Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2004. Том 45, № 3

УДК 512.64

КОЛЬЦО ИНВАРИАНТОВ ТРЕХ МАТРИЦ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА НАД ПОЛЕМ ПРОСТОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

А. А. Лопатин

Аннотация: Найдены минимальная система порождающих и однородная система параметров алгебры инвариантов трех матриц третьего порядка над полем произвольной характеристики.

Ключевые слова: матричные инварианты, минимальная система порождающих, система параметров.

§ 1. Введение

Пусть K будет бесконечным полем характеристики p ($p = 0, 2, 3, \dots$). Через $M_{n,d}(K) = M_n(K) \oplus \dots \oplus M_n(K)$ обозначим сумму d копий пространства $n \times n$-матриц, где $d \geq 1$. Полная линейная группа $GL_n(K)$ действует диагонально сопряжением на $M_{n,d}(K)$: для $g \in GL_n(K)$, $A_i \in M_n(K)$ ($i = \overline{1,d}$) имеем $g(A_1, \dots, A_d) = (gA_1g^{-1}, \dots, gA_dg^{-1})$. Координатное кольцо аффинного многообразия $M_{n,d}(K)$ представляет собой алгебру полиномов от dn^2 переменных $K_{n,d} = K[x_{ij}(r) \mid 1 \leq i,j \leq n,\ r = \overline{1,d}]$, где $x_{ij}(r)$ обозначает функцию, отображающую $(A_1, \dots, A_d) \in M_{n,d}(K)$ в (i,j)-й элемент матрицы A_r. Действие $GL_n(K)$ на $M_{n,d}(K)$ индуцирует действие $GL_n(K)$ на $K_{n,d}$: $(g \cdot f)(A) = f(g^{-1}A)$, где $g \in GL_n(K)$, $f \in K_{n,d}$, $A \in M_{n,d}$. Через $R_{n,d} = \{f \in K_{n,d} \mid \forall g \in GL_n(K) : gf = f\}$ обозначим матричную алгебру инвариантов. Пусть $X_r = (x_{ij}(r))_{1 \leq i,j \leq n}$ — общие матрицы порядка n ($r = \overline{1,d}$), а $\sigma_k(A)$ — коэффициенты при λ^{n-k} у характеристического многочлена матрицы $A \in M_n(K)$, т. е. $\det(\lambda E - A) = \lambda^n - \sigma_1(A)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n(A)$. Здесь через E обозначена единичная матрица. Алгебра $R_{n,d}$ порождается всеми элементами вида $\sigma_k(X_{i_1} \dots X_{i_s})$ [1]. Теорема Прочези — Размыслова о соотношениях $R_{n,d}$ была распространена на случай поля произвольной характеристики в [2].

Положим $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Алгебра $R_{n,d}$ обладает естественной N_0-градуировкой степенями и N_0^d-градуировкой мультистепенями. Минимальное по включению N_0^d-однородное множество $G \subset R_{n,d}$, порождающее $R_{n,d}$, называется *минимальной однородной системой порождающих* (МСП) алгебры $R_{n,d}$. МСП $R_{2,d}$ была установлена в [3] для $p = 0$, в [4] для $p > 2$ и в [5] для $p = 2$. В [6] приведены некоторые верхние и нижние оценки на максимальные степени элементов МСП $R_{n,d}$ для произвольного p. В [7] для случая $p = 0$ была вычислена мощность МСП $R_{3,d}$ при $d \leq 10$ при помощи компьютера и указан

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00674).

способ вычисления этого множества на компьютере при произвольном d. Точная верхняя граница степеней элементов МСП $R_{3,d}$ была установлена в [8] (за исключением случая $p=3$, $d=6k+1$, $k>0$, где неточность в определении точной верхней границы не превышает 1). В данной работе указана МСП $R_{3,3}$ для произвольного p и вычислена мощность МСП $R_{3,d}$ при $p=0$, $d\geq 2$.

Согласно лемме Нётер о нормализации $R_{n,d}$ содержит *однородную* (относительно N_0-градуировки) *систему параметров* (ОСП), т. е. такое множество алгебраически независимых элементов, что $R_{n,d}$ цела над порожденной ими подалгеброй. В случае $p=0$ Тераниши нашел ОСП для $R_{3,2}$, $R_{4,2}$ [9] и для $R_{2,d}$ при $d\geq 2$ [10]. В [5] ОСП была указана для $R_{2,d}$ в случае $p>0$, $d\geq 2$. В этой работе построена ОСП для $R_{3,3}$ при произвольном p.

Пусть S — свободная полугруппа, порожденная буквами $\{x_1,x_2,\dots\}$. Степень слова $u\in S$ обозначим через $\deg(u)$, мультистепень — через $\mathrm{mdeg}(u)$, а степень слова u по букве x_j — через $\deg_{x_j}(u)$. Предполагаем, что все слова являются непустыми, если не оговорено противное.

