Сибирский математический журнал
Июль—август, 2004. Том 45, № 4

УДК 517.958

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

В. Г. Романов

Аннотация: Рассматривается задача об определении коэффициента диэлектрической проницаемости для непроводящей и немагнитной среды. В качестве информации задаются следы касательных компонент электромагнитного поля на боковой поверхности цилиндрической области. Эти следы соответствуют решению некоторой прямой задачи для системы уравнений Максвелла. Импульсный источник стороннего тока расположен вне области, в которой подлежит определению искомый коэффициент. Основной результат работы — оценка устойчивости решения рассматриваемой обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, уравнения электродинамики, устойчивость, единственность.

§ 1. Постановка задачи и основной результат

Вопросы единственности решения обратных задач электродинамики начали изучаться более 50 лет тому назад [1]. Однако практически до 80-х гг. прошлого века все рассматриваемые обратные задачи ограничивались слоистыми средами, для которых электродинамические параметры зависели только от одной координаты. За последние 20 лет достигнут существенный прогресс в исследовании задач для более сложных, не слоистых сред (см., например, работы [2–11] и литературу в них). Многие многомерные обратные задачи для нестационарных уравнений Максвелла были исследованы в переопределенной постановке, когда используемая информация о решении имеет бо́льшую размерность независимых переменных (за счет вариации внешнего тока, либо вариации граничных условий), чем определяемые коэффициенты. Вопросы устойчивости решения обратных задач электродинамики только начинают изучаться. Упомянем здесь результаты для двумерной постановки обратной задачи, полученные в работах [7] и [11] (в первой из них — в переопределенной постановке). Фактически при этом использовалось только скалярное дифференциальное уравнение для одной из компонент электромагнитного поля. Представляет большой теоретический и прикладной интерес изучение вопросов устойчивости трехмерных обратных задач при использовании минимальной информации о решении. Насколько известно автору, в этом направлении к настоящему моменту имеется единственный результат [12], связанный с устойчивостью определения коэффициента проводимости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00818).

Основной результат настоящей статьи — оценка условной устойчивости решения задачи об определении коэффициента диэлектрической проницаемости. Используемая при этом информация близка к минимальной. Изучение задачи основано на методе, развитом ранее автором в работе [13] (см. также [14]). Здесь этот метод существенно модифицирован.

Пусть совокупность векторов H, E является решением задачи Коши для системы уравнений Максвелла в непроводящей среде, отвечающим нулевым начальным данным:

$$\nabla \times H = \varepsilon E_t + j, \quad \nabla \times E = -\mu H_t, \qquad (E, H)_{t<0} \equiv 0. \tag{1.1}$$

Здесь $j = j(x,t)$ — заданная функция, характеризующая плотность внешнего тока. В дальнейшем предполагается, что $j(x,t)$ имеет вид

$$j(x,t) = 2j^0 \delta(t)\,\delta(x_1). \tag{1.2}$$

В этом равенстве $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, $x = (x_1, x_2, x_3)$ и направление тока j^0 выбрано для определенности так, что $j^0 = (0,1,0)$.

Пусть ε_0, μ_0 — некоторые положительные постоянные. Предположим, что магнитная проницаемость среды постоянна: $\mu = \mu_0$, а диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(x)$ постоянна и равна ε_0 всюду вне некоторой компактной области $\Omega \in \mathbb{R}^3$, строго содержащейся внутри шара $B := B(x^0, r)$ радиуса $r > 0$ с центром в точке x^0. Кроме того, примем, что $\varepsilon(x)$ является гладкой функцией во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ (более точные предположения о гладкости см. ниже). Обозначим через $c(x) = 1/\sqrt{\varepsilon(x)\mu_0}$ скорость распространения электромагнитных волн и через $\tau(x)$ — решение следующей задачи Коши для уравнения эйконала:

$$|\nabla \tau|^2 = c^{-2}(x), \quad \tau|_{x_1=0} = 0. \tag{1.3}$$

Предположим, что $\tau(x)$ является однозначной функцией для всех $x \in \overline{B}$, где $\overline{B} = B \cup \partial B$, и $\overline{B}$ содержится внутри полупространства $x_1 > 0$.

