Сибирский математический журнал
Июль—август, 2004. Том 45, № 4

УДК 517.51

ИНЪЕКТИВНОСТЬ ОПЕРАТОРА СФЕРИЧЕСКОГО СРЕДНЕГО НА КОНИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ СФЕР

М. Л. Аграновский, Е. К. Нараянан

Аннотация: Пусть f — непрерывная функция, определенная на $\mathbb{R}^n$. Если f имеет нулевые интегралы по любой сфере, пересекающейся с данным множеством A из $\mathbb{R}^n$, не содержащемся ни в какой аффинной плоскости размерности $n-2$, то f тождественно нулевая. Условие на размерность множества A точное.

Ключевые слова: сферическое среднее, волновое уравнение, область зависимости.

Посвящается 75-летию профессора Ю. Г. Решетняка

1. Введение

Сферическое среднее преобразование в $\mathbb{R}^n$ определяется как

$$Mf[S] = \int\limits_S f(x)\,d\sigma_S(x),$$

где $f \in C(\mathbb{R}^n)$, S — сфера в $\mathbb{R}^n$ и $d\sigma_S$ — нормированная мера Лебега на S. Если сферы S принадлежат многообразию Σ в пространстве всех сфер в $\mathbb{R}^n$, то M можно рассматривать как отображение из $C(\mathbb{R}^n)$ в $C(\Sigma)$. Задача инъективности такого оператора в различных классах функций f вызывает большой интерес в связи с ее приложениями, так как сферические средние участвуют во многих интегральных преобразованиях в анализе и дифференциальных уравнениях с частными производными.

А. М. Кормак и Е. Т. Квинто [1] доказали, что C^∞-функции f определяются их средними $Mf[S]$ по многообразию Σ_0 сфер, проходящих через нуль. Это многообразие может быть рассмотрено как конус будущего в пространстве всех сфер в $\mathbb{R}^n$, естественно реализованное как $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$. Более того, бесконечная гладкость только в начале координат обеспечивает инъективность оператора M на указанном семействе сфер. Однако оператор M не инъективен в пространстве $C^q(\mathbb{R}^n)$ для любого q, даже если расширить многообразие сфер до семейства $\widetilde{\Sigma}_0$ сфер, *охватывающих* начало координат, которое соответствует заполненному конусу будущего в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$.

После статьи [1] последовала работа Е. Т. Квинто [2], в которой он описал пространство непрерывных функций с нулевыми интегралами по сферам, проходящим через нуль. Характеризация дана в терминах коэффициентов Фурье

This work is supported by Israel Scientific Foundation (grant N 279/02–01).

разложения по сферическим гармоникам. Далее, Ч. Эпштейн и Б. Клейнер [3] описали ядро оператора сферического среднего M в пространстве всех непрерывных функций в n-мерном кольце $r \leq |x| < R$ (для $n = 2$ см. также более раннюю работу И. Глобевника [4]). Здесь многообразие сфер интегрирования состоит из сфер, содержащихся в шаре радиуса R и охватывающих шар радиуса r. Результат из [3] обобщает разложение Квинто и теорему о носителе Хелгасона [5] для преобразования Радона на сферах, содержащих фиксированный шар. Оказывается, что в случае $r = 0$ (сферы охватывают нуль) описания ядер в [3] и [2] совпадают на функциях, непрерывных в нуле, так что ядро оператора M на сферах, охватывающих нуль, то же самое, что и на сферах, проходящих через нуль. Кроме того, явное представление для коэффициентов Фурье в [3] и [2] немедленно влечет, что ядро содержит нетривиальные C^q-функции для любого целого q, в то время как оно не содержит ненулевых C^∞-функций.

Итак, в любой размерности нет телесного конуса $\widetilde{\Sigma}_a$ сфер в $\mathbb{R}^n$, охватывающих данную точку $a \in \mathbb{R}^n$, обеспечивающего инъективность оператора сферического среднего в пространстве непрерывных или гладких (но не бесконечно гладких) функций. Более того, это верно для более узкого семейства Σ_a сфер, проходящих через точку a.

Данная статья стимулирована недавними результатами И. Глобевника, который показал, что оператор сферического среднего в $\mathbb{R}^2$ инъективен на объединении *двух* семейств указанного выше типа в пространстве дифференцируемых функций. Точнее, он доказал, что если C^1-функция f имеет нулевые средние по любой окружности, содержащей по крайней мере одну из двух данных точек в $\mathbb{R}^2$, то $f = 0$. Доказательство вытекает из результатов [6] и [7] и использует технику и идеи из комплексного анализа, так что оно существенно двумерно и едва ли поддается обобщению на более высокие размерности.