Через $R^+_{n,d}$ обозначим подалгебру, порожденную всеми элементами $R_{n,d}$ положительной степени. Элемент $r\in R_{n,d}$ называется *разложимым*, если он выражается через элементы $R_{n,d}$ меньшей степени, т. е. принадлежит идеалу $\left(R^+_{n,d}\right)^2$. Несложно видеть, что $\{r_i\}\in R_{n,d}$ будет МСП тогда и только тогда, когда $\{\overline{r_i}\}$ будет базисом $\overline{R_{n,d}}=R_{n,d}/\left(R^+_{n,d}\right)^2$. Если два элемента $r_1,r_2\in R_{n,d}$ равны по модулю идеала $\left(R^+_{n,d}\right)^2$, то пишем $r_1\equiv r_2$. Через $K\langle x_1,\dots,x_d\rangle^{\#}$ обозначим свободную ассоциативную K-алгебру без единицы, свободно порожденную $x_1,\dots,x_d$. Идеал, порожденный $f_1,\dots,f_s$, обозначим через $\mathrm{id}\{f_1,\dots,f_s\}$. Существует тесная связь между разложимостью элемента $R_{n,d}$ и равенством нулю некоторого элемента $N_{n,d}=K\langle x_1,\dots,x_d\rangle^{\#}/\mathrm{id}\{x^n|x\in K\langle x_1,\dots,x_d\rangle^{\#}\}$ (см. лемму 2 ниже). Пусть $A_{n,d}$ будет K-алгеброй без единицы, порожденной общими матрицами $X_1,\dots,X_d$. Гомоморфизм алгебр $\phi: A_{n,d}\to N_{n,d}$, переводящий X_i в x_i, корректно определен [8].

Назовем слово $w\in S$ *каноническим* по x_i, если оно имеет один из следующих видов: w_1, $w_1x_iw_2$, $w_1x_i^2w_2$, $w_1x_i^2ux_iw_2$, где слова w_1,w_2,u не содержат x_i, слова w_1,w_2 могут быть пустыми. Слово, каноническое по всем буквам, называется *каноническим*. В [8] доказаны

Лемма 1. 1. *Используя тождества $N_{3,d}$*

$$x_iux_i=-x_i^2u-ux_i^2,\quad x_iux_i^2=-x_i^2ux_i,$$

любое не равное нулю слово $w\in N_{3,d}$ можно представить в виде суммы канонических слов той же мультистепени.

2. *В $N_{3,d}$ справедливо $x_i^2ux_j^2=0$, если $p\neq 3$.*

3. *В $N_{3,d}$ справедливо $x_j^2x_i^2x_jx_i=-x_i^2x_j^2x_ix_j$.*

4. *В $N_{3,d}$ справедливо $x_1^2x_2^2x_1\neq 0$.*

5. *Пусть $p=3$ и тождество $\sum\alpha_iu_i=0$ в $N_{3,d}$, $\alpha_i\in K$, таково, что $\deg_{x_k}(u_i)=1,2$ для некоторого k. Тогда при подстановке $x_k=1$ в $\sum\alpha_iu_i=0$ также получается тождество $N_{3,d}$.*

Лемма 2. 1. *Пусть $G\in A_{n,d}$, $i=\overline{1,d}$. Тогда*

а) *если G не содержит X_i и $\mathrm{tr}(GX_i)$ разложим, то $\phi(G)=0$;*

б) *если $\phi(G)=0$, то $\mathrm{tr}(GX_i)$ разложим.*

2. *Пусть $G\in A_{n,d}$ и G не содержит X_i для некоторого $i=\overline{1,d}$. Тогда если $\mathrm{tr}(GX_i^2)$ разложим, то $\phi(G)x_i+x_i\phi(G)=0$.*

3. *Если для слова* $U \in A_{n,d}$ *след* $\mathrm{tr}(U)$ *неразложим, то* $\mathrm{tr}(U)$ *можно представить в виде* $\mathrm{tr}(U) \equiv \sum \alpha_i \,\mathrm{tr}(W_i)$, *где слова* $W_i \in A_{n,d}$ *канонические,* $\mathrm{mdeg}(U) = \mathrm{mdeg}(W_i)$, $\alpha_i \in K$.

4. *В* $R_{3,d}$ *справедливо* $\sigma_2(UV) \equiv \mathrm{tr}(U^2V^2)$, *где* $U, V \in A_{n,d}$.

5. *Точная верхняя граница степеней элементов* МСП $R_{3,3}$ *равна* 6, *если* $p \neq 3$, *и равна* 8, *если* $p = 3$.

6. *Точная верхняя граница степеней элементов* МСП $R_{3,d}$ $(d \geq 2)$ *равна* 6, *если* $p = 0$.

Результат замены $X_1 \to A_1, \dots, X_d \to A_d$ в $r \in R_{n,d}$, где $A_1, \dots, A_d \in M_n(K)$ ($A_1, \dots, A_d$ — некоторые общие матрицы порядка n соответственно), обозначим через $r|_{A_1,\dots,A_d}$. Эти же обозначения будем использовать для элементов из некоторого подмножества $R_{n,d}$. Если $Q \subset R_{n,d}$, $A_i \in M_n(K)$, $i = \overline{1,d}$, и все элементы $Q|_{A_1,\dots,A_d}$ являются нулевыми, то пишем $Q|_{A_1,\dots,A_d} = 0$.

Если $A, B \in M_n(K)$ — эквивалентные матрицы, т. е. существует $T \in GL_n(K)$ такое, что $A = TBT^{-1}$, мы пишем $A \sim B$. Через $\mathrm{rank}(A)$ обозначим ранг матрицы A. Положим

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее предполагаем $n = 3$, если не оговорено противное.

