 1. *Пусть* $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — *вектор с компонентами* $\alpha_k = 2x_k$. *Тогда*

$$u_n = \sum_{\vec{I} \in \mathscr{M}_n} A(\vec{I}) B(\vec{I}) \cos(\vec{I} \cdot \vec{\alpha}\mu), \quad v_n = \sum_{\vec{I} \in \mathscr{M}_n} A(\vec{I}) B(\vec{I}) \sin(\vec{I} \cdot \vec{\alpha}\mu), \tag{3}$$

где $\mu = \sqrt{\lambda}$.

Доказательство. Отметим, что в общем виде

$$[aE + bM(\theta)] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + bu\cos\theta + bv\sin\theta \\ av + bu\sin\theta - bv\cos\theta \end{pmatrix},$$

и соответственно запишем рекуррентные формулы для u_n, v_n:

$$u_{n+1} = a_1 u_n' + b_1 u_n' \cos\alpha_1\mu + b_1 v_n' \sin\alpha_1\mu,$$

$$v_{n+1} = a_1 v_n' + b_1 u_n' \sin\alpha_1\mu - b_1 v_n' \cos\alpha_1\mu.$$

Здесь u_n', v_n' построены так же, как и в исходной формуле (1), но при подстановке соответственно значений $a_k' = a_{k+1}$, $b_k' = b_{k+1}$, $\alpha_k' = \alpha_{k+1}$, $k = 1, \dots, n$.

Воспользуемся индукцией по n. Для $n = 0$ формулы (3) очевидны. Предположим, что формулы (3) верны при некотором n, тогда, в частности, они верны и для u_n', v_n', т. е.

$$u_n' = \sum_{\vec{I} \in \mathscr{M}_n} A'(\vec{I}) B'(\vec{I}) \cos\vec{I} \cdot \vec{\alpha}'\mu, \quad v_n' = \sum_{\vec{I} \in \mathscr{M}_n} A'(\vec{I}) B'(\vec{I}) \sin\vec{I} \cdot \vec{\alpha}'\mu,$$

где $\vec{\alpha}' = (\alpha_1', \dots, \alpha_n') = (\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})$, а $A'(\vec{I}), B'(\vec{I})$ построены по формулам (2) при подстановке значений $a_k' = a_{k+1},\ b_k' = b_{k+1},\ k = 1, \dots, n$. Тогда

$$\begin{aligned} u_{n+1} = &\sum_{I' \in \mathscr{M}_n} a_1 A(\vec{I}') B(\vec{I}') \cos\vec{I}' \cdot \vec{\alpha}'\mu \\ &+ \sum_{\vec{I}' \in \mathscr{M}_n} b_1 A(\vec{I}') B(\vec{I}') \cos\alpha_1\mu \cos\vec{I}' \cdot \vec{\alpha}'\mu + \sum_{\vec{I}' \in \mathscr{M}_n} b_1 A(\vec{I}') B(\vec{I}') \sin\alpha_1\mu \sin\vec{I}' \cdot \vec{\alpha}'\mu \\ &= \sum_{\vec{I}' \in \mathscr{M}_n} a_1 A(\vec{I}') B(\vec{I}') \cos\vec{I}' \cdot \vec{\alpha}'\mu + \sum_{\vec{I}' \in \mathscr{M}_n} b_1 A(\vec{I}') B(\vec{I}') \cos(\alpha_1 - \vec{I}' \cdot \vec{\alpha}')\mu. \end{aligned}$$

Перейдем к мультииндексам из $\mathscr{M}_{n+1}$ следующим образом. Заметим, что если $\vec{I} = (0, \vec{I}')$, то

$$\vec{I}' \cdot \vec{\alpha}' = \vec{I} \cdot \vec{\alpha}, \quad a_1 A'(\vec{I}') = A(\vec{I}), \quad B'(\vec{I}') = B(\vec{I}),$$

а если $\vec{I} = (1, -\vec{I}')$, то

$$\alpha_1 - \vec{I}' \cdot \vec{\alpha}' = \vec{I} \cdot \vec{\alpha}, \quad A'(\vec{I}') = A(\vec{I}), \quad b_1 B'(\vec{I}') = B(\vec{I}).$$

Поэтому

$$u_{n+1} = \sum_{\substack{\vec{I} = (0, \vec{I}') \\ \vec{I}' \in \mathscr{M}_n}} A(\vec{I}) B(\vec{I}) \cos\vec{I} \cdot \vec{\alpha}\mu + \sum_{\substack{\vec{I} = (1, -\vec{I}') \\ \vec{I}' \in \mathscr{M}_n}} A(\vec{I}) B(\vec{I}) \cos\vec{I} \cdot \vec{\alpha}\mu.$$

Нетрудно понять, что

$$\{\vec{I} = (0, \vec{I}') \mid \vec{I}' \in \mathscr{M}_n\} = \{\vec{I} \in \mathscr{M}_{n+1} \mid i_1 = 0\},$$

$$\{\vec{I} = (1, -\vec{I}') \mid \vec{I}' \in \mathscr{M}_n\} = \{\vec{I} \in \mathscr{M}_{n+1} \mid i_1 = 1\}.$$

Эти множества не пересекаются, а их объединение по определению совпадает с $\mathscr{M}_{n+1}$. Следовательно, формула (3) верна для u_{n+1}. Аналогично рассматривается v_{n+1}. Лемма доказана.

Теперь в силу леммы 1, очевидно, имеем

$$f(\lambda) = u_n^2(\lambda) + v_n^2(\lambda) = \sum_{\vec{I},\vec{J} \in \mathscr{M}_n} A(\vec{I})A(\vec{J})B(\vec{I})B(\vec{J}) \cos[(\vec{I} - \vec{J}) \cdot \vec{\alpha}\sqrt{\lambda}], \qquad (4)$$

т. е. основная функция имеет вид

$$f(\lambda) = C^{(1)} \cos T^{(1)}\mu + \dots + C^{(N)} \cos T^{(N)}\mu \quad (\mu = \sqrt{\lambda}). \qquad (5)$$

Привлекая теорию почти периодических функций или применяя преобразование Фурье, найдем совокупность всех отвечающих функции f пар чисел $\{[\pm T^{(k)}, C^{(k)}]\}_{k=1,\dots,N}$. (Коэффициенты $\{T^{(k)}\}$ определяются только с точностью до знака, поскольку cos — четная функция). Числа $\{\pm T^{(k)}\}$ условно будем называть *периодами*, а числа $\{C^{(k)}\}$ — *амплитудами*. Все периоды с амплитудами образуют *полный спектр пар* $\mathrm{SP} = \{[\pm T^{(k)}, C^{(k)}]\}_{k=1,\dots,N}$ — множество, которое мы можем найти. В частности, мы найдем *спектр периодов* $\mathrm{Sp} = \{\pm T^{(k)}\}_{k=1,\dots,N}$ — множество, симметричное относительно 0 на вещественной оси. Однако, когда компоненты вектора α нам неизвестны, понять, какое число из спектра соответствует каждому из выражений $(\vec{I} - \vec{J}) \cdot \vec{\alpha}$, мы пока не можем. В этом вся суть проблемы.

2. Зависимость основной функции от точек разрыва

Итак, все периоды представлены в виде

$$(\vec{I} - \vec{J}) \cdot \vec{\alpha}. \qquad (6)$$

Заметим, что отсюда можно сразу найти α_1. Действительно, период $T = \pm\alpha_1$ получается из (6) при $\vec{I} = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{J} = (0, 0, \dots, 0)$ или при $\vec{I} = (0, 0, \dots, 0)$, $\vec{J} = (1, 0, \dots, 0)$. Очевидно, что при всех остальных $\vec{I}, \vec{J} \in \mathscr{M}_n$

$$|(\vec{I} - \vec{J}) \cdot \vec{\alpha}| = |\vec{I} \cdot \vec{\alpha} - \vec{J} \cdot \vec{\alpha}| < \alpha_1,$$

так как $0 \le \vec{I} \cdot \vec{\alpha} < \alpha_1$, $0 \le \vec{J} \cdot \vec{\alpha} < \alpha_1$ в силу условия $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n > 0$ и определения подходящих мультииндексов $\vec{I}$, $\vec{J} \in \mathscr{M}_n$. Следовательно, α_1 — максимальное по модулю число из элементов спектра.

Хотелось бы представить периоды в более понятном виде, чем в (6). Заодно интересно было бы выяснить зависимость числа N периодов $\{T^{(k)}\}$ и амплитуд $\{C^{(k)}\}$ от исходного n, так как число разрывов n мы, вообще говоря, тоже не знаем.

Каждый период $\pi \in \mathrm{Sp}$ есть некоторая линейная комбинация параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, т. е. $\pi = t_1\alpha_1 + \dots + t_n\alpha_n$. Будем говорить, что $(t_1, \dots, t_n)$ — *координаты периода* π. Таким образом, каждый период можно представить в виде вектора $\vec{t} = (t_1, \dots, t_n)$. Такие векторы (условно будем называть их *вершинами*) образуют некоторое множество T в пространстве $\mathbb{R}^n$. Попробуем выяснить структуру этого множества, чтобы по произвольному вектору $\vec{t} = (t_1, \dots, t_n)$ можно было сразу определить, принадлежит ли $\vec{t}$ множеству T, иными словами, существуют ли $\vec{I}, \vec{J} \in \mathscr{M}_n$ такие, что $(\vec{I} - \vec{J}) \cdot \vec{\alpha} = t_1\alpha_1 + \dots + t_n\alpha_n$, т. е. $\vec{I} - \vec{J} = \vec{t}$. Оказывается, имеет место следующий критерий.

Лемма 2. $\vec{t} \in T \iff \forall\, m = 1, \dots, n \quad \left|\sum\limits_{k=1}^{m} t_k\right| \le 1.$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\vec{t} = \vec{I} - \vec{J}$, $\vec{I}$, $\vec{J} \in \mathscr{M}_n$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{m} t_k = \sum_{k=1}^{m} i_k - \sum_{k=1}^{m} j_k.$$

Из определения подходящих мультииндексов $\vec{I}$, $\vec{J} \in \mathscr{M}_n$ следует, что каждая из сумм $\sum i_k$, $\sum j_k$ может принимать только одно из значений $\{1; 0\}$, поэтому их разность принадлежит множеству $\{-1; 0; 1\}$.