В этой статье мы докажем точный результат об инъективности оператора сферического среднего на объединении конусов сфер в любой размерности и для непрерывных функций. А именно, докажем, что интегралы по множествам сфер в n-мерном евклидовом пространстве, проходящим через одну из n аффинно независимых точек, определяют любую непрерывную функцию в $\mathbb{R}^n$ и это невозможно сделать по $n-1$ точкам. Результат формулируется в более общем виде для семейства сфер, пересекающихся с заданным множеством. Наш основной метод состоит в переводе задачи на язык волнового уравнения и затем использования подходящих идей и средств из уравнений с частными производными.

Как и выше, через $\widetilde{\Sigma}_a$ обозначаем семейство сфер в $\mathbb{R}^n$, охватывающих a, и если $A \subset \mathbb{R}^n$, то через $\widetilde{\Sigma}(A) = \bigcup\limits_{a \in A} \widetilde{\Sigma}_a$ обозначаем множество сфер, охватывающих или содержащих по крайней мере одну из точек A. Другими словами, $\widetilde{\Sigma}(A)$ состоит из всех сфер $S(x, r)$ с центром в x и радиусом r, для которых $r \geq \operatorname{dist}(x, A)$. Через Σ_a обозначаем семейство сфер в $\mathbb{R}^n$, проходящих через a, и если $A \subset \mathbb{R}^n$, то через $\Sigma(A) = \bigcup\limits_{a \in A} \Sigma_a$ обозначаем семейство сфер, пересекающихся с A.

Наш основной результат состоит в следующем.

Теорема 1.1. (a) *Пусть $A \in \mathbb{R}^n$ — множество, не содержащееся ни в каком $(n-2)$-мерном аффинном подпространстве в $\mathbb{R}^n$. Если $f \in C(\mathbb{R}^n)$ имеет нулевые средние, т. е. $Mf[S] = 0$, по всем сферам $S \in \Sigma(A)$, то $f = 0$.*

(b) *Для любого аффинного подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$ с $\dim L \leq n-2$ и для* *любого q существует ненулевая функция $f \in C^q(\mathbb{R}^n)$ такая, что $Mf[S] = 0$ для всех сфер $S \in \widetilde{\Sigma}(L)$.*

В частности, для любых n точек из $\mathbb{R}^n$, находящихся в общем положении, т. е. таких, что аффинное пространство, натянутое на эти точки, $(n-1)$-мерно, интегралы по сферам, проходящим через одну из этих точек, единственным образом определяют непрерывную функцию и любые $n-1$ точек таким свойством не обладают.

Для доказательства теоремы мы используем соотношение между сферическими средними и волновым уравнением в нечетномерном пространстве, а также теоремы об областях зависимости, а затем устанавливаем требуемое для четных размерностей методом спуска.

2. Вспомогательные результаты

Будем писать $Mf(x,r) = Mf[S]$ для $S = S(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}$. Если S — сфера, то через σ_S будем обозначать нормированную меру Лебега на S. Если центр этой сферы расположен в начале координат и радиус ее R, то будем писать $\sigma_{S(0,R)} = \sigma_R$.

Лемма 2.1. *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^{n-1}$. Если f — непрерывная функция, определенная на $\mathbb{R}^n$ и такая, что*

$$Mf[S] = 0 \tag{2.1}$$

для любой сферы S с центром в некоторой точке из множества $U \times \{0\}$, то f нечетна относительно x_n.

Доказательство. Используя регуляризирующие свертки по первым $n-1$ переменным, можем считать, что f гладкая по этим переменным. Из (2.1) вытекает, что

$$\int\limits_{|y| \le R} f(x+y)\,dy = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in U \times \{0\}.$$

Следующие рассуждения вполне стандартны (см., например, [8, гл. 6, § 8] или [5, с. 107–108]).

Так как U открыто в $\mathbb{R}^{n-1}$, можно продифференцировать предыдущее равенство и получить

$$\int\limits_{|y| \le R} \partial_k f(x+y)\,dy = 0 \quad \text{для } k = 1, 2, \dots n-1.$$

Применяя формулу Гаусса — Остроградского к векторному полю $(0, \dots, f(x), \dots, 0)$ ($f(x)$ на k-м месте), запишем эти равенства в виде

$$\int\limits_{|y| = R} y_k f(x+y)\,d\nu_R(y) = 0 \quad \text{для любых } R > 0 \text{ и } x \in U \times \{0\}.$$

Значит, функции $x_k f(x)$ при $k = 1, 2, \dots, n-1$ имеют нулевые интегралы по любой сфере с центром в $U \times \{0\}$. Повторяя эти рассуждения, получаем

$$\int\limits_S pf\,d\sigma_S = 0$$

для любого полинома $p(x_1,\dots,x_{n-1})$ и для любой сферы S с центром в $U\times\{0\}$.