§ 2. Минимальная однородная система порождающих

Пусть $i, j, k = \overline{1,3}$ и i, j, k различны. Через G_1 обозначим множество

$$\mathrm{tr}(X_i); \quad \mathrm{tr}(X_iX_j),\ i < j; \quad \sigma_2(X_i);$$

$$\mathrm{tr}(X_1X_2X_3),\ \mathrm{tr}(X_1X_3X_2); \quad \mathrm{tr}\big(X_i^2X_j\big); \quad \sigma_3(X_i);$$

$$\mathrm{tr}\big(X_i^2X_j^2\big),\ i < j; \quad \mathrm{tr}\big(X_i^2X_jX_k\big); \quad \mathrm{tr}\big(X_i^2X_j^2X_k\big); \quad \mathrm{tr}\big(X_i^2X_jX_iX_k\big),\ j < k,$$

через G_2 — множество

$$\mathrm{tr}\big(X_i^2X_j^2X_iX_j\big),\ i < j; \quad \mathrm{tr}\big(X_i^2X_j^2X_iX_k\big); \quad \mathrm{tr}\big(X_1^2X_2^2X_3^2\big),$$

и через G_3 — множество

$$\mathrm{tr}\big(X_i^2X_j^2X_iX_j\big),\ i < j; \quad \mathrm{tr}\big(X_i^2X_j^2X_iX_k\big); \quad \mathrm{tr}\big(X_1^2X_2^2X_3^2\big),\ \mathrm{tr}\big(X_1^2X_3^2X_2^2\big);$$

$$\mathrm{tr}\big(X_iX_j^2X_k^2X_jX_k\big),\ j < k; \quad \mathrm{tr}\big(X_i^2X_j^2X_iX_k^2\big),\ j < k; \quad \mathrm{tr}\big(X_i^2X_j^2X_k^2X_jX_k\big),\ j < k.$$

Теорема 1. (i) *Если* $p \neq 3$, *то* $G_{\mathrm{i}} = G_1 \cup G_2$ *является минимальной однородной системой порождающих* $R_{3,3}$.

(ii) *Если* $p = 3$, *то* $G_{\mathrm{ii}} = G_1 \cup G_3$ *является минимальной однородной системой порождающих* $R_{3,3}$.

Замечание. Мощность G_{i} равна 48, мощность G_{ii} равна 58.

Для того чтобы доказать теорему, сформулируем следующую лемму.

Лемма 3. 1. *Элементы* $\mathrm{tr}(X_1X_2X_3)$, $\mathrm{tr}(X_1X_3X_2)$ *линейно независимы в* $\overline{R_{3,3}}$.

2. *Элементы* $\mathrm{tr}\big(X_1^2X_2X_3\big)$, $\mathrm{tr}\big(X_1^2X_3X_2\big)$ *линейно независимы в* $\overline{R_{3,3}}$.

3. *Элементы* $\mathrm{tr}\big(X_1^2X_2^2X_3\big)$, $\mathrm{tr}\big(X_2^2X_1^2X_3\big)$ *линейно независимы в* $\overline{R_{3,3}}$.

4. *Если $p=3$, то элементы $\mathrm{tr}\big(X_1^2X_2^2X_3^2\big)$, $\mathrm{tr}\big(X_1^2X_3^2X_2^2\big)$ линейно независимы в $\overline{R_{3,3}}$. Если $p\neq 3$, то они линейно зависимы в $\overline{R_{3,3}}$.*

Доказательство. Очевидно, что пп. 1, 2 следуют из п. 3, так как если $\sum\limits_i \mathrm{tr}(U_iX_j)\equiv 0$, где $U_i\in A_{n,d}$ и $\deg_{X_j}(U_i)=0$, то $\sum\limits_i \mathrm{tr}\big(U_iX_j^2\big)\equiv 0$.

3. Пусть
$$\alpha\,\mathrm{tr}\big(X_1^2X_2^2X_3\big)+\beta\,\mathrm{tr}\big(X_2^2X_1^2X_3\big)\equiv 0,$$
где $\alpha\neq 0$ или $\beta\neq 0$. Отсюда $\alpha x_1^2x_2^2+\beta x_2^2x_1^2=0$ в $N_{3,d}$ по п. 1 леммы 2. В силу неравенства $x_2^2x_1^2\neq 0$ в $N_{3,d}$ (лемма 1, п. 4) имеем $\alpha\neq 0$. Следовательно, $x_1^2x_2^2x_1=-(\beta/\alpha)x_2^2x_1^3=0$ в $N_{3,d}$, но $x_1^2x_2^2x_1\neq 0$ в $N_{3,d}$ (лемма 1, п. 4). Получили противоречие.

4. Пусть $p=3$ и
$$\alpha\,\mathrm{tr}\big(X_1^2X_2^2X_3^2\big)+\beta\,\mathrm{tr}\big(X_2^2X_1^2X_3^2\big)\equiv 0,$$
где $\alpha\neq 0$ или $\beta\neq 0$. Тогда $\big(\alpha x_1^2x_2^2+\beta x_2^2x_1^2\big)x_3+x_3\big(\alpha x_1^2x_2^2+\beta x_2^2x_1^2\big)=0$ в $N_{3,d}$ (лемма 2, п. 2). Замена $x_3=1$ дает $2\alpha x_1^2x_2^2+2\beta x_2^2x_1^2=0$ (лемма 1, п. 5), что, как показано выше, противоречиво.