Обозначим $G = \{(x,t) \mid x \in B,\ 0 < t < \tau(x) + T\}$, $S = \{(x,t) \mid x \in \partial B,\ 0 < t < \tau(x) + T\}$, где $T > 0$. Предположим, что для решения задачи (1.1) известны на S касательные компоненты электромагнитного поля и функция $\tau(x)$, т. е. заданы функции

$$H(x,t) \times n = F_H(x,t), \quad E(x,t) \times n = F_E(x,t), \quad \tau(x) = h(x), \quad (x,t) \in S, \tag{1.4}$$

где $n = n(x)$ — единичный вектор внешней нормали на S. Рассмотрим обратную задачу: найти $\varepsilon(x)$ по заданной информации (1.4).

Обозначим через $\Lambda(\varepsilon_0, q_0, d)$ множество положительных функций $\varepsilon(x)$, удовлетворяющих при фиксированных ε_0, q_0, d следующим двум условиям:

1) $\operatorname{supp}(\varepsilon(x) - \varepsilon_0) \subset \Omega \subset B$, $\operatorname{dist}(\partial B, \Omega) \geq d$,

2) $\|\varepsilon(x) - \varepsilon_0\|_{\mathbf{H}^9(\mathbb{R}^3)} \leq q_0$.

В дальнейшем будем предполагать, что $\varepsilon(x) \in \Lambda(\varepsilon_0, q_0, d)$ и постоянная q_0 настолько мала, что $\varepsilon_0/2 \leq \varepsilon(x) \leq 3\varepsilon_0/2$. Для простоты примем также, что скорость распространения электромагнитных сигналов вне Ω равна единице, т. е. $\varepsilon_0\mu_0 = 1$. Случай, когда скорость вне области Ω не совпадает с единичной, очевидно, приводится к рассматриваемому изменением временно́го масштаба.

Исследование свойств решений прямой задачи (1.1), (1.2) показывает (см. ниже формулы (2.5), (2.12)), что функции H, E состоят из сингулярной и регулярной частей, т. е. они представимы в виде

$$\begin{aligned} H(x,t) &= \alpha(x)\,\delta(t - \tau(x)) + \theta_0(t - \tau(x))\overline{H}(x,t), \\ E(x,t) &= \alpha_E(x)\,\delta(t - \tau(x)) + \theta_0(t - \tau(x))\overline{E}(x,t). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь $\overline{H}(x,t)$, $\overline{E}(x,t)$ — регулярные функции, а $\theta_0(t)$ — кусочно постоянная функция Хевисайда: $\theta_0(t)=1$ для $t\geq 0$ и $\theta_0(t)=0$ для $t<0$. В связи с этим функции F_H, F_E представимы в аналогичном виде:

$$\begin{aligned}F_H(x,t)&=\gamma_H(x)\,\delta(t-\tau(x))+\theta_0(t-\tau(x))f_H(x,t),\\ F_E(x,t)&=\gamma_E(x)\,\delta(t-\tau(x))+\theta_0(t-\tau(x))f_E(x,t),\end{aligned}\tag{1.6}$$

причем $\gamma_H=\alpha\times n$, $\gamma_E=\alpha_E\times n$. Таким образом, задание функций F_H, F_E эквивалентно заданию двух пар функций (γ_H,f_H), (γ_E,f_E).

Основным содержанием настоящей работы является следующая теорема устойчивости решения обратной задачи.

Теорема 1.1. *Пусть данные* $\{\gamma_H^{(j)}(x),f_H^{(j)}(x,t),\gamma_E^{(j)}(x),f_E^{(j)}(x,t),\tau_j(x)\}$ *соответствуют решению задачи* (1.1) *с* $\varepsilon=\varepsilon_j(x)\in\Lambda(\varepsilon_0,q_0,d)$ *для* $j=1,2$, *а параметры* r,T,x^0, *определяющие геометрию области, фиксированы и таковы, что*

$$\operatorname{dist}(\{x\in\mathbb{R}^3\mid x_1=0\},\partial B):=\rho>0,\quad 4r/T:=\chi\in(0,1).$$