Фиксируем точку $a\in\mathbb{R}^n$, $a=(a',a_n)$, и выберем последовательность p_k полиномов в $\mathbb{R}^{n-1}$, сходящуюся к δ-функции в точке a'. Полагая в последнем равенстве $S=S(0,|a|)$, при $k\to\infty$ получим $f(a',a_n)+f(a',-a_n)=0$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^{n-1}$ и f — непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$ такая, что*

$$Mf[S]=0 \tag{2.2}$$

для любой сферы S, пересекающейся с $U\times\{0\}$ и имеющей центр в фиксированной окрестности W множества $U\times\{0\}$. Тогда f тождественно равна нулю.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_\varepsilon\}$ — гладкая аппроксимативная единица с $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon\subset B(0,\varepsilon)$. Из (2.2) следует, что для достаточно малого ε

$$\int\limits_S (f*\varphi_\varepsilon)d\sigma_S=0 \tag{2.3}$$

для любой сферы S, охватывающей ε-окрестность точки из $U\times\{0\}$ и имеющей центр в W. Уравнение (2.3) допускает дифференцирование по x_n:

$$\int\limits_S \partial_n(f*\varphi_\varepsilon)\,d\sigma_S=0.$$

Возьмем $S=S(x,r)$, $r\geq\varepsilon$, $x\in U\times\{0\}$, и проинтегрируем по r по мере $r^{n-1}dr$. Тогда

$$\int\limits_{\varepsilon\leq|y|\leq R} \partial_n(f*\varphi_\varepsilon)(x+y)\,dy=0.$$

Вновь по формуле Гаусса — Остроградского, примененной к векторному полю $(0,\dots,f(x))$, получим

$$\varepsilon^{n-2}\int\limits_{|y|=\varepsilon}(f*\varphi_\varepsilon)(x+y)y_n\,d\sigma_\varepsilon(y)=R^{n-2}\int\limits_{|y|=R}(f*\varphi_\epsilon)(x+y)y_n\,d\sigma_R(y).$$

Если $n\geq 2$, то левая часть стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$, а правая — к

$$R^{n-2}\int\limits_{|y|=R} y_nf(x+y)\,d\sigma_R(y),$$

и поэтому

$$\int\limits_S y_nf(y)\,d\sigma_S(y)=0$$

для всех сфер S с центром $U\times\{0\}$. Из леммы 2.1 заключаем, что как $f(x)$, так и $x_nf(x)$ нечетны по x_n на $\mathbb{R}^n$, так что $f=0$. Доказательство закончено.

Предложение 2.3. *Пусть A — множество в $\mathbb{R}^n$ и f — непрерывная функция в $\mathbb{R}^n$ такая, что $Mf[S]=0$ по всем сферам $S\in\widetilde{\Sigma}(A)$. Тогда $Mf[S]=0$ для сфер $S\in\widetilde{\Sigma}(\operatorname{conv}(A))$, где $\operatorname{conv}(A)$ — выпуклая оболочка множества A.*

Доказательство. 1. Начнем со случая нечетной размерности n. В первую очередь сделаем f гладкой путем свертки с гладкими функциями. Для

этого возьмем аппроксимативную единицу $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с носителем в шаре $B(0,\varepsilon)$ и положим
$$f_\varepsilon = f * \varphi_\varepsilon.$$
Тогда f_ε — бесконечно гладкая функция и $Mf_\varepsilon[S] = 0$, когда S принадлежит подсемейству $\widetilde{\Sigma}_\varepsilon(A)$ сфер, каждая из которых включает ε-окрестность некоторой точки в A. Это семейство состоит из сфер $S(x,r)$ с $r \geq \operatorname{dist}(x,A)+\varepsilon$.