Пусть $p\neq 3$. Тождество $x_1^2x_2x_3^2=0$ в $N_{3,d}$ (лемма 1, п. 2) влечет
$$\mathrm{tr}\big(X_1^2X_2X_3^2X_2\big)\equiv 0$$
(лемма 2, п. 1). С другой стороны, тождество $x_2x_3^2x_2=-x_2^2x_3^2-x_3^2x_2^2$ в $N_{3,d}$ (лемма 1, п. 1) влечет
$$\mathrm{tr}\big(X_1^2X_2X_3^2X_2\big)\equiv -\,\mathrm{tr}\big(X_1^2X_2^2X_3^2\big)-\mathrm{tr}\big(X_1^2X_3^2X_2^2\big)$$
(лемма 2, п. 1). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Из лемм 1 и 2 следует, что G_{i} (G_{ii} соответственно) порождает $R_{3,3}$, когда $p\neq 3$ ($p=3$). Эти же леммы показывают, что все элементы G_{i} (G_{ii}) неразложимы, если $p\neq 3$ ($p=3$). Таким образом, достаточно доказать, что элементы G_{i} (G_{ii}) одинаковой мультистепени линейно независимы в $\overline{R_{3,3}}$. Но это верно благодаря лемме 3.

Предложение 1. *Пусть $p=0$. Тогда мощность* МСП *$R_{3,d}$ равна*
$$M_d=3d+5C_d^2+24C_d^3+51C_d^4+47C_d^5+15C_d^6,$$
где $C_d^i=0$ при $i>d$.

Доказательство. Через G_d обозначим множество элементов некоторой N_0^d-однородной МСП $R_{3,d}$, зависящих от $X_1,\dots,X_d$. Несложно видеть, что
$$\bigcup_{k=1}^{d}\ \bigcup_{1\le i_1<\dots<i_k\le d} G_k|_{X_{i_1},\dots,X_{i_k}}$$
будет МСП $R_{3,d}$. Поэтому $M_d=\sum\limits_{k=1}^{d}a_kC_d^k$, где a_k — мощность G_k. Алгебра $R_{3,d}$ порождается элементами степени не больше 6 (см., например, лемму 2, п. 6), поэтому $a_i=0$ при $i>6$. В [7] было вычислено, что

d	1	2	3	4	5	6
M_d	3	11	48	189	607	1635,

откуда следует требуемая формула.

§ 3. Однородная система параметров

Теорема 2. *Множество $P \subset R_{3,3}$:*

$$\sigma_k(X_i),\ i,k=\overline{1,3};\quad \mathrm{tr}(X_1X_2),\ \mathrm{tr}(X_1X_3),\ \mathrm{tr}(X_2X_3);$$
$$\mathrm{tr}\big(X_1^2X_2\big)+\alpha_1\,\mathrm{tr}\big(X_2^2X_3\big)+\alpha_2\,\mathrm{tr}\big(X_3^2X_1\big),$$
$$\mathrm{tr}\big(X_1^2X_3\big)-\beta_1\,\mathrm{tr}\big(X_3^2X_2\big),\ \mathrm{tr}\big(X_1^2X_3\big)-\beta_2\,\mathrm{tr}\big(X_2^2X_1\big),$$
$$\mathrm{tr}\big(X_1X_2X_3\big)+\gamma\,\mathrm{tr}\big(X_1X_3X_2\big),\quad \mathrm{tr}\big(X_1^2X_2^2\big),\ \mathrm{tr}\big(X_1^2X_3^2\big),\ \mathrm{tr}\big(X_2^2X_3^2\big),$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma$ — ненулевые элементы K и $\alpha_1+\beta_1+\alpha_2\beta_2\neq 0$, является однородной системой параметров $R_{3,3}$.

Несложно видеть, что если утверждение теоремы верно над алгебраическим замыканием поля K, то оно верно и над полем K. Поэтому далее в этом параграфе считаем, что поле K алгебраически замкнуто.

Нам понадобится следующая теорема, доказанная Гильбертом при $p=0$ [11]. В [12] приводится ее доказательство при $p=0$, но оно годится и для произвольного p.

Теорема [11, 12]. *Пусть на аффинном многообразии X регулярно действует алгебраическая группа G и это действие стандартным образом переносится на координатное кольцо $K[X]$, состоящее из регулярных функций из X в K. Пусть инварианты $I_1,\dots,I_s\in K[X]^G$ таковы, что если $I_1(x)=\dots=I_s(x)=0$ для некоторого $x\in X$, то для любого однородного непостоянного инварианта $I\in K[X]^G$ имеем $I(x)=0$. Тогда кольцо инвариантов $K[X]^G$ цело над подкольцом, порожденным $I_1,\dots,I_s$.*

Через $\mathrm{tr.deg}(R_{n,d})$ обозначим степень трансцендентности $R_{n,d}$ $(n\geq 2)$, т. е. мощность ее ОСП. Следующая лемма является фольклором, но для полноты изложения приводится ее доказательство.

Лемма 4. $\mathrm{tr.deg}(R_{n,d})=(d-1)n^2+1$ *при* $d\geq 2$.

Доказательство. Напомним теорему, которая доказывается, например, в [13].

Теорема. *Если $\phi: X\to Y$ является доминантным морфизмом неприводимых алгебраических многообразий, то существует открытое непустое подмножество $U\subset Y$ такое, что $\dim(\phi^{-1}(y))=\dim(X)-\dim(Y)$ для любого $y\in U$.*

Рассмотрим $\pi: M_{n,d}(K)\to M_{n,d}(K)/GL_n(K)=\mathrm{Spec}(R_{n,d})$ — категорный фактор $M_{n,d}(K)$ по действию $GL_n(K)$, где $\mathrm{Spec}(R_{n,d})$ обозначает аффинное многообразие, координатное кольцо которого изоморфно $R_{n,d}$. Пусть F_d будет свободной ассоциативной K-алгеброй, свободно порожденной $f_1,\dots,f_d$. Каждому ее представлению $\Psi: F_d\to M_n(K)$ сопоставим $(\Psi(f_1),\dots,\Psi(f_d))\in M_{n,d}(K)$. Через W обозначим множество точек $M_{n,d}(K)$, соответствующих простым представлениям. Известно, что если точка принадлежит W, то ее $GL_n(K)$-орбита замкнута и совпадает с содержащим ее слоем π (см. [14, 15]).