Достаточность. Пусть

$$\left|\sum_{k=1}^{m} t_k\right| \le 1, \quad m = 1, \dots, n.$$

Надо построить такие подходящие мультииндексы $\vec{I}$, $\vec{J} \in \mathscr{M}_n$, что $\vec{I} - \vec{J} = \vec{t}$.

Для всякого $\vec{I} \in \mathscr{M}_n$ через $\vec{I}_m$ будем обозначать его срезку, состоящую из первых m элементов, т. е. $\vec{I}_m = (i_1, \dots, i_m)$. Тогда по определению

$$\vec{I} \in \mathscr{M}_n \quad \iff \quad \vec{I}_m \in \mathscr{M}_m \quad \forall\, m = 1, \dots, n.$$

Будем определять i_m, j_m, $m = 1, \dots, n$, по индукции так, чтобы $i_m - j_m = t_m$ и срезки $\vec{I}_m$, $\vec{J}_m$ оставались подходящими.

При $m = 1$ будет $t_1 \in \{-1; 0; 1\}$ по условию. Очевидно, при $t_1 = 0$ можно положить $i_1 = 0$, $j_1 = 0$; при $t_1 = 1$ — $i_1 = 1$, $j_1 = 0$; при $t_1 = -1$ — $i_1 = 0$, $j_1 = 1$.

Рассмотрим переход $m - 1 \to m$. Из условия очевидно, что $t_m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Пусть $\vec{I}_{m-1}$, $\vec{J}_{m-1}$ уже построены. Обозначим через i_{last} (j_{last}) последний ненулевой элемент в подходящем мультииндексе $\vec{I}$ ($\vec{J}$), стоящий до m-го места. Тогда, очевидно, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{m-1} i_k = 1 \iff i_{\text{last}} = 1, \quad \text{а} \quad \sum_{k=1}^{m-1} i_k = 0 \iff i_{\text{last}} = -1.$$

Изучим случай $t_m = 2$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{m-1} t_k = -1$ в силу условия. Это возможно только при $\sum\limits_{k=1}^{m-1} i_k = 0$, $\sum\limits_{k=1}^{m-1} j_k = 1$. Значит, $i_{\text{last}} = -1$, $j_{\text{last}} = 1$. Можно положить $i_m = 1$, $j_m = -1$, не нарушив условия $\vec{I}_m, \vec{J}_m \in \mathscr{M}_m$.

Рассмотрим случай $t_m = 1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{m-1} t_k \in \{0; -1\},$$

следовательно, по крайней мере либо $i_{\text{last}} = -1$, либо $j_{\text{last}} = 1$ (иначе получим $i_{\text{last}} = 1$, $j_{\text{last}} = -1$, откуда $\sum\limits_{k=1}^{m-1} t_k = 1$, что противоречит предположению). В первом случае можно положить $i_m = 1$, $j_m = 0$, а во втором — $i_m = 0$, $j_m = -1$.

Аналогично рассматриваются случаи $t_m = -1, -2$.

Случай $t_m = 0$. Очевидно, что можно взять $i_m = 0$, $j_m = 0$.

Таким образом, мы подобрали i_m, j_m так, что $i_m - j_m = t_m$ и при этом $\vec{I}_m$, $\vec{J}_m$ принадлежат $\mathscr{M}_m$. Лемма доказана полностью.

Итак, теперь стала ясна структура множества T и соответственно спектра периодов:

$$\mathrm{Sp} = \{\vec{t}\cdot\vec{\alpha} \mid \vec{t}\in T\}.$$

Нам нужно найти его порождающие элементы $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, в то время как мы знаем весь спектр только в совокупности. Значение α_1 нами уже найдено.

Формулу (4) для основной функции $f(\lambda)$ можно записать в виде

$$f(\lambda) = \sum_{\vec{t}\in T} C(\vec{t})\cos(\vec{t}\cdot\vec{\alpha}\sqrt{\lambda}), \tag{7}$$

где

$$C(\vec{t}) = \sum_{\substack{\vec{I}-\vec{J}=\vec{t}\\ \vec{I},\vec{J}\in\mathscr{M}_n}} A(\vec{I})A(\vec{J})B(\vec{I})B(\vec{J}) = C(\vec{t}; a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n) = C(\vec{t}; A_1,\dots,A_n).$$

Сделаем замену переменных:

$$t_1 = \tau_1,\ t_1 + t_2 = \tau_2,\dots, t_1+\dots+t_n = \tau_n.$$

В этих переменных структура множества T еще упрощается и имеет вид

$$\{|\tau_1|\le 1,\dots,|\tau_n|\le 1\}.$$

Таким образом, мы получаем равномощное (так как замена невырожденная) множество $\widetilde{T} = \{\vec{\tau}\in\mathscr{Z}^n \mid |\tau_i|\le 1 \quad \forall\, i=1,\dots,n\}$. Отсюда, кстати, сразу видно, чему равно число периодов: каждое τ_i может независимо принимать одно из трех значений $\{-1;0;1\}$, следовательно, $|\widetilde{T}| = 3^n = |T|$. Отождествляя противоположные по знаку элементы, получаем точное значение числа N различных косинусов в стандартной записи (5) функции $f(\lambda)$: $N(n) = \frac{3^n+1}{2}$, откуда без проблем можно будет находить число разрывов n по числу N.

Замечание. Вообще говоря, $N\le\frac{3^n+1}{2}$, так как различные элементы множества T могут давать одно и то же значение периода, т. е. $\vec{t}^{(1)}\cdot\vec{\alpha} = \vec{t}^{(2)}\cdot\vec{\alpha}$. Но если учесть условие несоизмеримости чисел $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, то тогда это исключено, и, значит, будет в точности $N = \frac{3^n+1}{2}$.

Периоды в новых переменных имеют вид

$$\begin{aligned}\tau_1\alpha_1 + (\tau_2-\tau_1)\alpha_2 + \dots + (\tau_n - \tau_{n-1})\alpha_n\\ = \tau_1(\alpha_1-\alpha_2) + \dots + \tau_{n-1}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) + \tau_n\alpha_n = \tau_1\beta_1+\dots+\tau_n\beta_n,\end{aligned}$$

т. е. теперь вместо $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ в качестве порождающих параметров спектра мы будем рассматривать соответствующую равносильную систему $\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$.

Формула (7) тогда примет равносильный вид

$$f(\lambda) = \sum_{\vec{\tau}\in\widetilde{T}} \widetilde{C}(\vec{\tau})\cos(\vec{\tau}\cdot\vec{\beta}\sqrt{\lambda}), \tag{8}$$

где $\widetilde{C}(\vec{\tau}) = C(\vec{t})$ для вершин $\vec{t}$, отвечающих $\vec{\tau}$ при вышеописанной замене переменных, и соответственно

$$\widetilde{C}(\vec{\tau}) = \widetilde{C}(\vec{\tau}; a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n) = \widetilde{C}(\vec{\tau}; A_1,\dots,A_n).$$

Запишем полный спектр пар, отвечающий функции f:

$$\mathrm{SP} = \{[\vec{\tau}\cdot\vec{\beta},\ \widetilde{C}(\vec{\tau};A_1,\dots,A_n)] \mid \vec{\tau}\in\widetilde{T}\},$$

и соответственно спектр периодов:

$$\mathrm{Sp} = \{\vec{\tau}\cdot\vec{\beta} \mid \vec{\tau}\in\widetilde{T}\}.$$

Снова пытаемся искать его порождающие элементы $\beta_1,\dots,\beta_n$, зная все множество Sp в совокупности. При этом порядок нумерации здесь важен, так как первоначальные параметры $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ выражаются через $\beta_1,\dots,\beta_n$ несимметричным образом: $\alpha_1 = \beta_1+\dots+\beta_n,\dots,\alpha_n=\beta_n$, и, значит, изменение порядка следования элементов $\beta_1,\dots,\beta_n$ в системе дает уже совершенно другое решение задачи. Поэтому ищем систему $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ как упорядоченный набор.

Примечание. В силу определения параметров $\beta_1,\dots,\beta_n$ все они положительны. Заметим, что поскольку период $\alpha_1=\beta_1+\dots+\beta_n$ мы определили однозначно, то эта сумма должна быть фиксирована.

Порождающую систему элементов $\left(\beta'_1,\dots,\beta'_n\right)$, удовлетворяющую условиям, указанным в примечании, будем называть *допустимой*, если она дает исходный спектр периодов Sp, который должна давать искомая порождающая система $(\beta_1,\dots,\beta_n)$.

Теорема 1. *Существуют допустимые порождающие системы, отличные от искомой $(\beta_1,\dots,\beta_n)$. Это — все системы, полученные всевозможными перестановками элементов $\beta_1,\dots,\beta_n$. При условии несоизмеримости точек разрыва других допустимых систем нет.*

Доказательство. Мы просто будем искать все возможные допустимые системы порождающих элементов $\left(\beta'_1,\dots,\beta'_n\right)$. Они дают тот же спектр периодов Sp, что и искомые элементы $(\beta_1,\dots,\beta_n)$, т. е.

$$\mathrm{Sp} = \{\vec{\tau}\cdot\vec{\beta} \mid \vec{\tau}\in\widetilde{T}\} = \{\vec{\tau}'\cdot\vec{\beta}' \mid \vec{\tau}'\in\widetilde{T}\} = \mathrm{Sp}'\,.$$

Так как $\beta'_1,\dots,\beta'_n\in\mathrm{Sp}$, имеем

$$\beta'_1 = p_{11}\beta_1+\dots+p_{1n}\beta_n,\dots,\beta'_n = p_{n1}\beta_1+\dots+p_{nn}\beta_n,$$

т. е. $\vec{\beta}' = P\vec{\beta}$.

Пусть $\vec{\tau}$ — координаты периода в системе $(\beta_1,\dots,\beta_n)$, $\vec{\tau}'$ — координаты периода в системе $\left(\beta'_1,\dots,\beta'_n\right)$. Тогда $\vec{\tau}=\vec{\tau}'\cdot P$. Значит, система из порождающих элементов $(\beta'_1,\dots,\beta'_n)$ дает спектр

$$\mathrm{Sp}' = \{\vec{\tau}P\cdot\vec{\beta} \mid \vec{\tau}\in\widetilde{T}\}.$$

В силу несоизмеримости чисел $\beta_1,\dots,\beta_n$ этот спектр будет тот же самый в том и только в том случае, когда линейное преобразование P есть взаимно однозначное отображение множества $\widetilde{T}$ на себя.