Теперь обратимся к волновому уравнению. Пусть $u(x,t)$ — решение краевой задачи в $\mathbb{R}^n$:
$$\left(\partial_t^2 - \Delta\right)u = 0, \quad u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = f(x).$$
Очевидно, функция $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$ (свертка по x) представляет собой решение волнового уравнения с начальными данными f_ε. По формуле Кирхгофа — Пуассона (см. [9, с. 223]) имеем
$$u_\varepsilon(x,t) = \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} [t^{n-2} Mf_\varepsilon(x,t)]. \tag{2.4}$$
Так как функция f_ε гладкая, условие на сферические средние Mf_ε вместе с формулой (2.4) приводит к равенству $u_\varepsilon(x,t) = 0$ при условии, что сфера $S(x,t)$ охватывает ε-окрестность некоторой точки из множества A.

Возьмем две различные точки $a, b \in A$. Имеем
$$u_\varepsilon(x,t) = 0,$$
если выполняется по крайней мере одно из неравенств $t > |x-a|+\varepsilon$, $t > |x-b|+\varepsilon$.

Для упрощения обозначений временно заменим время t переменной $s = t-\varepsilon$. Тогда получим решение $v(x,s) = u_\varepsilon(x, s+\varepsilon)$ волнового уравнения, удовлетворяющее условию $v(x,s) = 0$ для $|x-a| \leq s$ и для $|x-b| \leq s$.

Геометрически это означает, что $v(x,s)$ обращается в нуль на объединении $C_a \cup C_b$ двух конусов, где $C_w = \{(x,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : s \geq |x-w|\}$.

Возьмем точку p в отрезке $[a,b]$. Для любого $\delta \geq 0$ и достаточно большого $r \geq \delta$ имеет место включение $\overline{B}(p, r-\delta) \subset B(a,r) \cap B(b,r)$, и так как $v(x,r) = 0$ для $x \in B(a,r) \cap B(b,r)$, то $v(x,r) = \partial_t v(x,r) = 0$ при $|x-p| \leq r-\delta$.

В силу теоремы об области зависимости (см., например, [9]) $v(x,s) = 0$ в конической области $|x-p| + |r-s| < r-\delta$ и, в частности, $v(x,s) = 0$ в нижней половине этой области: $|x-p| + \delta \leq s \leq r$. (Это можно получить также непосредственно из формулы Кирхгофа — Пуассона (2.4), примененной к решению $v_r(x,t) = v(x, r-t)$ с начальными данными $v_r(x,0) = v(x,r)$). При $r \to \infty$ и $\delta \to 0$ получим $v(x,s) = 0$, $|x-p| \leq s$, т. е. v обращается в нуль на конусе C_p. Возвращаясь к переменной t, имеем $u_\varepsilon(x,t) = 0$, $|x-p| + \varepsilon \leq t$.

Точки $p \in [a,b]$ и $a, b \in A$ произвольны, поэтому p — произвольная точка в $\operatorname{conv}(A)$. Заметим, что предыдущее заключение может быть также получено применением следствия 8.6.11 из [10].

Обратимся к сферическому преобразованию. В силу соотношения (2.4) из доказанного вытекает, что для любого $p \in \operatorname{conv}(A)$ имеет место представление
$$Mf_\varepsilon(x,t) = \sum_{l=1}^{\frac{n-3}{2}} \frac{c_l^\varepsilon(x)}{t^{n-2l}} \quad \text{при } t > |x-p| + \varepsilon. \tag{2.5}$$
Однако мы знаем, что $Mf_\varepsilon(x,t) = 0$, если сфера $S(x,t)$ охватывает некоторую ε-окрестность хотя бы одной точки из A. Тем самым для любого x будет

$Mf_\varepsilon(x,t) = 0$ при t достаточно большом. Отсюда коэффициенты $c_l^\varepsilon(x)$ равны нулю и, следовательно,

$$Mf_\varepsilon(x,t) = 0, \quad t > |x-p| + \varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получим

$$Mf[S] = \int\limits_S f\,d\sigma = 0 \tag{2.6}$$

для любой сферы S, охватывающей точку p. Остается вспомнить, что $p \in \operatorname{conv}(A)$ произвольна.

2. Перейдем к случаю четного n. Он может быть сведен к случаю нечетной размерности с помощью стандартного рассуждения методом спуска. Распространим функцию f на $\mathbb{R}^{n+1}$, полагая

$$f^\varepsilon(x) = f^\varepsilon(x', x_{n+1}) = f(x')\psi_\varepsilon(x_{n+1}),$$

где $x' \in \mathbb{R}^n$ и ψ_ε — гладкая функция с носителем в $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Тогда $Mf^\varepsilon(S) = 0$ для любой сферы $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$, охватывающей некоторую ε-окрестность точки из множества $A \times \{0\}$, т. е. согласно обозначениям, введенным в начале доказательства, для всех сфер $S \in \widetilde{\Sigma}_\varepsilon(A \times \{0\})$.