По теореме Фробениуса представление Ψ является простым тогда и только тогда, когда существуют $g_1,\dots,g_{n^2}\in F_d$ такие, что $\Psi(g_1),\dots,\Psi(g_{n^2})$ линейно независимы. Последнее эквивалентно тому, что

$$\delta=\det\begin{pmatrix}\Psi(g_1)_1 & \dots & \Psi(g_1)_{n^2}\\ \vdots & & \vdots\\ \Psi(g_{n^2})_1 & \dots & \Psi(g_{n^2})_{n^2}\end{pmatrix}\neq 0,$$

где через $\Psi(g_i)_j$ обозначен j-й элемент матрицы $\Psi(g_i)$. Число δ равно значению некоторого многочлена $h_{g_1,\dots,g_{n^2}} \in K_{n,d}$, зависящего от $g_1,\dots,g_{n^2}$, посчитанного в точке $x_{ij}(r) = \Psi(f_r)_{ij}$, где $\Psi(f_r)_{ij}$ — (i,j)-й элемент матрицы $\Psi(f_r)$, $i,j = \overline{1,n}$, $r = \overline{1,d}$. Для $h \in K_{n,d}$ положим $\overline{V}(h) = \{A \in M_{n,d}(K) | h(A) \neq 0\}$. Несложно видеть, что

$$W = \bigcup_{g_1,\dots,g_{n^2} \in F_d} \overline{V}(h_{g_1,\dots,g_{n^2}})$$

является открытым множеством.

Применим к π упомянутую теорему из [13]. В силу неприводимости многообразия $M_{n,d}(K)$ существует $x \in \pi^{-1}(U) \cap W$. Рассмотрим $y \in U$ такой, что $x \in \pi^{-1}(y)$. Следовательно $\mathrm{O}(x) = \pi^{-1}(y)$, где $\mathrm{O}(x)$ обозначает орбиту x. Имеем $\dim \mathrm{O}(x) = \dim GL_n(K) - \dim \mathrm{St}(x)$, где через $\mathrm{St}(x)$ обозначен стабилизатор x. В силу $\dim GL_n(K) = n^2$, $\dim \mathrm{St}(x) = 1$, $\dim M_{n,d} = n^2 d$ и $\dim \mathrm{Spec}(R_{n,d}) = \mathrm{tr.deg}(R_{n,d})$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $A \in M_3(K)$ *и* $\sigma_k(A) = 0$, $k = \overline{1,3}$. *Тогда* $\mathrm{rank}(A) \leq 2$. *Более того,*

$\mathrm{rank}(A) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $A = 0$,
$\mathrm{rank}(A) = 1$ *тогда и только тогда, когда* $A \sim J_1$,
$\mathrm{rank}(A) = 2$ *тогда и только тогда, когда* $A \sim J_2$,
$\mathrm{rank}(A) \leq 1$ *тогда и только тогда, когда* $A^2 = 0$.

Доказательство. Лемма следует из теоремы о жордановой форме матрицы и тождества Гамильтона — Кэли: $A^3 - \mathrm{tr}(A)A^2 + \sigma_2(A)A - \det(A)E = 0$, где $A \in M_3(K)$.

Лемма 6. *Пусть* $A = J_2$, $B \in M_3(K)$, $\mathrm{rank}(B) = 2$, $\sigma_k(B) = 0$, $k = \overline{1,3}$, $\mathrm{tr}(AB) = 0$, $\mathrm{tr}(A^2B^2) = 0$. *Тогда выполняется один из вариантов:*

1) $B = \begin{pmatrix} 0 & t_1 & t_2 \\ 0 & 0 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

2) $B = TAT^{-1}$, $T = \begin{pmatrix} t_3t_4 & t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 & t_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, где $\det(T) \neq 0$,

3) $B = TAT^{-1}$, $T = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3t_4 \\ t_3 & 0 & t_4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\det(T) \neq 0$.

Доказательство. Лемма 5 влечет $B = TJ_2T^{-1}$ для некоторой матрицы $T \in GL_3(K)$. Заметим, что для

$$L = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

где $a, b, c \in K$, $a \neq 0$, выполнено $TJ_2T^{-1} = (TL)J_2(TL)^{-1}$. Несложно найти a, b, c $(a \neq 0)$ такие, что TL равна одной из приведенных ниже матриц:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заменяя T на TL и рассматривая уравнения $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A^2B^2) = 0$, получаем требуемое.

Лемма 7. *Пусть* $A = J_1$, $\sigma_k(B) = 0$, $k = \overline{1,3}$, $\mathrm{tr}(AB) = 0$, $\mathrm{rank}(B) = 1$. *Тогда* $AB = 0$ *или* $BA = 0$.

Доказательство. Пусть $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le 3}$. Уравнение $\mathrm{tr}(AB) = 0$ влечет $b_{21} = 0$. Лемма 5 дает $B^2 = 0$. Поэтому $b_{23}b_{31} = 0$. Следовательно, возможны три случая: $b_{23} = 0$, $b_{31} \ne 0$ либо $b_{23} \ne 0$, $b_{31} = 0$, либо $b_{23} = b_{31} = 0$. Производя прямые вычисления и делая соответствующие замены, получаем, что выполняется один из следующих вариантов:

1) $B = \begin{pmatrix} b_3 & b_2b_3/b_1 & -b_3^2/b_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & -b_3 \end{pmatrix}$, где $b_1 \ne 0$,

2) $B = \begin{pmatrix} 0 & b_1b_3/b_2 & b_1 \\ 0 & b_3 & b_2 \\ 0 & -b_3^2/b_2 & -b_3 \end{pmatrix}$, где $b_2 \ne 0$,

3) $B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 \end{pmatrix}$, где $b_2 = 0$ или $b_3 = 0$.