Множество $\widetilde{T} = \{\vec{\tau}\in\mathscr{Z}^n \mid |\tau_i|\le 1\}$ есть целочисленная решетка куба $\Pi = \{\vec{x}\in\mathscr{R}^n \mid |x_i|\le 1\}$. Поскольку преобразование P линейно, вместе с решеткой оно отображает на себя и весь куб.

Значит, задача свелась к следующей: какие могут быть линейные преобразования, переводящие куб на себя? При таком преобразовании ребра куба переходят в ребра, а так как все ребра параллельны базисным векторам $\{e_1,\dots,e_n\}$, то, значит, $(\forall i\,\exists!j)\ e_i\to\pm e_j$, соответственно $\beta'_i=\pm\beta_j$.

Так как по определению все $\beta_1, \dots, \beta_n$ положительны, свобода выбора знаков отпадает, т. е. $e_i \to e_j$, и $\beta_i' = \beta_j$, т. е. каждая допустимая система $(\beta_1', \dots, \beta_n')$ получается из исходной $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ в результате перестановки. Условие $\beta_1' + \dots + \beta_n' = \alpha_1$ при этом, очевидно, выполняется автоматически. Теорема доказана.

Замечание. Таким образом, все полученные линейные преобразования P суть перестановки координат, мы так и будем называть их просто *перестановками*, а их совокупность обозначим через $\mathscr{L}$.

Существование отличных от искомой допустимых порождающих систем ставит под вопрос единственность решения исходной задачи, т. е. возможно, что другие входные параметры $x_1', \dots, x_n', A_1', \dots, A_n'$ в исходной формуле дают ту же самую спектральную функцию, что и искомый набор параметров $x_1, \dots, x_n$, $A_1, \dots, A_n$, и соответственно ту же самую основную функцию $f(\lambda)$. А именно, набору $x_1', \dots, x_n'$, $A_1', \dots, A_n'$ отвечает порождающая система $(\beta_1', \dots, \beta_n')$ и основная функция $f_1(\lambda)$ с соответствующим полным спектром пар

$$\mathrm{SP}' = \{[\vec{\tau}' \cdot \vec{\beta}', \widetilde{C}(\vec{\tau}'; A_1', \dots, A_n')] \mid \vec{\tau}' \in \widetilde{T}\}. \tag{9}$$

Пусть $f(\lambda) = f_1(\lambda)$, что равносильно $\mathrm{SP} = \mathrm{SP}'$. Тогда

1) $\mathrm{Sp} = \mathrm{Sp}'$; по теореме 1 такое возможно, и в этом случае $\vec{\beta}' = P\vec{\beta}$, где $P \in \mathscr{L}$ — перестановка;

2) подставив $\vec{\beta}' = P\vec{\beta}$ в (9) и приравняв соответствующие амплитуды при одинаковых периодах $\pi = \vec{\tau} \cdot \vec{\beta} = \vec{\tau}' \cdot \vec{\beta}'$ в SP и SP′, получаем систему равенств

$$\widetilde{C}(\vec{\tau}'; A_1', \dots, A_n') = \widetilde{C}(\vec{\tau}; A_1, \dots, A_n) \quad \forall\, \vec{\tau} \in \widetilde{T}, \tag{10}$$

где вершины $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau}'$ связаны соотношением $\vec{\tau}' \cdot P = \vec{\tau}$.

Таким образом, (10) есть необходимое и достаточное условие того, что набор $x_1', \dots, x_n', A_1', \dots, A_n'$ с соответствующей допустимой системой $\vec{\beta}' = P\vec{\beta}$ является решением исходной задачи. Будем говорить в этом случае, что *перестановка $P \in \mathscr{L}$ индуцирует решение задачи $x_1', \dots, x_n', A_1', \dots, A_n'$*.

Если же (10) как система уравнений относительно $A_1', \dots, A_n'$ несовместна ни при какой перестановке $P \in \mathscr{L}$, кроме тождественной, то решение единственно. Так или иначе, для исследования этого вопроса надо разбираться в амплитудах.

3. Зависимость основной функции от величин скачков

Воспользуемся формулой (4) и будем исследовать амплитуды

$$C(\vec{t}) = \sum_{\substack{\vec{I} - \vec{J} = \vec{t} \\ \vec{I}, \vec{J} \in \mathscr{M}_n}} A(\vec{I}) A(\vec{J}) B(\vec{I}) B(\vec{J}).$$

Для определения $C(\vec{t})$ главное — понять, какими способами можно разложить $\vec{t}$ в разность подстановок $\vec{I} - \vec{J}$.

Заметим, что коэффициенты $A(\vec{I})$, $B(\vec{I})$ согласно формулам (2) можно разложить на еще более простые составляющие:

$$A(\vec{I}) = A(i_1) \dots A(i_n), \quad B(\vec{I}) = B(i_1) \dots B(i_n),$$

где

$$A(i_k) = \begin{cases} 1, & i_k = \pm 1, \\ a_k, & i_k = 0, \end{cases} \qquad B(i_k) = \begin{cases} b_k, & i_k = \pm 1, \\ 1, & i_k = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Тогда

$$C(\vec{t}) = \sum_{\substack{\vec{I}-\vec{J}=\vec{t} \\ \vec{I},\vec{J}\in\mathscr{M}_n}} A(\vec{I})A(\vec{J})B(\vec{I})B(\vec{J})$$
$$= \sum_{\substack{\vec{I}-\vec{J}=\vec{t} \\ \vec{I},\vec{J}\in\mathscr{M}_n}} \prod_{k=1}^{n} A(i_k)A(j_k)B(i_k)B(j_k) \equiv \sum_{\substack{\vec{I}-\vec{J}=\vec{t} \\ \vec{I},\vec{J}\in\mathscr{M}_n}} \prod_{k=1}^{n} S(i_k, j_k).$$

Условие $\vec{I}, \vec{J} \in \mathscr{M}_n$ эквивалентно выполнению n зависимых условий $\vec{I}_k, \vec{J}_k \in \mathscr{M}_k$, $k = 1, \dots, n$, а условие $\vec{I} - \vec{J} = \vec{t}$ есть n условий $i_k - j_k = t_k$, $k = 1, \dots, n$. Поэтому полученную сумму можно представить в виде вложенных сумм:

$$\sum_{\substack{i_1-j_1=t_1 \\ \vec{I}_1,\vec{J}_1\in\mathscr{M}_1}} \sum_{\substack{i_2-j_2=t_2 \\ \vec{I}_2,\vec{J}_2\in\mathscr{M}_2}} \cdots \sum_{\substack{i_n-j_n=t_n \\ \vec{I},\vec{J}\in\mathscr{M}_n}} \prod_{k=1}^{n} S(i_k, j_k).$$

Здесь в каждой сумме $\sum\limits_{\substack{i_k-j_k=t_k \\ \vec{I}_k,\vec{J}_k\in\mathscr{M}_k}}$ индексы $i_1, j_1, \dots, i_{k-1}, j_{k-1}$ уже фиксированы, а суммирование ведется по всем i_k, j_k, удовлетворяющим условиям под знаком суммы:

$$C(\vec{t}) = \sum_{\substack{i_1-j_1=t_1 \\ \vec{I}_1,\vec{J}_1\in\mathscr{M}_1}} \cdots \sum_{\substack{i_{n-1}-j_{n-1}=t_{n-1} \\ \vec{I}_{n-1},\vec{J}_{n-1}\in\mathscr{M}_{n-1}}} \prod_{k=1}^{n-1} S(i_k, j_k) \sum_{\substack{i_n-j_n=t_n \\ \vec{I},\vec{J}\in\mathscr{M}_n}} S(i_n, j_n)$$
$$\cdots = \sum_{\substack{i_1-j_1=t_1 \\ \vec{I}_1,\vec{J}_1\in\mathscr{M}_1}} S(i_1, j_1) \cdot \sum_{\substack{i_2-j_2=t_2 \\ \vec{I}_2,\vec{J}_2\in\mathscr{M}_2}} S(i_2, j_2) \cdots \sum_{\substack{i_n-j_n=t_n \\ \vec{I}_n,\vec{J}_n\in\mathscr{M}_n}} S(i_n, j_n) = C_1 C_2 \dots C_n,$$

где

$$C_k = \sum_{\substack{i_k-j_k=t_k \\ \vec{I}_k,\vec{J}_k\in\mathscr{M}_k}} A(i_k)A(j_k)B(i_k)B(j_k) \tag{12}$$

при фиксированных $\vec{I}_{k-1}, \vec{J}_{k-1}$.

Таким образом, для определения множителя C_k надо найти все возможные пары i_k, j_k такие, что $i_k - j_k = t_k$ и чтобы при этом срезки $\vec{I}_k, \vec{J}_k$ оставались подходящими мультииндексами при зафиксированных $i_1, \dots, i_{k-1}, j_1, \dots, j_{k-1}$.

Оказывается, это полностью определяется координатой t_k и суммой координат $t_1 + \dots + t_{k-1}$.

Итак, пусть $\vec{t} \in T$, значит,

$$\left|\sum_{k=1}^{m} t_k\right| \le 1 \quad \forall m = 1, \dots, n.$$

Отсюда ясно, что $t_k \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

При $t_k = 2$, очевидно, независимо от первых $k-1$ элементов возможен только один вариант $i_k = 1$, $j_k = -1$. (А если и он невозможен, то это значит, что $\vec{t} \notin T$.) Тем самым в этом случае по формулам (11), (12)

$$C_k = \sum_{\substack{i_k=1\\ j_k=-1}} A(i_k)A(j_k)B(i_k)B(j_k) = b_k^2.$$

Аналогично и при $t_k = -2$ будет $C_k = b_k^2$.

При $t_k = 1$ возможны два варианта:

(I) $i_k = 1$, $j_k = 0$,

(II) $i_k = 0$, $j_k = -1$.

Надо еще проверить условие, что $\vec{I}_k$, $\vec{J}_k$ остаются подходящими при таких i_k, j_k. Для этого рассмотрим два возможных здесь случая.