Теперь мы имеем дело с нечетномерным пространством $\mathbb{R}^{n+1}$ и находимся в точности в ситуации первой части доказательства с $A\times\{0\}$ вместо A. Как там было установлено, условие $Mf[S] = 0$ распространяется со сфер, охватывающих ε-окрестности точек в $A \times \{0\}$, на сферы, охватывающие ε-окрестности точек в $\operatorname{conv}(A \times \{0\}) = \operatorname{conv}(A) \times \{0\}$.

Выбирая последовательность $\psi_\varepsilon(x_{n+1})$, сходящуюся к δ-функции в точке $x_{n+1} = 0$, и полагая $\varepsilon \to 0$, получим $Mf[S] = 0$ для $S \in \widetilde{\Sigma}(\operatorname{conv}(A))$. Доказательство закончено.

3. Доказательство основного результата

Начнем с доказательства того, что для любой $f \in C(\mathbb{R}^n)$ условие $Mf[S] = 0$, $S \in \Sigma(A)$, влечет равенство $Mf[S] = 0$, $S \in \widetilde{\Sigma}(A)$, так что семейство сфер, охватывающих некоторую точку, может быть сведено к семейству сфер, содержащих эту точку с сохранением условия обращения в нуль интеграла. Мы полагаем, что это утверждение может быть доказано непосредственно, но оно также вытекает из сравнения описаний нуль-пространств для преобразования сферического среднего, данных в [2, 3].

Для непрерывной функции f будем использовать разложение по сферическим гармоникам:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_k} f_{kl}(|x|)Y_l^k(\omega), \quad \omega = x/|x|,$$

где

$$f_{kl}(r) = \int\limits_{S^{n-1}} f(r\omega)\overline{Y_l^k(\omega)}\,d\omega$$

и Y_l^k, $l = 1,\dots,N_k$, — базис в пространстве сферических гармоник степени k.

Доказательство части (а) теоремы 1.1. Пусть $a \in A$. Используя сдвиги, можем считать, что a — начало координат в $\mathbb{R}^n$. Во-первых, проверим, что если f имеет нулевые средние по сферам, проходящим через начало координат, то это верно и для сфер, охватывающих начало координат, тем самым оператор сферического среднего M имеет одинаковые нуль-пространства на многообразиях Σ_0 и $\widetilde{\Sigma}_0$. Для обоснования этого утверждения мы используем явные описания соответствующих ядер, данные в [2, 3].

Поскольку f непрерывна, то $f \in L^2(B_R)$ в любом шаре B_R с центром в начале координат. Так как

$$\int\limits_S f\,d\sigma_S = 0,$$

если сфера S проходит через начало координат и $S \subset B_R$, из теоремы 3.2 в [2] вытекает, что $f_{lm}(|x|)$ — линейная комбинация функций вида $|x|^{2-n+k}$, где $(n-4)/2 < k < l$, $l-k$ четно. Поскольку f непрерывна в начале координат, отрицательные степени $|x|$ отсутствуют и мы получаем

$$f_{lm}(x) = \sum_{j=0}^{[\frac{l-n}{2}]} c_j |x|^{-n+l-2j},$$

если $l \geq n$, и нуль в ином случае. В теореме 1.1 из [3] говорится, что если коэффициенты Фурье f_{lm} имеют такой вид, то

$$\int\limits_S f\,d\sigma_S = 0$$

для каждой сферы S, охватывающей начало координат и содержащейся в шаре B_R. Поскольку шар B_R произволен, утверждение доказано.

Пусть теперь A — подмножество из теоремы 1.1. Тогда

$$Mf[S] = 0$$

для любой сферы $S \in \Sigma(A)$ и тем самым, как мы только что доказали, $Mf[S] = 0$ для $S \in \widetilde{\Sigma}(A)$. Значит, применимо утверждение, доказанное в п. 2.

Поскольку A не содержится ни в какой $(n-2)$-мерной аффинной плоскости, после подходящих сдвига и вращения можем считать, что $\operatorname{conv}(A)$ содержит множество вида $U \times \{0\}$, где U — открытое (выпуклое) подмножество в $\mathbb{R}^{n-1}$. Теперь из предложения 2.3 и леммы 2.2 вытекает, что функция f нулевая.

Замечание. Внимательный анализ доказательства показывает, что утверждение (a) теоремы 1.1 распространяется на более широкий класс функций, а именно на класс $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$-функций, непрерывных в начале координат.