Лемма доказана.

Следующая лемма была доказана в [9].

Лемма 8. *Пусть* $A, B \in M_3(K)$, $\mathrm{rank}(A) = 2$, $\sigma_k(A) = \sigma_k(B) = 0$, $k = \overline{1,3}$, *и* $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A^2B^2) = \mathrm{tr}(A^2B) = 0$. *Тогда* $\mathrm{tr}(AB^2) = 0$. *Если еще и* $A = J_2$, *то матрица* B *является строго верхнетреугольной.*

Доказательство. С точностью до сопряжения можем считать, что $A = J_2$ и $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le 3}$. Уравнение $\mathrm{tr}(A^2B) = 0$ влечет $b_{31} = 0$, и уравнения $\mathrm{tr}(AB) = b_{21} + b_{32} = 0$, $\mathrm{tr}(A^2B^2) = b_{21}b_{32} = 0$ влекут $b_{21} = b_{32} = 0$. Из $\sigma_k(B) = 0$, $k = \overline{1,3}$, следует, что $b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0$. Значит, матрица B строго верхнетреугольна, и $\mathrm{tr}(AB^2) = 0$.

Лемма 9. *Пусть* $Q \subset R_{3,d}$ *будет множеством*

$$\sigma_k(X_i),\ k = \overline{1,3},\ i = \overline{1,d}, \quad \mathrm{tr}\big(X_i^2X_j\big),\ 1 \le i \ne j \le d,$$

$$\mathrm{tr}\big(X_i^2X_j^2\big),\ 1 \le i < j \le d, \quad \mathrm{tr}(X_{\sigma(1)}\dots X_{\sigma(r)}),\ r = \overline{2,d},\ \sigma \in S_r.$$

Если для $A_1, \dots, A_s \in M_3(K)$ *выполнено* $Q|_{A_1,\dots,A_d} = 0$, *то для любого* $r \in R_{3,d}^+$ *будет* $r|_{A_1,\dots,A_d} = 0$.

Доказательство. Если существует $i = \overline{1,d}$ такое, что $A_i = 0$, то лемма доказана по индукции по d.

Пусть $\mathrm{rank}(A_j) = 2$ для некоторого $j = \overline{1,d}$. Сопрягая, можем считать $A_j = J_2$. Лемма 8 влечет, что матрица A_i строго верхнетреугольна ($i = \overline{1,d}$). Таким образом, требуемое доказано.

Единственный случай, который осталось рассмотреть, это $\mathrm{rank}(A_i) = 1$, $i = \overline{1,d}$ (см. лемму 5). Прямые вычисления показывают $J_1BJ_1 = \mathrm{tr}(J_1B)J_1$, $B \in M_3(K)$, и, сопрягая приведенное равенство, получаем $A_iBA_i = \mathrm{tr}(A_iB)A_i$, $B \in M_3(K)$, $i = \overline{1,d}$. Это тождество влечет, что если V — слово от матриц $A_1, \dots, A_d$ и существует j такое, что $\deg_{A_j}(V) \ge 2$, то $V = 0$. Следовательно, $\mathrm{tr}(U) = 0$ для любого слова U от $A_1, \dots, A_d$.

Докажем индукцией по $\deg(V)$, что $\sigma_2(V) = 0$, где V — слово от матриц $A_1, \dots, A_d$. Имеем $\sigma_2(UV) \equiv \mathrm{tr}(U^2V^2)$ (лемма 2, п. 4), где U, V — слова от $A_1, \dots, A_d$. Предположение индукции влечет $\sigma_2(U) = \sigma_2(V) = 0$, что вместе с доказанной частью леммы приводит к $\sigma_2(UV) = 0$.

Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть $Q \subset R_{3,d}$ будет множеством*

$$\sigma_k(X_i),\ k,i=\overline{1,3},\quad \operatorname{tr}(X_iX_j),\ 1\le i<j\le 3,\quad \operatorname{tr}\big(X_i^2X_j\big),\ 1\le i\ne j\le 3,$$

$$\operatorname{tr}\big(X_i^2X_j^2\big),\ 1\le i<j\le 3,\quad \alpha\operatorname{tr}(X_1X_2X_3)+\beta\operatorname{tr}(X_1X_3X_2),$$

где $\alpha,\beta\in K$ не равны нулю. Если для матриц $A_1,A_2,A_3\in M_3(K)$ выполнено $Q|_{A_1,A_2,A_3}=0$, то $r|_{A_1,A_2,A_3}=0$ для любого $r\in R_{3,3}^+$.

Доказательство. Если существует $j=\overline{1,3}$ такое, что $A_j=0$, то лемма 9 завершает доказательство.

Если существует $j=\overline{1,3}$ такое, что $\operatorname{rank}(A_j)=2$, то, сопрягая A_1,A_2,A_3, можем считать $A_j=J_2$ (лемма 5). По лемме 8 A_1,A_2,A_3 — строго верхнетреугольные матрицы. Следовательно, требуемое верно.