Тогда найдутся постоянные $q_0=q_0(r,T,d)$, $C=C(r,T,d)>0$ *такие, что для любых* $\varepsilon_1\in\Lambda(\varepsilon_0,q_0,d)$, $\varepsilon_2\in\Lambda(\varepsilon_0,q_0,d)$ *и отвечающих им данных обратной задачи имеет место неравенство*

$$\begin{aligned}\|\varepsilon_1-\varepsilon_2\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\leq C\big\{&\big\|\hat f_H^{(1)}-\hat f_H^{(2)}\big\|^2_{\mathbf{H}^1(S')}+\big\|\hat f_E^{(1)}-\hat f_E^{(2)}\big\|^2_{\mathbf{H}^2(S')}\\ &+\big\|\gamma_H^{(1)}-\gamma_H^{(2)}\big\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)}+\big\|\gamma_E^{(1)}-\gamma_E^{(2)}\big\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)}+\|\tau_1-\tau_2\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)}\big\},\end{aligned}\tag{1.7}$$

в котором $S':=\partial B\times(0,T)$ *и*

$$\hat f_H^{(j)}(x,t):=f_H^{(j)}(x,t+\tau_j(x)),\quad \hat f_E^{(j)}(x,t):=f_E^{(j)}(x,t+\tau_j(x)).$$

Здесь и ниже по определению квадрат некоторой нормы векторной функции равен сумме квадратов соответствующих норм ее компонент.

Из теоремы 1.1, очевидно, следует теорема единственности.

Теорема 1.2. *При выполнении условий теоремы* 1.1 *существует постоянная* $q_0=q_0(r,T,d)$ *такая, что для любых* $\varepsilon_1\in\Lambda(\varepsilon_0,q_0,d)$, $\varepsilon_2\in\Lambda(\varepsilon_0,q_0,d)$ *из совпадения отвечающих им данных обратной задачи*

$$\begin{gathered}f_H^{(1)}(x,t)=f_H^{(2)}(x,t),\quad f_E^{(1)}(x,t)=f_E^{(2)}(x,t),\quad \gamma_H^{(1)}(x)=\gamma_H^{(2)}(x),\\ \gamma_E^{(1)}(x)=\gamma_E^{(2)}(x),\quad \tau_1(x)=\tau_2(x),\quad (x,t)\in S,\end{gathered}$$

следует равенство $\varepsilon_1(x)=\varepsilon_2(x)$.

§ 2. Доказательство основной теоремы

Исключая из рассмотрения функцию E, приходим к следующей задаче Коши для вектора магнитной напряженности:

$$\varepsilon\mu_0H_{tt}-\Delta H-\nabla\ln\varepsilon\times(\nabla\times H)=\nabla\times j,\quad H|_{t<0}\equiv 0.\tag{2.1}$$

Рассмотрим для уравнения (2.1) вспомогательную обратную задачу об определении функции $\varepsilon\in\Lambda(\varepsilon_0,q_0,d)$ по заданным на S следам решения задачи (2.1) и его нормальной производной, т. е. по заданным функциям

$$H(x,t)=F(x,t),\quad \frac{\partial H}{\partial n}=G(x,t),\quad (x,t)\in S.\tag{2.2}$$

Если $\varepsilon(x)=\varepsilon_0$ для всех $x\in\mathbb{R}^3$ и $\varepsilon_0\mu_0=1$, то решение задачи (2.1) имеет вид

$$H(x,t)=\nabla\times(j^0\,\theta_0(t-|x_1|)=\alpha^0(x)\,\delta(t-|x_1|), \tag{2.3}$$

в котором

$$\alpha^0(x)=e^{(3)}\operatorname{sign}(x_1),\quad e^{(3)}=(0,0,1). \tag{2.4}$$

В силу предположения, что $\varepsilon=\varepsilon_0$, $\mu=\mu_0$, $\varepsilon_0\mu_0=1$, вне B, представление (2.3) вместе с формулой (2.4) выполняются для $\{(x,t)\in\mathbb{R}^4\mid x_1<\rho,\,t<2\rho-x_1\}$.