Доказательство части (b) теоремы 1.1. Для доказательства утверждения (b) достаточно построить ненулевую функцию $f \in C^q(\mathbb{R}^n)$, имеющую нулевой интеграл по любой сфере, пересекающейся с данной $(n-2)$-мерной аффинной плоскостью L. После подходящих сдвига и поворота можно считать, что L задается уравнениями $x_1 = x_2 = 0$, т. е. $L = \{(0,0)\} \times \mathbb{R}^{n-2}$. Идея конструкции навеяна статьей Эпштейна [11] по теории рассеяния. Хотя окончательное выражение для f исключительно простое, сама конструкция поясняет требуемые свойства f и это представляется достаточной причиной для того, чтобы начать с конструкции, а не с ее итога.

Сферические средние $v(x,t) = (f * \sigma_t)(x)$ функции f, как известно, удовлетворяет уравнению Эйлера — Дарбу

$$\Delta_x v(x,t) = \left(\partial_t^2 + \frac{n-1}{t}\partial_t\right) v(x,t). \tag{3.1}$$

Кроме того, по теореме Айсгерссона (см., например, [5]) верно и обратное. Тем самым любое решение предыдущего уравнения задается сферическим средним начальных данных $f(x) = v(x, 0)$.

Будем строить решения $v(x, t)$ уравнения (3.1), удовлетворяющие условию

$$v(x, t) = 0 \quad \text{для } t > \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В терминах сферических средних это означает, что начальные данные $f(x) = v(x, 0)$ имеют нулевой интеграл по любой сфере, пересекающейся с $L = \{(0, 0)\} \times R^{n-2}$, а это и есть требуемое свойство.

Используя полярные координаты по первым двум переменным x_1, x_2, запишем решение в виде

$$v(x, t) = v(r\cos\theta, r\sin\theta, x_3, \dots x_n, t) = \int\limits_0^\infty \frac{J_k(\lambda r)e^{ik\theta}}{\lambda^l} \phi_\lambda(t)\lambda^{n-1} d\lambda, \tag{3.2}$$

где J_α — функция Бесселя первого рода и

$$\phi_\lambda(t) = \frac{J_{\frac{n}{2}-1}(\lambda t)}{(\lambda t)^{\frac{n}{2}-1}}.$$

Для данного положительного целого $q \geq 3$ возьмем k и l, удовлетворяющие неравенствам $k \geq l > n+q$. При этих условиях предыдущий интеграл абсолютно сходится, так как $J_\alpha(t) \sim t^\alpha$ при t, близких к нулю, $J_\alpha(t) \sim t^{-\frac{1}{2}}$ при t, близких к бесконечности, и $\varphi_\lambda(t)$ — ограниченная по λ функция. Заметим, что функция v зависит только от первых двух переменных.

Построенная функция v удовлетворяет уравнению (3.1). Действительно,

$$\Delta_x[J_k(\lambda r)e^{ik\theta}] = -\lambda^2 J_k(\lambda r)e^{ik\theta}$$

и

$$\left(\partial_t^2 + \frac{n-1}{t}\partial_t\right)\phi_\lambda = -\lambda^2\phi_\lambda,$$

и в силу выбора k и l двойное дифференцирование под знаком интеграла в (3.2) возможно. Тем самым $v(x, t)$ — сферическое среднее начальных данных $v(x, 0) = f(x)$. По построению v функция $f(x)$ зависит только от первых двух переменных x_1, x_2, и ввиду (3.2)

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = v(x, 0) = \phi_\lambda(0)\int\limits_0^\infty \frac{J_k(\lambda r)e^{ik\theta}}{\lambda^l}\lambda^{n-1}\, d\lambda.$$

На самом деле очевидная замена переменных в интеграле (3.2) приводит к очень простому виду функции f:

$$f(x_1, x_2) = c\frac{z^k}{|z|^{k+n-l}},$$

где использована комплексная переменная $z = x_1 + ix_2 = re^{i\theta}$ и c — постоянная. Тогда $f \in C^q(\mathbb{R}^n)$ при $k \geq l > n + q$.