Пусть $\operatorname{rank}(A_i)=1$, $i=\overline{1,3}$. Сопрягая, можем считать $A_1=J_1$. Лемма 7 влечет $A_1A_2=0$ или $A_2A_1=0$. Поэтому $\operatorname{tr}(A_1A_2A_3)=0$ или $\operatorname{tr}(A_1A_3A_2)=0$. Лемма 9 завершает доказательство.

Благодаря лемме 5 все возможные варианты были рассмотрены.

Лемма 11. *Пусть $Q\subset R_{3,3}$ будет множеством*

$$\sigma_k(X_i),\ k,i=\overline{1,3},\quad \operatorname{tr}(X_iX_j),\ 1\le i<j\le 3,\quad \operatorname{tr}\big(X_i^2X_j^2\big),\ 1\le i<j\le 3,$$

$$\operatorname{tr}\big(X_1^2X_3\big),\quad \operatorname{tr}\big(X_3^2X_2\big),\quad \operatorname{tr}\big(X_2^2X_1\big),$$

$$\alpha_1\operatorname{tr}\big(X_1^2X_2\big)+\alpha_2\operatorname{tr}\big(X_2^2X_3\big)+\alpha_3\operatorname{tr}\big(X_3^2X_1\big),$$

$$\beta_1\operatorname{tr}(X_1X_2X_3)+\beta_2\operatorname{tr}(X_1X_3X_2),$$

где $\alpha_1,\dots,\beta_2\in K$ не равны нулю. Если для $A_1,A_2,A_3\in M_3(K)$ выполнено $Q|_{A_1,A_2,A_3}=0$, то $r|_{A_1,A_2,A_3}=0$ для любого $r\in R_{3,3}^+$.

Доказательство. Если $A_j=0$ для некоторого $j=\overline{1,3}$, то лемма 9 завершает доказательство.

Пусть $\operatorname{rank}(A_1)=\operatorname{rank}(A_2)=2$. Применяя лемму 8 к матрицам A_1,A_3 и A_2,A_1, получаем $\operatorname{tr}\big(A_3^2A_1\big)=0$ и $\operatorname{tr}\big(A_1^2A_2\big)=0$. Следовательно, $\alpha_2\operatorname{tr}\big(A_2^2A_3\big)=0$. Лемма 10 завершает доказательство.

Пусть $\operatorname{rank}(A_1)=\operatorname{rank}(A_2)=1$. Тогда $A_1^2=A_2^2=0$ (лемма 5), откуда $\operatorname{tr}\big(A_1^2A_2\big)=\operatorname{tr}\big(A_2^2A_3\big)=0$ и, значит, $\alpha_3\operatorname{tr}(A_3^2A_1)=0$. Требуемое следует из леммы 10.

Все варианты были рассмотрены благодаря симметрии и лемме 5.

Доказательство теоремы 2. Для доказательства теоремы достаточно показать, что если матрицы $A_1,A_2,A_3\in M_3(K)$ таковы что, $P|_{A_1,A_2,A_3}=0$, то $r|_{A_1,A_2,A_3}=0$ для любого $r\in R_{3,3}^+$ (см. лемму 4 и сформулированную выше теорему Гильберта). Для удобства пронумеруем уравнения:

$$\operatorname{tr}(A_2A_3)=0, \tag{1}$$

$$\operatorname{tr}\big(A_1^2A_2\big)+\alpha_1\operatorname{tr}\big(A_2^2A_3\big)+\alpha_2\operatorname{tr}\big(A_3^2A_1\big)=0, \tag{2}$$

$$\operatorname{tr}\big(A_1^2A_3\big)-\beta_1\operatorname{tr}\big(A_3^2A_2\big)=0, \tag{3}$$

$$\operatorname{tr}\big(A_1^2A_3\big)-\beta_2\operatorname{tr}\big(A_2^2A_1\big)=0, \tag{4}$$

$$\operatorname{tr}(A_1A_2A_3)+\gamma\operatorname{tr}(A_1A_3A_2)=0, \tag{5}$$

$$\operatorname{tr}\bigl(A_2^2A_3^2\bigr)=0. \tag{6}$$

Если $A_j=0$ для некоторого $j=\overline{1,3}$, то лемма 9 завершает доказательство.

Пусть $\operatorname{rank}(A_j)=1$ для некоторого $j=\overline{1,3}$. Тогда $A_j^2=0$ (лемма 5). Уравнения (3), (4) влекут $\operatorname{tr}\bigl(A_1^2A_3\bigr)=\operatorname{tr}\bigl(A_3^2A_2\bigr)=\operatorname{tr}\bigl(A_2^2A_1\bigr)=0$. Требуемое следует из леммы 11.

Пусть $\operatorname{rank}(A_i)=2$ для любого $i=\overline{1,3}$. Сопрягая, можем считать $A_1=J_2$ (лемма 5). Пусть $A_2=T_2J_2T_2^{-1}$, $A_3=T_3J_2T_3^{-1}$, где $T_2,T_3\in GL_3(K)$. Лемма 6 влечет, что существует три возможности для A_2 и три возможности для A_3. Вместо букв t_i $(i=\overline{1,5})$ будем употреблять буквы b_i для матрицы A_2 и буквы c_i для матрицы A_3 $(i=\overline{1,5})$. Если реализуются j-я возможность для A_2 и k-я возможность для A_3, то этот случай обозначим через (j,k).

Случай $(1,1)$. Здесь матрицы A_2, A_3 строго верхнетреугольные, и требуемое очевидно.

Случай $(1,2)$. Уравнение (4) влечет $1=0$, что является противоречием. Значит, этот случай невозможен.

Случай $(1,3)$. Уравнение (4) влечет $1=0$; противоречие.