(A1) $t_1 + \cdots + t_{k-1} = -1$, отсюда

$$\begin{cases} i_1 + \cdots + i_{k-1} = 0, \\ j_1 + \cdots + j_{k-1} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} i_{\mathrm{last}} = -1, \\ j_{\mathrm{last}} = 1. \end{cases}$$

(Напомним еще раз, что i_{last} — последний ненулевой элемент в срезке $\vec{I}_{k-1}$.) В этом случае оба варианта (I) и (II) возможны; тогда согласно (11), (12)

$$C_k = \sum_{\{(\mathrm{I}),(\mathrm{II})\}} A(i_k)A(j_k)B(i_k)B(j_k) = a_kb_k + a_kb_k = 2a_kb_k.$$

(A2) $t_1 + \cdots + t_{k-1} = 0$, тогда

$$\begin{cases} i_1 + \cdots + i_{k-1} = 0, \\ j_1 + \cdots + j_{k-1} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} i_{\mathrm{last}} = -1, \\ j_{\mathrm{last}} = -1 \end{cases} \tag{A2$'$}$$

либо

$$\begin{cases} i_1 + \cdots + i_{k-1} = 1, \\ j_1 + \cdots + j_{k-1} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} i_{\mathrm{last}} = 1, \\ j_{\mathrm{last}} = 1. \end{cases} \tag{A2$''$}$$

В обоих случаях (A2$'$), (A2$''$) возможен только один из вариантов (I), (II). По формулам (11) и тому и другому соответствует один и тот же множитель a_kb_k, значит, согласно (12) получаем $C_k = a_kb_k$.

При $t_k = 0$ в принципе возможны варианты

(III) $i_k = 0$, $j_k = 0$;

(IV) $i_k = 1$, $j_k = 1$;

(V) $i_k = -1$, $j_k = -1$.

Отметим, что вариант (III) возможен всегда, ему соответствует множитель a_k^2. Рассмотрим три возможных случая.

(B1) $t_1 + \cdots + t_{k-1} = 1$; отсюда

$$\begin{cases} i_1 + \cdots + i_{k-1} = 1, \\ j_1 + \cdots + j_{k-1} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} i_{\mathrm{last}} = 1, \\ j_{\mathrm{last}} = -1. \end{cases}$$

Здесь, кроме (III), никакие варианты невозможны, значит, в этом случае получаем $C_k = a_k^2$.

(B2) $t_1 + \cdots + t_{k-1} = -1$; точно так же здесь возможен только один вариант (III) и $C_k = a_k^2$.

(B3) $t_1 + \cdots + t_{k-1} = 0$; тогда

$$\begin{cases} i_1 + \cdots + i_{k-1} = 0, \\ j_1 + \cdots + j_{k-1} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} i_{\mathrm{last}} = -1, \\ j_{\mathrm{last}} = -1, \end{cases} \tag{B3$'$}$$

либо

$$\begin{cases} i_1 + \cdots + i_{k-1} = 1, \\ j_1 + \cdots + j_{k-1} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} i_{\text{last}} = 1, \\ j_{\text{last}} = 1. \end{cases} \tag{B3$''$}$$

В случае (B3$'$) подходят варианты (III), (IV), тогда

$$C_k = \sum_{\{(\text{III}),(\text{IV})\}} A(i_k)A(j_k)B(i_k)B(j_k) = a_k^2 + b_k^2.$$

А в случае (B3$''$) подходят варианты (III), (V) и также $C_k = a_k^2 + b_k^2$.

Итак, область зависимости $C_k(\vec{t})$ исчерпывается всеми рассмотренными случаями, и, таким образом, нами доказана

Лемма 3. *Имеет место следующая явная схема для определения $C(\vec{t})$:*

$$C(\vec{t}) = C_1 \ldots C_n,$$

где $C_1 = C_1(t_1)$, $C_2 = C_2(t_1, t_2)$, ... , $C_n = C_n(t_1, \ldots, t_n)$, а именно каждое C_k определяется по правилу

$$t_k = \pm 2 \Rightarrow C_k = b_k^2,$$

$$t_k = \pm 1 \Rightarrow C_k = \begin{cases} a_k b_k & \text{при } t_1 + \cdots + t_{k-1} = 0, \\ 2a_k b_k & \text{при } t_1 + \cdots + t_{k-1} = \pm 1, \end{cases}$$

$$t_k = 0 \Rightarrow C_k = \begin{cases} a_k^2 + b_k^2 & \text{при } t_1 + \cdots + t_{k-1} = 0, \\ a_k^2 & \text{при } t_1 + \cdots + t_{k-1} = \pm 1. \end{cases}$$

При $k = 1$ эта схема остается верной, если, положив $t_0 = 0$, считать сумму $t_1 + \cdots + t_{k-1} \equiv t_0 + \cdots + t_{k-1}$.

В терминах вершин $\vec{\tau}$ из множества $\widetilde{T}$ эта схема будет выглядеть следующим образом:

$$|\tau_k - \tau_{k-1}| = 2 \Rightarrow \widetilde{C}_k = b_k^2,$$

$$|\tau_k - \tau_{k-1}| = 1 \Rightarrow \widetilde{C}_k = \begin{cases} a_k b_k & \text{при } |\tau_{k-1}| = 0, \\ 2a_k b_k & \text{при } |\tau_{k-1}| = 1, \end{cases}$$

$$|\tau_k - \tau_{k-1}| = 0 \Rightarrow \widetilde{C}_k = \begin{cases} a_k^2 + b_k^2 & \text{при } |\tau_{k-1}| = 0, \\ a_k^2 & \text{при } |\tau_{k-1}| = 1. \end{cases}$$

При $k = 1$ схема остается верной, если положить $\tau_0 = 0$. Так же, как и для $C(\vec{t})$, определяется $\widetilde{C}(\vec{\tau}) = \widetilde{C}_1 \ldots \widetilde{C}_n$, только здесь уже $\widetilde{C}_k = \widetilde{C}_k(\tau_{k-1}, \tau_k)$.

Далее мы будем использовать амплитуды только в виде $\widetilde{C}(\vec{\tau})$, поэтому знак волны везде опускаем.

Теперь вспомним, что $a_k = A_k + 1$, $b_k = A_k - 1$, $A_k > 0$. Отсюда $|a_k| > |b_k|$, $a_k - b_k = 2$. Еще заметим, что $a_k^2 + b_k^2 > |2a_k b_k|$, так как $a_k^2 + b_k^2 \pm 2a_k b_k = (a_k + b_k)^2 > 0$. Тогда имеем очевидные сравнения множителей C_k по абсолютной величине:

$$b_k^2 < |a_k b_k| < \left\{ \begin{matrix} a_k^2 \\ |2a_k b_k| \end{matrix} \right\} < a_k^2 + b_k^2.$$

Эти неравенства (строгие!) выполнены независимо от конкретных значений $a_k = a_k(A_k)$, $b_k = b_k(A_k)$. Благодаря этому в некоторых случаях можно заранее, не зная еще числовых значений A_k, сравнивать $|C(\vec{\tau})|$ для различных вершин $\vec{\tau}$, а именно для некоторых вершин $\vec{\tau}^{(1)}, \vec{\tau}^{(2)}$ можно заведомо определить знак неравенства между $|C(\vec{\tau}^{(1)})|$ и $|C(\vec{\tau}^{(2)})|$, т. е. независимо от того, какие значения принимают $A_1, \dots, A_n$ и соответствующие им $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$.

Пример. Пусть $\vec{\tau}^{(1)} = (1, 1, 1, 1, \dots)$, $\vec{\tau}^{(2)} = (1, -1, 1, -1, \dots)$. Тогда согласно схеме $C(\vec{\tau}^{(1)}) = a_1 b_1 a_2^2 \dots a_n^2$, $C(\vec{\tau}^{(2)}) = a_1 b_1 b_2^2 \dots b_n^2$, значит, здесь заведомо $|C(\vec{\tau}^{(1)})| > |C(\vec{\tau}^{(2)})|$.

4. Единственность решения обратной задачи

Для дальнейшего изложения и доказательства основной теоремы нам еще понадобятся некоторые вспомогательные понятия и утверждения.

Введем отношение частичного порядка на множестве вершин $\widetilde{T}$: $\vec{\tau}^{(1)} < \vec{\tau}^{(2)}$, если заведомо $|C(\vec{\tau}^{(1)})| < |C(\vec{\tau}^{(2)})|$, т. е.

$$|C(\vec{\tau}^{(1)}; A_1, \dots, A_n)| < |C(\vec{\tau}^{(2)}; A_1, \dots, A_n)| \quad \forall A_1, \dots, A_n.$$

Соответственно $\vec{\tau}^{(1)} \sim \vec{\tau}^{(2)}$, если $C(\vec{\tau}^{(1)}) = C(\vec{\tau}^{(2)})$. Если нельзя указать знак неравенства между $C(\vec{\tau}^{(1)})$ и $C(\vec{\tau}^{(2)})$ независимо от конкретных численных значений $A_1, \dots, A_n$, то вершины $\vec{\tau}^{(1)}$ и $\vec{\tau}^{(2)}$ *несравнимы*.

Рассмотрим $\widetilde{T}_0$ — множество вершин из $\widetilde{T}$, у которых есть ровно одна нулевая координата. Такие вершины будем называть *простыми*.

Пусть простые вершины $\vec{\tau}^{(1)}$, $\vec{\tau}^{(2)}$ имеют одну и ту же нулевую координату и у вершины $\vec{\tau}^{(2)}$ все ненулевые координаты положительны, т. е. равны 1, иными словами, $\vec{\tau}^{(1)} \in \widetilde{T}_0$ произвольно, а $\vec{\tau}^{(2)} \in \widetilde{T}_0$ с координатами $\tau_i^{(2)} = \left|\tau_i^{(1)}\right|$:

$$\vec{\tau}^{(1)} = (\pm 1, \dots, \pm 1, 0, \pm 1, \dots, \pm 1), \quad \vec{\tau}^{(2)} = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1).$$

Такие пары вершин $\vec{\tau}^{(1)}, \vec{\tau}^{(2)}$ будем называть *специальной связкой*.

Замечание. Понятие простой вершины и специальной связки, очевидно, инвариантно относительно перестановок $P \in \mathscr{L}$.