Остается показать, что $v(x, t) = 0$ для $t > r = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Для этого заметим, что функция

$$\lambda \mapsto \frac{J_k(\lambda r)}{\lambda^l}$$

является целой функцией от $\lambda \in \mathbb{C}$ экспоненциального типа r. Для каждого $r > 0$ определим целую функцию на $\mathbb{C}^n$, полагая

$$F_r(z_1, z_2, \dots z_n) = \frac{J_k\big(r\big(z_1^2 + \dots + z_n^2\big)^{\frac{1}{2}}\big)}{\big(z_1^2 + \dots + z_n^2\big)^{\frac{l}{2}}}.$$

Тогда F_r экспоненциального типа r и по теореме Пэли — Винера обратное преобразование Фурье F_r как функция на $\mathbb{R}^n$ имеет носитель в шаре $B(0, r)$. Отметим, что F_r — радиальная функция. Значит, обратное преобразование Фурье таково:

$$\check{F}_r(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F_r(u) e^{i(y \cdot u)}\, du = \int\limits_0^\infty F_r(s) \bigg(\int\limits_{S^{n-1}} e^{is(y\cdot w)}\, d\sigma(w) \bigg) s^{n-1}\, ds.$$

Если $|y| = t$, то, подставляя в последнее равенство известное тождество

$$\int\limits_{S^{n-1}} e^{is(y \cdot w)}\, d\sigma(w) = c_n \frac{J_{\frac{n}{2}-1}(st)}{(st)^{\frac{n}{2}-1}},$$

получаем

$$\check{F}_r(t) = c_n \int\limits_0^\infty \frac{J_k(\lambda r)}{\lambda^l} \phi_\lambda(t) \lambda^{n-1}\, d\lambda,$$

где c_n — ненулевая константа. Отсюда

$$c_n v(r\cos\theta, r\sin\theta, x_3 \dots x_n, t) = \check{F}_r(t) e^{ik\theta}.$$

Так как $\operatorname{supp} \check{F}_r \subset B(0, r)$, имеем $v(x, t) = 0$ при $t > r = \big(x_1^2 + x_2^2\big)^{\frac{1}{2}}$. Теорема 1.1 доказана.

Замечание. Ознакомившись с рукописью настоящей статьи, В. М. Гичев указал нам следующее вычисление, с помощью которого проверяется нужное свойство построенной выше функции $f(x_1, x_2) = z^k/|z|^{k+n-l}$, $z = x_1 + ix_2$. Мы признательны ему за разрешение представить здесь его вычисление.

Проекция поверхностной меры на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$ на плоскость x_1, x_2 с точностью до мультипликативной константы имеет плотность

$$(1 - |z|^2)^{\frac{n-4}{2}}, \quad z = x_1 + ix_2,$$

относительно лебеговой меры $d\lambda$ в единичном круге D. Очевидно, что если f определена, как выше, то равенство $Mf[S] = 0$ для всех сфер $S \in \mathbb{R}^n$, пересекающихся с плоскостью $x_1 = x_2 = 0$, эквивалентно после очевидных перенормировок равенству

$$\int\limits_D \frac{(z-a)^k}{|z-a|^{k+n-l}} (1 - |z|^2)^{\frac{n-4}{2}}\, d\lambda(z) = 0 \quad \text{для любого } a \in D.$$

Если $k \geq l > n + q$, то f из класса C^q. Делая замену переменной посредством конформного автоморфизма единичного круга, переводящего точку a в начало координат, т. е. $\zeta = (z - a)(1 - \overline{a}z)^{-1}$, получаем

$$\int\limits_D \frac{(z-a)^k}{|z-a|^{k+n-l}} (1 - |z|^2)^{\frac{n-4}{2}}\, d\lambda(z)$$
$$= c(a) \int\limits_D \frac{\zeta^k}{|\zeta|^{k+n-l}} (1 + \overline{a}\zeta)^{-k} |1 + \overline{a}\zeta|^{k-l+4} (1 - |\zeta|^2)^{\frac{n-4}{2}}\, d\lambda(\zeta).$$

Если $k-l$ нечетно, то подынтегральная функция равна

$$\frac{\zeta^{k-s}}{|\zeta|^{k+n-l}}(1+\bar{a}\zeta)^{s-k}(\zeta+a|\zeta|^2)^s(1-|\zeta|^2)^{\frac{n-4}{2}},$$

где $2s=k-l+4$. Для каждого $r\in(0,1)$ она совпадает на окружности $|\zeta|=r$ с некоторой аналитической функцией, обращающейся в нуль при $k>s\geq 0$. Это доказывает, что интеграл нулевой при указанных ограничениях на k,l и q.

В качестве следствия нашей основной теоремы получаем следующий вариант результата Зальцмана (см. [12]).