Случай $(2,1)$. Уравнение (4) влечет $b_3=0$. Значит, $\det(T_2)=0$; противоречие.

Случай $(2,2)$. Уравнение (4) влечет $b_2=b_4b_5-\beta_2b_3(-c_2+c_4c_5)$. Благодаря этому из уравнения (6) следует, что $c_3=0$ или $c_4=b_4$. В первом случае $\det(T_3)=0$, а во втором уравнение (3) влечет $1=0$; противоречие.

Случай $(2,3)$. Уравнение (4) влечет $b_2=b_4b_5+\beta_2b_3c_2$, следовательно, уравнение (6) влечет $b_1=b_4^2+c_1-b_4c_3$. Уравнение (3) влечет $c_4=\beta_1b_3c_2$. Из (2) следует $\alpha_1+\beta_1+\alpha_2\beta_2=0$, что противоречит условию.

Случай $(3,1)$. Уравнение (4) влечет $\beta_2=0$, что противоречит условию.

Случай $(3,2)$. Уравнение (4) влечет $b_4=\beta_2(c_2-c_4c_5)$. Следовательно, уравнение (6) приводит к двум возможностям:

(a) $c_3=0$; в этом случае уравнение (3) приводит к противоречию.

(b) $b_1=c_1+(b_3-c_4)c_4$; тогда уравнение (3) влечет $c_2=(\beta_1/\beta_2)b_2c_3+c_4c_5$. Уравнение (2) влечет $\alpha_1+\beta_1+\alpha_2\beta_2=0$, что противоречит условию.

Случай $(3,3)$. Уравнение (6) влечет $c_3=b_3$. Следовательно, уравнение (3) приводит к противоречию.

Теорема доказана.

Замечание. Аналогичным способом доказывается, что ОСП $R_{3,2}$, $R_{4,2}$ при произвольной характеристике можно получить, если незначительно изменить соответствующие ОСП в случае $p=0$ из [9]:

1) множество
$$\bigl\{\sigma_k(X_i)\ (i=1,2,\ k=\overline{1,3}),\quad \operatorname{tr}(X_1X_2),\quad \operatorname{tr}\bigl(X_1^2X_2\bigr),\quad \operatorname{tr}\bigl(X_1X_2^2\bigr),\quad \operatorname{tr}\bigl(X_1^2X_2^2\bigr)\bigr\}$$
является ОСП $R_{3,2}$;

2) множество
$$\bigl\{\sigma_k(X_i)\ (i=1,2,\ k=\overline{1,4}),\quad \operatorname{tr}(X_1X_2),\quad \operatorname{tr}\bigl(X_1^2X_2\bigr),\quad \operatorname{tr}\bigl(X_1X_2^2\bigr),$$
$$\operatorname{tr}\bigl(X_1^3X_2\bigr),\quad \operatorname{tr}\bigl(X_1X_2^3\bigr),\quad \operatorname{tr}\bigl(X_1^2X_2^2\bigr),\quad \sigma_2(X_1X_2),\quad \sigma_2\bigl(X_1X_2^2\bigr),\quad \sigma_2\bigl(X_1^2X_2\bigr)\bigr\}$$
является ОСП $R_{4,2}$.

Автор выражает глубокую признательность А. Н. Зубкову за ценные советы и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Donkin S.* Invariants of several matrices // Invent. Math. 1992. V. 110. P. 389–401.
2. *Зубков А. Н.* Об одном обобщении теоремы Размыслова — Прочези // Алгебра и Логика. 1996. Т. 35, № 4. С. 433–457.
3. *Сибирский К. С.* Алгебраические инварианты системы матриц // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 1. С. 152–164.
4. *Procesi C.* Computing with 2×2 matrices // J. Algebra. 1984. V. 87. P. 342–359.
5. *Domokos M., Kuzmin S. G., Zubkov A. N.* Rings of matrix invariants in positive characteristic // J. Pure Appl. Algebra. 2002. V. 176. P. 61–80.
6. *Domokos M.* Finite generating system of matrix invariants // Math. Pannon. 2002. V. 13, N 2. P. 175–181.
7. *Abeasis S., Pittaluga M.* On a minimal set of generators for the invariants of 3×3 matrices // Comm. Algebra. 1989. V. 17. P. 487–499.
8. *Lopatin A. A.* The algebra of invariants of 3×3 matrices over a field of arbitrary characteristic // Comm. Algebra. 2004. V. 32. P. 2863–2883.
9. *Teranishi Y.* The ring of invariants of matrices // Nagoya Math. J. 1986. V. 104. P. 149–161.
10. *Teranishi Y.* The Hilbert series of rings of matrix concomitants // Nagoya Math. J. 1988. V. 111. P. 143–156.
11. *Hilbert D.* Über die vollen Invariantensysteme // Ges. Abh.: Springer-Verl., 1970. V. II. P. 287–344.
12. *Крафт Х.* Геометрические методы в теории инвариантов. М.: Мир, 1987.
13. *Хамфри Дж.* Линейные алгебраические группы. М.: Наука, 1980.
14. *Artin M.* On Azumaya algebras and finite-dimensional representations of rings // J. Algebra. 1969. V. 11. P. 532–563.
15. *Procesi C.* Finite-dimensional representations of algebras // Israel J. Math. 1974. V. 19. P. 169–182.

Статья поступила 5 ноября 2003 г.

Лопатин Артем Анатольевич
Омский гос. университет, кафедра алгебры,
пр. Мира, 55-А, Омск 644077
`lopatin@math.omsu.omskreg.ru`