Будем говорить что специальная связка вершин $\vec{\tau}^{(1)}$, $\vec{\tau}^{(2)}$ имеет *канонический вид*, если

$$\vec{\tau}^{(1)} = (1, \dots, 1, 0, -1, \dots, -1), \quad \vec{\tau}^{(2)} = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

или

$$\vec{\tau}^{(1)} = (-1, \dots, -1, 0, 1, \dots, 1), \quad \vec{\tau}^{(2)} = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1),$$

т. е. все 1 и -1 в координатной строке вершины $\vec{\tau}^{(1)}$ разделены нулем.

Лемма 4. *Пусть $\vec{\tau}^{(1)}, \vec{\tau}^{(2)} \in \widetilde{T}_0$ — специальная связка произвольного вида. Тогда вершины $\vec{\tau}^{(1)}$ и $\vec{\tau}^{(2)}$ всегда сравнимы, причем $\vec{\tau}^{(1)} \sim \vec{\tau}^{(2)}$ тогда и только тогда, когда связка $\vec{\tau}^{(1)}, \vec{\tau}^{(2)}$ имеет канонический вид. В противном случае обязательно $\vec{\tau}^{(1)} < \vec{\tau}^{(2)}$.*

Доказательство. Если связка $\vec{\tau}^{(1)}, \vec{\tau}^{(2)}$ имеет канонический вид, т. е.

$$\vec{\tau}^{(1)} = (1, \dots, 1, 0, -1, \dots, -1), \quad \vec{\tau}^{(2)} = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1),$$

то $\vec{\tau}^{(1)} \sim \vec{\tau}^{(2)}$. Это сразу следует из схемы для определения $C(\vec{\tau})$, ибо в таком случае при всех k имеем $\left|\tau_k^{(1)} - \tau_{k-1}^{(1)}\right| = \left|\tau_k^{(2)} - \tau_{k-1}^{(2)}\right|$ и $\left|\tau_k^{(1)}\right| = \left|\tau_k^{(2)}\right|$.

Рассмотрим теперь общий случай

$$\vec{\tau}^{(1)} = (\pm 1, \dots, \pm 1, 0, \pm 1, \dots, \pm 1), \quad \vec{\tau}^{(2)} = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1).$$

Снова используем схему для определения $C(\vec{\tau})$ из леммы 3. Нетрудно проверить, что здесь для различных k возможны только следующие две ситуации.

(A) Имеет место равенство

$$\left|\tau_k^{(1)} - \tau_{k-1}^{(1)}\right| = \left|\tau_k^{(2)} - \tau_{k-1}^{(2)}\right|.$$

Тогда так как, кроме того, $|\tau_k^{(1)}| = |\tau_k^{(2)}|$, то $C_k(\vec{\tau}^{(1)}) = C_k(\vec{\tau}^{(2)})$.

(B) Равенства нет; очевидно, это происходит только в том случае, если $\left\{\tau_k^{(1)}, \tau_{k-1}^{(1)}\right\} = \{1, -1\}$ и соответственно $\tau_k^{(2)} = \tau_{k-1}^{(2)} = 1$, т. е.

$$\left|\tau_k^{(1)} - \tau_{k-1}^{(1)}\right| = 2, \quad \left|\tau_k^{(2)} - \tau_{k-1}^{(2)}\right| = 0.$$

Тогда согласно схеме для $C(\vec{\tau})$ имеем $C_k(\vec{\tau}^{(1)}) = b_k^2$, $C_k(\vec{\tau}^{(2)}) = a_k^2$ и здесь $|C_k(\vec{\tau}^{(1)})| < |C_k(\vec{\tau}^{(2)})|$.

Таким образом, заведомо $|C_k(\vec{\tau}^{(1)})| \le |C_k(\vec{\tau}^{(2)})|$. Если при этом $\vec{\tau}^{(1)}$ не имеет канонического вида, то в ее координатной записи есть стоящие рядом 1 и -1, т. е. существует такое m, что $\tau_m^{(1)} = 1$, $\tau_{m+1}^{(1)} = -1$ и соответственно $\tau_m^{(2)} = 1$, $\tau_{m+1}^{(2)} = 1$. Тем самым при $k = m + 1$ возникает ситуация (B) и, следовательно, $|C_{m+1}(\vec{\tau}^{(1)})| < |C_{m+1}(\vec{\tau}^{(2)})|$ строго.

Итак, при всех k имеем $|C_k(\vec{\tau}^{(1)})| \le |C_k(\vec{\tau}^{(2)})|$, причем по крайней мере один раз, для $k = m + 1$, неравенство строгое. Значит, также заведомо выполнено строгое неравенство $|C(\vec{\tau}^{(1)})| < |C(\vec{\tau}^{(2)})|$, т. е. $\vec{\tau}^{(1)} < \vec{\tau}^{(2)}$. Лемма доказана.

Вернемся к концу разд. 2 и напомним условие (10), при котором перестановка $P \in \mathscr{L}$ индуцирует решение исходной задачи — набор $x_1', \dots, x_n', A_1', \dots, A_n'$ с соответствующей допустимой порождающей системой $\vec{\beta}' = P\vec{\beta}$:

$$C\big(\vec{\tau}; A_1', \dots, A_n'\big) = C(\vec{\tau}P; A_1, \dots, A_n) \quad \forall\, \vec{\tau} \in \widetilde{T},$$

где вершины $\vec{\tau}$ и $\vec{s} = \vec{\tau} \cdot P$ суть координаты одного и того же периода $\pi = \vec{\tau} \cdot \vec{\beta}' = \vec{s} \cdot \vec{\beta}$ в системах $(\vec{\beta}')$ и $(\vec{\beta})$ соответственно.

Предложение. *Пусть имеются сравнимые вершины $\vec{\tau}^{(1)}$, $\vec{\tau}^{(2)}$. Тогда если перестановка $P \in \mathscr{L}$ индуцирует решение обратной задачи, то вершины $\vec{\tau}^{(1)}P$, $\vec{\tau}^{(2)}P$ должны быть либо сравнимы с тем же знаком, что и вершины $\vec{\tau}^{(1)}$, $\vec{\tau}^{(2)}$, либо вообще несравнимы, т. е. при перестановке P не должно быть явного изменения порядка между вершинами.*

Доказательство. Пусть для определенности $\vec{\tau}^1 \sim \vec{\tau}^2$. Надо показать, что тогда либо $\vec{\tau}^{(1)}P \sim \vec{\tau}^{(2)}P$, либо $\vec{\tau}^{(1)}P$ и $\vec{\tau}^{(2)}P$ несравнимы.

Предположим противное, т. е. что вершины $\vec{\tau}^{(1)}P$, $\vec{\tau}^{(2)}P$ сравнимы с другим знаком, для определенности $\vec{\tau}^{(1)}P > \vec{\tau}^{(2)}P$. Тогда по определению будет выполнено

$$|C(\vec{\tau}^{(1)}P; A_1, \dots, A_n)| > |C(\vec{\tau}^{(2)}P; A_1, \dots, A_n)|.$$

Перестановка P индуцирует решение задачи, т. е. при некоторых значениях параметров $A_1, \dots, A_n$ для нее выполнена система равенств (10), так что

$$C(\vec{\tau}^{(1)}; A_1', \dots, A_n') = C(\vec{\tau}^{(1)}P; A_1, \dots, A_n),$$
$$C(\vec{\tau}^{(2)}; A_1', \dots, A_n') = C(\vec{\tau}^{(2)}P; A_1, \dots, A_n).$$

Значит,

$$\left|C\big(\vec{\tau}^{(1)}; A_1', \dots, A_n'\big)\right| > \left|C\big(\vec{\tau}^{(2)}; A_1', \dots, A_n'\big)\right|;$$

противоречие с тем, что $\vec{\tau}^{(1)} \sim \vec{\tau}^{(2)}$. Аналогично разбираются случаи для других предположений о соотношениях между вершинами $\vec{\tau}^{(1)}$ и $\vec{\tau}^{(2)}$, $\vec{\tau}^{(1)}P$ и $\vec{\tau}^{(2)}P$.

Теорема 2. *Решение обратной задачи единственно: никакая перестановка P из $\mathscr{L}$, кроме тождественной, не может индуцировать решение задачи, т. е. удовлетворить системе равенств* (10). *Соответственно никакая допустимая система $(\beta'_1, \dots, \beta'_n)$, кроме искомой $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, не может быть решением задачи.*

Доказательство. Выделим из множества допустимых систем следующие две: искомую $\vec{\beta}^{(0)} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ и «обратную» к ней $\vec{\beta}^{(1)} = (\beta_n, \dots, \beta_1)$. Им соответствуют перестановки из $\mathscr{L}$ с матрицами

$$P^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & & \ddots & \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Покажем сначала, что остальные $P \in \mathscr{L}$ явно изменяют порядок между вершинами и, значит, по доказанному предложению не могут индуцировать решение обратной задачи.

Итак, пусть $P \in \mathscr{L}$, $P \neq P^{(0)}, P^{(1)}$; $\big(\beta'_1, \dots, \beta'_n\big)$ — соответствующая перестановке P допустимая система. Поскольку она получена перестановкой между собой $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$, имеется взаимно однозначное соответствие:

$$(\forall i\ \exists! j(i))\ \beta_i = \beta'_j.$$

Это же соответствие имеет место и для координат вершин из $\widetilde{T}$ при действии перестановки P, т. е. если $\beta_i = \beta'_j$, то также имеем $s_i = \tau_j$, где $\vec{s} = \vec{\tau} \cdot P$.

Так как $\vec{\beta}' \neq \vec{\beta}^{(0)}, \vec{\beta}^{(1)}$, очевидно, что в этом случае существует i такое, что $|j(i+1) - j(i)| \neq 1$, значит, найдется k такое, что $j(i) < k < j(i+1)$ либо $j(i) > k > j(i+1)$. Для определенности рассмотрим первый случай: $j(i) < k < j(i+1)$.

Берем специальную связку $\vec{\tau}^{(1)}$, $\vec{\tau}^{(2)}$ канонического вида с нулевой k-й координатой:

$$\vec{\tau}^{(1)} = (1, \dots, 1, 0, -1, \dots, -1), \quad \vec{\tau}^{(2)} = (1, \underset{j(i)}{\dots}, 1, \underset{k}{0}, 1, \underset{j(i+1)}{\dots}, 1).$$

Тогда так как $\beta_i = \beta'_{j(i)}$, $\beta_{i+1} = \beta'_{j(i+1)}$, то

$$\vec{\tau}^{(1)} P = \vec{s}^{(1)} = (\dots, 0, \dots, 1, -1, \dots), \quad \vec{\tau}^{(2)} P = \vec{s}^{(2)} = (\dots, 0, \dots, \underset{i}{1}, \underset{i+1}{1}, \dots);$$

получили связку не канонического вида, и, значит, согласно лемме 4 $\vec{s}^{(1)} < \vec{s}^{(2)}$.