Следствие 3.1. *Пусть $f(z)$ — непрерывная функция, определенная на $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$, и $0\neq z_0\in\mathbb{C}$. Предположим, что*

$$\int\limits_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta})e^{im\theta}\,d\theta=0 \tag{3.3}$$

при $r>|z|$ или $r>|z-z_0|$. Тогда f удовлетворяет равенству $\bar{\partial}^m f=0$, если $m\geq 0$, и $\partial^{|m|}f=0$, если $m<0$.

Доказательство. Вначале допустим, что f гладкая и $m>0$. Пусть $r>|z|$. Тогда

$$\int\limits_{|w|\leq r}(\bar{\partial}f)(z+w)w^{m-1}\,dV(w)=\int\limits_{|w|\leq r}\bar{\partial}_w(f(z+w)w^{m-1})\,dV(w),$$

что по теореме Грина равно

$$\int\limits_{|w|=r} f(z+re^{i\theta})e^{im\theta}\,d\theta=0$$

ввиду (3.3). Отсюда

$$\int\limits_{|w|\leq r}(\bar{\partial}f)(z+w)w^{m-1}\,dV(w)=0 \quad \text{для } r>|z|.$$

Дифференцируя обе части равенства по r, получим, что

$$\int\limits_{|w|=r}(\bar{\partial}f)(z+re^{i\theta})e^{i(m-1)\theta}\,d\theta=0 \quad \text{для } r>|z|.$$

Повторяя дифференцирование, окончательно получим

$$\int\limits_{|w|=r}(\bar{\partial}^m f)(z+re^{i\theta})\,d\theta=0, \quad \text{если } r>|z| \quad \text{или } r>|z-z_0|.$$

Отсюда по теореме 1.1 $\bar{\partial}^m f=0$. Если f не гладкая, мы можем сгладить ее с помощью сверток и продолжить, как в доказательстве предложения 2.3. Случай $m<0$ сводится к случаю $m>0$ комплексным сопряжением.

Благодарности. Мы благодарны Иосипу Глобевнику, познакомившему нас со своим результатом для двух точек на плоскости, вытекающим из его статей [6, 7]. Мы признательны Тоду Квинто, привлекшему наше внимание к его работе [2], которая помогла сформулировать теорему 1.1 в более сильной форме, использующей $\Sigma(A)$ вместо более широкого семейства $\widetilde{\Sigma}(A)$. Мы благодарны Виктору Гичеву за полезные замечания, способствовавшие улучшению текста статьи.

Эта работа была выполнена во время посещения вторым из авторов математического факультета университета Бар-Илан. Он благодарен факультету за финансовую поддержку и гостеприимство.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cormack A. M., Quinto E. T.* A Radon transform on spheres through the origin in $\mathbb{R}^n$ and applications to the Darboux equation // Trans. Amer. Math. Soc. 1980. V. 260. P. 575–581.
2. *Quinto E. T.* Null spaces and ranges for the classical and spherical Radon transforms // J. Math. Anal. Appl. 1982. V. 90, N 2. P. 408–420.
3. *Epstein C. L., Kleiner B.* Spherical means in annular regions // Comm. Pure Appl. Math. 1993. V. 46, N 3. P. 441–451.
4. *Globevnik J.* Zero integrals on circles and characterizations of harmonic and analytic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. V. 317, N 1. P. 313–330.
5. *Helgason S.* Groups and geometric analysis. Orlando, FL: Acad. Press, 1987.
6. *Globevnik J.* Holomorphic extensions from open families of circles // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. V. 355, N 5. P. 1921–1931.
7. *Globevnik J.* A decomposition of functions with zero means on circles. (Preprint).
8. *Courant R., Hilbert D.* Methods of mathematical physics. New York: Wiley; Interscience, 1962. V. 2.
9. *Folland G. B.* Introduction to partial differential equations. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1995.
10. *Hörmander L.* The analysis of linear partial differential operators. I. Berlin: Springer-Verl., 1983.
11. *Epstein C. L.* Incoming and outgoing waves // J. Differential Equations. 1985. V. 60. P. 337–362.
12. *Zalcman L.* Mean values and differential equations // Israel J. Math. 1973. V. 14. P. 339–352.

Статья поступила 30 марта 2004 г.

Аграновский Марк Львович (Mark Agranovsky)
Department of Mathematics and Statistics
Bar-Ilan University
52900 Ramat Gan, Israel
agranovs@macs.biu.ac.il

E. K. Narayanan
Dept. of Mathematics
Indian Institute of Science
Bangalore–560012, India
naru@mri.ernet.in