Таким образом, $\vec{\tau}^{(1)} P < \vec{\tau}^{(2)} P$, в то время как $\vec{\tau}^{(1)} \sim \vec{\tau}^{(2)}$, т. е. нарушено условие предложения и, значит, система равенств (10) для P выполняться не может.

Осталось рассмотреть

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & & \ddots & \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

с соответствующей ей системой $\vec{\beta}^{(1)} = (\beta_n, \dots, \beta_1)$.

Заметим сразу, что $P^2 = E$, т. е. $P = P^{-1}$.

Пусть n четное. Тогда следующие вершины переходят друг в друга при перестановке P:

$$\vec{\tau}^{(1)} = (1,0,1,0,\dots,1,0) \overset{P}{\longleftrightarrow} (0,1,0,1\dots,) = \vec{\tau}^{(2)},$$

$$\left\{\begin{array}{l} C(\vec{\tau}^{(1)}) = 2^{\frac{n}{2}} a_1 b_1 \dots a_n b_n \\ C(\vec{\tau}^{(2)}) = 2^{\frac{n}{2}-1}(a_1^2+b_1^2)a_2 b_2 \dots a_n b_n \end{array}\right. \Longrightarrow \vec{\tau}^{(2)}P = \vec{\tau}^{(1)} < \vec{\tau}^{(2)} = \vec{\tau}^{(1)}P.$$

Получаем, что для P не выполнено условие предложения.

Пусть теперь n нечетное. Обнаружить явное изменение порядка между вершинами в этом случае не удается, так что будем непосредственно проверять условие (10) для перестановки P:

$$C(\vec{\tau}P; A_1,\dots,A_n) = C\big(\vec{\tau}; A_1',\dots,A_n'\big) \quad \forall\, \vec{\tau} \in \widetilde{T},$$

т. е.

$$C(\vec{\tau}P; a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n) = C\big(\vec{\tau}; a_1',\dots,a_n',b_1',\dots,b_n'\big).$$

Если нам удастся выбрать отсюда подсистему несовместных равенств, то теорема будет доказана.

Для удобства записи набор $\big\{a_1',\dots,a_n',b_1',\dots,b_n'\big\}$ переобозначим переменными $\{c_1,\dots,c_n,d_1,\dots,d_n\}$. Для любого $\vec{\tau} \in \widetilde{T}$ имеем

$$C(\vec{\tau}; a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n) = C(\vec{\tau}P; c_1,\dots,c_n,d_1,\dots,d_n). \tag{13}$$

Будем подбирать различные $\vec{\tau} \in \widetilde{T}$, пытаясь решить эту систему уравнений относительно $c_1,\dots,c_n$, $d_1,\dots,d_n$.

Возьмем

$$\vec{\tau}^{(0)} = (1,1,1,\dots,1) \overset{P}{\longleftrightarrow} (1,1,\dots,1) = \vec{\tau}^{(0)}P$$

и запишем для $\vec{\tau}^{(0)}$ равенство (13), получим

$$a_1 b_1 a_2^2 \dots a_n^2 = c_1 d_1 c_2^2 \dots c_n^2. \tag{14}$$

Берем

$$\vec{\tau}^{(1)} = (1,0,1,0,\dots) \overset{P}{\longleftrightarrow} (1,0,1,0,\dots) = \vec{\tau}^{(1)}P$$
$$\Longrightarrow \quad \text{получаем } a_1 b_1 \dots a_n b_n = c_1 d_1 \dots c_n d_n, \tag{15}$$

$$\vec{\tau}^{(2)} = (0,1,0,1,\dots) \overset{P}{\longleftrightarrow} (0,1,0,1,\dots) = \vec{\tau}^{(2)}P$$
$$\Longrightarrow \big(a_1^2+b_1^2\big)a_2 b_2 \dots a_n b_n = (c_1^2+d_1^2)c_2 d_2 \dots c_n d_n, \tag{16}$$

$$\vec{\tau}^{(3)} = (1,\dots,1,0) \overset{P}{\longleftrightarrow} (0,1,\dots,1) = \vec{\tau}^{(3)}P$$
$$\Longrightarrow 2a_1 b_1 a_2^2 \dots a_{n-1}^2 a_n b_n = \big(c_1^2+d_1^2\big)c_2 d_2 c_3^2 \dots c_n^2, \tag{17}$$

$$\vec{\tau}^{(4)} = (1,\dots,1,-1) \overset{P}{\longleftrightarrow} (1,-1,\dots,-1) = \vec{\tau}^{(4)}P$$
$$\Longrightarrow a_1 b_1 a_2^2 \dots a_{n-1}^2 b_n^2 = c_1 d_1 d_2^2 c_2^2 \dots c_n^2. \tag{18}$$

Теперь набранных равенств будет достаточно. Далее,

$$(14),\ (15) \Longrightarrow \frac{a_2 \dots a_n}{b_2 \dots b_n} = \frac{c_2 \dots c_n}{d_2 \dots d_n}, \tag{19}$$

$$(14),\ (18) \Longrightarrow \frac{b_n^2}{a_n^2} = \frac{d_2^2}{c_2^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{b_n}{a_n} = \pm\frac{d_2}{c_2}, \tag{20}$$

$$(19),\ (20) \Longrightarrow \frac{a_2 \dots a_{n-1}}{b_2 \dots b_{n-1}} = \pm\frac{c_3 \dots c_n}{d_3 \dots d_n}, \tag{21}$$

$$(17),\ (21) \Longrightarrow 2a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n = \pm\big(c_1^2+d_1^2\big)c_2 d_2 \dots c_n d_n. \tag{22}$$

Из (16), (22) вытекает, что $\pm 2a_1 b_1 = a_1^2 + b_1^2$, а это невозможно в силу определения a_k, b_k ($a_k = A_k + 1$, $b_k = A_k - 1$; $A_k > 0$, $A_k \neq 1$). Теорема доказана полностью.

5. Алгоритм поиска параметров

Приступим непосредственно к поиску исходных параметров $x_1, \dots, x_n$ и $A_1, \dots, A_n$ или, что равносильно, эквивалентных им параметров $\beta_1, \dots, \beta_n$ и $a_1, \dots, a_n$, $(b_1, \dots, b_n)$.

Часть I. В конце разд. 1 было выяснено, что можно найти полный спектр пар периодов и амплитуд $\mathrm{SP} = \{[\pm T_k, C_k]\}_{k=1,\dots,N}$ и, в частности, спектр периодов $\mathrm{Sp} = \{\pm T_k\}$ — множество

$$\{\vec{\tau} \cdot \vec{\beta} \mid \vec{\tau} \in \widetilde{T}\} = \{\tau_1\beta_1 + \dots + \tau_n\beta_n \mid \tau_i \in \{-1; 0; 1\}\}$$

как набор чисел в совокупности. Будем искать среди них порождающие периоды $\beta_1, \dots, \beta_n$. Как отмечено ранее, их надо искать в виде упорядоченного набора чисел, так как первоначальные параметры $x_1, \dots, x_n$ выражаются через $\beta_1, \dots, \beta_n$ несимметричным образом: $x_1 \sim \beta_1, \dots, x_n \sim \beta_1 + \dots + \beta_n$. Значит, изменение порядка следования элементов системы $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ дает совершенно другое решение исходной задачи. Однако сначала попробуем найти числа $\beta_1, \dots, \beta_n$ хотя бы без учета их истинной нумерации.

Пусть $\beta_{(1)}, \dots, \beta_{(n)}$ — упорядоченный по возрастанию набор чисел $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$, т. е. $0 < \beta_{(1)} < \dots < \beta_{(n)}$, $\{\beta_{(1)}, \dots, \beta_{(n)}\} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$. Возьмем период $\beta^{(0)} = \beta_{(1)} + \dots + \beta_{(n)} = \beta_1 + \dots + \beta_n$. Очевидно (и это было показано в начале разд. 2), что $\beta^{(0)}$ — максимальное число из элементов спектра Sp. Все остальные периоды получаются вычитанием из $\beta^{(0)}$ положительных линейных комбинаций $\{s_1\beta_{(1)} + \dots + s_n\beta_{(n)}\}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp} &= \{\pi = \tau_1\beta_1 + \dots + \tau_n\beta_n \mid \tau_i \in \{-1; 0; 1\}\} \\ &= \{\pi = \beta^{(0)} - s_1\beta_{(1)} - \dots - s_n\beta_{(n)} \mid s_i \in \{0; 1; 2\}\}.\end{aligned}$$

Таким образом, зная множество Sp и число $\beta^{(0)}$, мы тем самым знаем все числа $\{s_1\beta_{(1)} + \dots + s_n\beta_{(n)} \mid s_i \in \{0; 1; 2\}\}$ в совокупности.

Все числа $\{S = s_1\beta_{(1)} + \dots + s_n\beta_{(n)}\}$ положительны. Упорядочим их по возрастанию: $0 = S_{(0)} < S_{(1)} < S_{(2)}, \dots$.

Шаг 1. Очевидно, $S_{(1)} = \beta_{(1)}$; отсюда найдем $\beta_{(1)}$ — это минимальное из чисел $\{S\}$.

Шаг 2. Нетрудно понять, что $S_{(2)} = [\text{либо } \beta_{(2)}, \text{либо } 2\beta_{(1)}]$. Заметим, что из чисел $\{S\}$, меньше, чем $\beta_{(2)}$, могут быть только $\beta_{(1)}, 2\beta_{(1)}$. Но теперь так как $\beta_{(1)}$ мы уже знаем, то можем найти точку $2\beta_{(1)}$ и отметить ее. Если $2\beta_{(1)} = S_{(2)}$, то, значит, $\beta_{(2)} = S_{(3)}$, если же $2\beta_{(1)} > S_{(2)}$, то $\beta_{(2)} = S_{(2)}$.

Шаг $(k+1)$. Пусть нашли $\beta_{(1)}, \dots, \beta_{(k)}$. Отметим все точки $\{s_1\beta_{(1)} + \dots + s_k\beta_{(k)} \mid s_i \in \{0; 1; 2\}\}$. Тогда, очевидно, $\beta_{(k+1)}$ — минимальное из чисел $\{S\}$ среди неотмеченных.

Таким образом, мы найдем все числа $\beta_{(1)} < \dots < \beta_{(n)}$ и всевозможными перестановками их между собой получим все допустимые системы $\left(\beta'_1, \dots, \beta'_n\right)$ (всего $n!$). Таким образом, задача свелась к поиску исходной системы $(\vec{\beta})$ уже среди всех допустимых $(\vec{\beta}')$. Согласно теореме 1 знание одного лишь спектра периодов Sp здесь недостаточно; так или иначе нужно рассматривать полный спектр пар SP.

Часть II. Итак, мы ищем такой набор параметров $x_1, \dots, x_n$, $A_1, \dots, A_n$ с соответствующей допустимой системой $(\vec{\beta})$, что порождаемый ими полный спектр пар

$$\{[\vec{\tau} \cdot \vec{\beta},\ C(\vec{\tau}; A_1, \dots, A_n)] \mid \vec{\tau} \in \widetilde{T}\}$$

совпадает с исходным полным спектром $\mathrm{SP} = \{[\pm T_k, C_k]\}$, который нам известен.

Все периоды $\{\pm T_k\}$ по определению различны. Поэтому каждый период $\pi = \pm T_k \in \mathrm{Sp}$ определяет сразу и всю пару вместе с соответствующей ему амплитудой C_k из исходного полного спектра пар. Обозначим это соответствие через $C_k \equiv C_f(\pi)$, т. е.

$$\mathrm{Sp} \ni \pi \longleftrightarrow [\pi, C_f(\pi)] \in \mathrm{SP},$$

иначе говоря, исходный полный спектр можно записать в виде

$$\mathrm{SP} = \{[\pi, C_f(\pi)] \mid \pi \in \mathrm{Sp}\}.$$

Замечание. Вновь обозначенные амплитуды $C_f(\pi)$, таким образом, совпадают с $C(\vec{\tau}; A_1, \dots, A_n)$, если мы работаем в правильной исходной системе параметров $\beta_1, \dots, \beta_n$, $A_1, \dots, A_n$ и период π имеет координаты $\vec{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ в этой системе, т. е. $\pi = \vec{\tau} \cdot \vec{\beta}$. Если же период π имеет координаты $\vec{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ в некоторой допустимой системе $\vec{\beta}' = P\vec{\beta}$, то $C_f(\pi) = C_f(\vec{\tau} \cdot \vec{\beta}') = C(\vec{\tau}P; A_1, \dots, A_n)$.

Пусть $(\vec{\beta}')$ — произвольная фиксированная допустимая система порождающих периодов. Мы можем осуществить непосредственную проверку правильности выбора $(\vec{\beta}')$, т. е. выяснить, является ли она исходной системой $(\vec{\beta})$. Предположим, что это так и она индуцирует решение задачи. Тогда можем искать сопутствующие ей величины скачков $A'_1, \dots, A'_n$, исходя из того, что полученный полный спектр пар SP' будет совпадать с исходным полным спектром SP, т. е.

$$\big\{\big[\vec{\tau} \cdot \vec{\beta}', C\big(\vec{\tau}; A'_1, \dots, A'_n\big)\big] \mid \vec{\tau} \in \widetilde{T}\big\} = \{[\vec{\tau} \cdot \vec{\beta}, C_f(\vec{\tau} \cdot \vec{\beta})] \mid \vec{\tau} \in \widetilde{T}\},$$

и мы имеем систему уравнений относительно $A'_1, \dots, A'_n$ с заданной правой частью:

$$C(\vec{\tau}; A'_1, \dots, A'_n) = C_f(\vec{\tau} \cdot \vec{\beta}') \quad \forall\ \vec{\tau} \in \widetilde{T}. \tag{23}$$

У нас N уравнений и n неизвестных, т. е. система переопределена. Согласно основной теореме 2 она совместна тогда и только тогда, когда $\vec{\beta}' = \vec{\beta}$ — исходная система порождающих периодов.

Итак, ищем $A'_1, \dots, A'_n$. Сейчас для сокращения пишем $C(\vec{\tau})$, подразумевая $C\big(\vec{\tau}\big) = C\big(\vec{\tau}; A'_1, \dots, A'_n\big)$. Еще раз отметим, что все численные значения амплитуд $C(\vec{\tau})$ нам известны, так как система $\vec{\beta}'$ у нас задана и, значит, заданы все $C(\vec{\tau}) = C_f(\vec{\tau} \cdot \vec{\beta}')$.

Шаг n. Возьмем вершины с координатами

$$\vec{\tau}^{(1)} = (1, \dots\dots, 1, 0), \quad \vec{\tau}^{(2)} = (1, \dots\dots, 1, -1).$$

Смотрим на схему из леммы 3: $C(\vec{\tau}) = C_1(\vec{\tau}) \dots C_n(\vec{\tau})$. Для $i = 1, \dots, n-1$ очевидно, что $C_i(\vec{\tau}^{(1)}) = C_i(\vec{\tau}^{(2)})$; при $i = n$ будет $C_n(\vec{\tau}^{(1)}) = 2a'_n b'_n$, $C_n(\vec{\tau}^{(2)}) = {b'_n}^2$. Значит, разделив $C(\vec{\tau}^{(1)})$ на $C(\vec{\tau}^{(2)})$, найдем отношение a'_n/b'_n. Вспомнив, что $a'_n = A'_n + 1$, $b'_n = A'_n - 1$, найдем A'_n.

Шаг k. Значения параметров $A'_n, A'_{n-1}, \dots, A'_{k+1}$ уже найдены. Ищем A'_k. Берем вершины с координатами

$$\vec{\tau}^{(1)} = (1, \dots, 1, \overset{k}{0},\ 0, \dots, 0), \quad \vec{\tau}^{(2)} = (1, \dots, 1, -1,\ 0, \dots, 0).$$

Снова смотрим схему для $C_k(\vec{\tau})$: при $i = 1, \dots, k-1$, очевидно, $C_i(\vec{\tau}^{(1)}) = C_i(\vec{\tau}^{(2)})$; при $i = k$ будет $C_k(\vec{\tau}^{(1)}) = 2a'_k b'_k$, $C_k(\vec{\tau}^{(2)}) = {b'_k}^2$. Для $i = k+1, \dots, n$ мы уже знаем значения a'_i, b'_i, поэтому по схеме можем вычислить соответствующие множители $C_i(\vec{\tau}^{(1)})$, $C_i(\vec{\tau}^{(2)})$. Объединяя все это и зная значения $C(\vec{\tau}^{(1)})$, $C(\vec{\tau}^{(2)})$, найдем отношение a'_k/b'_k и соответственно A'_k.

Таким образом, найдем все $A'_1, \dots, A'_n$. Далее, подставляя полученные значения в $C(\vec{\tau}; A'_1, \dots, A'_n)$ для различных $\vec{\tau} \in \widetilde{T}$, проверяем справедливость всех равенств системы (23). Тем самым мы проверим выбранную систему $(\vec{\beta}')$, а в случае положительного результата проверки сразу найдем и сопутствующие параметры $A_1, \dots, A_n$, т. е. полное решение исходной задачи.

Часть III. Сейчас, в принципе, можно было бы ограничиться полученным алгоритмом и проверить таким образом правильность выбора каждой из допустимых систем $(\vec{\beta}')$. В силу доказанной единственности решения исходной задачи такой проверке может удовлетворить только искомый набор параметров, т. е. соответственно только искомая система $(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Для такого перебора всех допустимых систем нужно проделать $n!$ довольно сложных процедур по нахождению величин скачков и последующей их проверке — это плохой алгоритм. Попробуем сократить перебор, используя накопленный материал. Отметим еще несколько вспомогательных утверждений.

Замечание 1. Пусть периоды π^1, π^2 в правильной исходной системе $(\vec{\beta})$ имеют координаты $\vec{\tau}^{(1)}, \vec{\tau}^{(2)}$ соответственно. Будем записывать это в виде $[\pi^1]_{\vec{\beta}} = \vec{\tau}^{(1)}$, $[\pi^2]_{\vec{\beta}} = \vec{\tau}^{(2)}$. Тогда если вершины $\vec{\tau}^{(1)}, \vec{\tau}^{(2)}$ сравнимы, то это соответственным образом определяет знак сравнения между абсолютными величинами $C_f(\pi^1)$ и $C_f(\pi^2)$, т. е.

$$\vec{\tau}^{(1)} \sim \vec{\tau}^{(2)} \Longrightarrow C_f(\pi^1) = C_f(\pi^2), \quad \vec{\tau}^{(1)} < \vec{\tau}^{(2)} \Longrightarrow |C_f(\pi^1)| < |C_f(\pi^2)|.$$

Это непосредственно следует из определения частичного порядка между вершинами.

Весьма полезным окажется следующее

Замечание 2. Пусть $\vec{\tau}^{(1)}, \vec{\tau}^{(2)}$ — специальная связка вершин канонического вида с нулевой k-й координатой

$$\vec{\tau}^{(1)} = (1, \dots, 1, \overset{k}{0}, -1, \dots, -1), \quad \vec{\tau}^{(2)} = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

и π^1, π^2 — периоды, соответствующие этим вершинам в некоторой допустимой системе $(\vec{\beta}')$, т. е. $[\pi^1]_{\vec{\beta}'} = \vec{\tau}^{(1)}$, $[\pi^2]_{\vec{\beta}'} = \vec{\tau}^{(2)}$.

Тогда в исходной системе $(\vec{\beta})$ соответствующие периодам π^1, π^2 вершины $\vec{s}^{(1)} = [\pi^1]_{\vec{\beta}}$, $\vec{s}^{(2)} = [\pi^2]_{\vec{\beta}}$ будут снова специальной связкой, а канонический вид, очевидно, они будут иметь в том и только в том случае, когда либо

(A) $(\beta_1, \dots, \beta_n) = \big(\beta_1^1, \dots, \beta_{k-1}^1, \beta^0, \beta_1^{-1}, \dots, \beta_{n-k}^{-1}\big)$,

либо

(B) $(\beta_1, \dots, \beta_n) = \big(\beta_1^{-1}, \dots, \beta_{n-k}^{-1}, \beta^0, \beta_1^1, \dots, \beta_{k-1}^1\big)$, где $\beta^0 = \beta'_k$, $\{\beta^1_1, \dots, \beta^1_{k-1}\} = \{\beta'_1, \dots, \beta'_{k-1}\}$, $\{\beta^{-1}_1, \dots, \beta^{-1}_{n-k}\} = \{\beta'_{k+1}, \dots, \beta'_n\}$.

Альтернативы (A), (B) на самом деле надо понимать как условие на выбранную систему $(\vec{\beta}')$, а не на исходную систему $(\vec{\beta})$, и их можно переписать в более явном виде относительно $(\vec{\beta}')$:

(A$'$) $\{\beta'_1, \dots, \beta'_k\} = \{\beta_1, \dots, \beta_{k-1}\}$, $\beta'_k = \beta_k$, $\{\beta'_{k+1}, \dots, \beta'_n\} = \{\beta_{k+1}, \dots, \beta_n\}$,

(B$'$) $\{\beta'_1, \dots, \beta'_k\} = \{\beta_1, \dots, \beta_{n-k+2}\}$, $\beta'_k = \beta_{n-k+1}$, $\{\beta'_{k+1}, \dots, \beta'_n\} = \{\beta_1, \dots, \beta_{n-k}\}$.

Лемма 5 (принцип сравнения амплитуд). *Пусть $\vec{\tau}^{(1)}, \vec{\tau}^{(2)}$ — специальная связка вершин канонического вида с k-й нулевой координатой*

$$\vec{\tau}^{(1)} = (1, \dots, 1, \overset{k}{0}, -1, \dots, -1), \quad \vec{\tau}^{(2)} = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1),$$

$(\vec{\beta}')$ — некоторая фиксированная допустимая система и π^1, π^2 — периоды с координатами $\vec{\tau}^{(1)}, \vec{\tau}^{(2)}$ в системе $(\vec{\beta}')$, т. е. $[\pi^1]_{\vec{\beta}'} = \vec{\tau}^{(1)}$, $[\pi^2]_{\vec{\beta}'} = \vec{\tau}^{(2)}$.

Тогда, сравнивая соответствующие амплитуды $C_f(\pi^1)$, $C_f(\pi^2)$, можно получить следующую информацию о выбранной системе $(\vec{\beta}')$. Если $(\vec{\beta}')$ описана в (A$'$) или (B$'$), то $C_f(\pi^1) = C_f(\pi^2)$; если иначе, то $|C_f(\pi^1)| < |C_f(\pi^2)|$ (строго), и система $(\vec{\beta}')$ в этом случае заведомо не является исходной системой.

Доказательство очевидным образом следует из леммы о специальной связке и замечаний 1, 2.

Таким образом, если при выборе системы $(\vec{\beta}')$ смотреть на соответствующие амплитуды $C_f(\pi^1)$, $C_f(\pi^2)$, то возникновение ситуации (A$'$) или (B$'$) можно проследить по выполнение равенства $C_f(\pi^1) = C_f(\pi^2)$. В любом другом случае $C_f(\pi^1) < C_f(\pi^2)$.

Шаг 1–2. Пусть $(\vec{\beta}')$ — произвольная допустимая система. Рассмотрим специальную связку вершин канонического вида со 2-й нулевой координатой

$$\vec{\tau}^{(1)} = (1, 0, -1, \dots, -1), \quad \vec{\tau}^{(2)} = (1, 0, 1, \dots, 1). \tag{24}$$

Пусть π^1, π^2 — периоды, соответствующие $\vec{\tau}^{(1)}, \vec{\tau}^{(2)}$ в выбранной системе $(\vec{\beta}')$.

Применим принцип сравнения амплитуд. Условия (A$'$), (B$'$) для $(\vec{\beta}')$ здесь выглядят следующим образом:

$$\beta'_1 = \beta_1, \quad \beta'_2 = \beta_2, \quad \{\beta'_3, \dots, \beta'_n\} = \{\beta_3, \dots, \beta_n\} \tag{25}$$

либо

$$\beta'_1 = \beta_n, \quad \beta'_2 = \beta_{n-1}, \quad \{\beta'_3, \dots, \beta'_n\} = \{\beta_1, \dots, \beta_{n-2}\}. \tag{26}$$

В этих и только в этих ситуациях $C_f(\pi^1) = C_f(\pi^2)$. В любом другом случае $|C_f(\pi^1)| < |C_f(\pi^2)|$.

Будем перебирать расстановки $(\beta'_1, \dots, \beta'_n)$ так, чтобы пара (β'_1, β'_2) пробегала все возможные значения, и брать периоды π^1, π^2 с одними и теми же координатами (24) относительно каждой очередной выбранной системы $(\vec{\beta}')$. Тогда независимо от взятых значений $\beta'_3, \dots, \beta'_n$ мы в какой-то момент обязательно получим ситуацию (25) и (26). Это мы сразу сможем определить, посмотрев на соответствующие амплитуды, по равенству $C_f(\pi^1) = C_f(\pi^2)$. При всех других же значениях пары (β'_1, β'_2), независимо от значений $\beta'_3, \dots, \beta'_n$ обязательно будет $|C_f(\pi^1)| < |C_f(\pi^2)|$. Соответствующие этим случаям системы $(\vec{\beta}')$ уже не могут являться исходными.

Итак, результатом этого шага являются два возможно верных варианта для определения β_1', β_2', соответствующие ситуациям (25), (26).

Пусть мы получили ситуацию (25), т. е. $\beta_1' = \beta_1$, $\beta_2' = \beta_2$, значит, мы уже нашли β_1, β_2.

Шаг 3. Далее рассматриваем произвольно допустимую систему вида $\vec{\beta}' = \big(\beta_1, \beta_2, \beta_3', \dots, \beta_n'\big)$ и связку канонического вида с 3-й нулевой координатой

$$\vec{\tau}^{(1)} = (1, 1, 0, -1, \dots, -1), \quad \vec{\tau}^{(2)} = (1, 1, 0, 1, \dots, 1). \tag{27}$$

Пусть π^1, π^2 — соответствующие периоды относительно выбранной системы $(\vec{\beta}')$. Снова используем принцип сравнения. Условия (A$'$), (B$'$) для $(\vec{\beta}')$:

$$\big\{\beta_1', \beta_2'\big\} = \{\beta_1, \beta_2\}, \quad \beta_3' = \beta_3, \quad \big\{\beta_4', \dots, \beta_n'\big\} = \{\beta_4, \dots, \beta_n\} \tag{28}$$

либо

$$\big\{\beta_1', \beta_2'\big\} = \{\beta_n, \beta_{n-1}\}, \quad \beta_3' = \beta_{n-2}, \quad \big\{\beta_4', \dots, \beta_n'\big\} = \{\beta_1, \dots, \beta_{n-3}\}. \tag{29}$$

Но так как у нас уже $\beta_1' = \beta_1$, $\beta_2' = \beta_2$, то ситуация (29) здесь уже невозможна, значит, $\beta_3' = \beta_3$, $\big\{\beta_4', \dots, \beta_n'\big\} = \{\beta_4, \dots, \beta_n\}$.

Будем перебирать допустимые системы вида $\big(\beta_1, \beta_2, \beta_3', \dots, \beta_n'\big)$ так, чтобы β_3' пробегало все возможные значения, и брать периоды π^1, π^2 с одними и теми же координатами (27) относительно каждой очередной системы $\vec{\beta}' = (\beta_1, \beta_2, \beta_3', \dots, \beta_n')$. Сравнивая соответствующие амплитуды при вершинах связки $\vec{\tau}^{(1)}, \vec{\tau}^{(2)}$, мы проследим возникновение ситуации (28) по выполнению равенства $C_f(\pi^1) = C_f(\pi^2)$, и, значит, тем самым определим правильность выбора параметра β_3'.

Шаг k. Уже найдены значения $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1}$. Перебираем допустимые системы вида $\vec{\beta}' = \big(\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \beta_k', \dots, \beta_n'\big)$ так, чтобы β_k' пробегало все возможные значения, и берем периоды π^1, π^2 с координатами

$$\vec{\tau}^{(1)} = (1, \dots, 1, 0, -1, \dots, -1), \quad \vec{\tau}^{(2)} = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

относительно каждой очередной выбранной допустимой системы $\vec{\beta}'$. Для выбора значения β_k' остается единственно верный вариант, соответствующий ситуации, когда $C_f(\pi^1) = C_f(\pi^2)$; а в любом другом случае $|C_f(\pi^1)| < |C_f(\pi^2)|$.

Так мы определим все $\beta_1, \dots, \beta_n$ в предположении, что на шаге 1–2 была получена ситуация (25). Если же на шаге 1–2 была получена ситуация (26), т. е. вместо β_1, β_2 у нас найдены β_n, β_{n-1}, то, действуя таким же образом, мы на 3-м шаге найдем $\beta_3' = \beta_{n-2}$, и т. д. В конечном итоге мы найдем весь набор $(\beta_1', \dots, \beta_n') = (\beta_n, \dots, \beta_1)$, т. е. расставленный в точности в обратном порядке.

Итак, теперь из всех допустимых систем остается перебрать только две: искомую $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ и «обратную» к ней $(\beta_n, \dots, \beta_1)$, для чего уже можно использовать часть II данного алгоритма.

Отметим, что в последней части алгоритм разветвляется только на одном шаге 1–2, а на последующих шагах значение очередного параметра находится однозначно, т. е. ветвления алгоритма больше не происходит. Значит, количество переборов на каждом шаге должно просто складываться,и всего выходит порядка $n(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots \sim n^2$ действий для каждого из двух вариантов, получившихся на шаге 1–2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
2. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма — Лиувилля. М.: Наука, 1984.
3. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1970.
4. *Марченко В. А.* Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля. Киев: Наукова думка, 1972.
5. *Shepel'sky D. G.* The Inverse Problem of the Medium's Conductivity in a Class of Discontinuous Increasing Functions // Adv. Soviet Math. 1994. V. 19. Spectral Operator Theory and Related Topics. P. 209–230.

Статья поступила 28 августа 2002 г.

Шестаков Алексей Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
shestak@math.nsc.ru