В общем случае в окрестности волнового фронта $t=\tau(x)$ представление для H имеет вид

$$H(x,t)=\alpha(x)\,\delta(t-\tau(x))+\theta_0(t-\tau(x))\overline{H}(x,t). \tag{2.5}$$

Здесь $\overline{H}(x,t)$ — регулярная функция, а $\tau(x)$ является решением задачи (1.3).

Действуя аналогично [13] (см. § 4), нетрудно показать, что для $\varepsilon(x)\in\Lambda(\varepsilon_0,q_0,d)$ и любого $t_0>0$ существует число $q_0=q_0(t_0,\varepsilon_0)>0$ такое, что поле геодезических $\Gamma(x)$, ортогональных фронтам $\tau(x)$=const, регулярно в области $D(t_0)=\{x\in\mathbb{R}^3\mid\tau(x)\le t_0\}$. Обозначим $K(t_0)=\{(x,t)\mid x\in D(t_0),\tau(x)\le t\le 2t_0-\tau(x)\}$. Пусть в дальнейшем числа q_0 и t_0 выбраны так, что выполнено условие регулярности геодезических в $D(t_0)$ и $B\subset D(t_0)$, $G'':=G\cap\{(x,t)\in\mathbb{R}^4\mid t>\tau(x)\}\subset K(t_0)$. При этом функция $\tau(x)$ является гладкой однозначной функцией точки $x\in D(t_0)$ и для нее имеет место оценка

$$\|\tau(x)-x_1\|_{\mathbf{H}^8(B)}\le Cq_0 \tag{2.6}$$

с постоянной, зависящей от r, ε_0. Уравнения для $\alpha(x)$ и предельной при $t\to\tau(x)+0$ функции $\overline{H}(x,t)$, которую обозначим через $\beta(x)$, получаются в результате подстановки представления (2.5) в уравнение (2.1) и приравнивания коэффициентов при $\delta'(t-\tau(x))$ и $\delta(t-\tau(x))$. Они имеют вид

$$\begin{gathered}2(\nabla\tau\cdot\nabla)\alpha+(\Delta\tau-\nabla\ln\varepsilon\cdot\nabla\tau)\alpha+(\nabla\ln\varepsilon\cdot\alpha)\nabla\tau=0,\\ 2(\nabla\tau\cdot\nabla)\beta+(\Delta\tau-\nabla\ln\varepsilon\cdot\nabla\tau)\,\beta+(\nabla\ln\varepsilon\cdot\beta)\nabla\tau=\Delta\alpha+\nabla\ln\varepsilon\times(\nabla\times\alpha).\end{gathered} \tag{2.7}$$

Заметим, что для $x\in V(\rho):=\{x\in\mathbb{R}^3\mid x_1<\rho\}$ функции определяются равенствами $\alpha(x)=\alpha^0(x)$, $\beta(x)=0$. В области $D'(t_0,\rho):=D(t_0)\setminus V(\rho)$ они являются гладкими функциями, а именно $\alpha\in\mathbf{H}^7(D'(t_0,\rho))$ и $\beta\in\mathbf{H}^5(D'(t_0,\rho))$. Кроме того, легко устанавливается следующее свойство функции $\alpha(x)$ (см. [10]):

$$\alpha(x)\cdot\nabla\tau(x)=0.$$

В области $t>\tau(x)$ функция $H(x,t)$ совпадает с $\overline{H}(x,t)$ и удовлетворяет соотношениям

$$\varepsilon\mu_0H_{tt}-\Delta H-\nabla\ln\varepsilon\times(\nabla\times H)=0,\quad t>\tau(x), \tag{2.8}$$

$$H|_{t=\tau(x)+0}=\beta(x). \tag{2.9}$$

Достаточно очевидно, что при сделанных предположениях о множестве $\Lambda(\varepsilon_0,q_0,d)$ функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ удовлетворяют в области B оценкам

$$\|\alpha(x)-\alpha^0(x)\|_{\mathbf{H}^7(B)}<Cq_0,\quad \|\beta(x)\|_{\mathbf{H}^5(B)}<Cq_0 \tag{2.10}$$

с некоторой положительной постоянной C. Используя метод энергетических оценок для области $K(t_0)$, аналогично работе [13] нетрудно показать, что функция $\overline{H}(x,t)$ принадлежит классу $\mathbf{H}^4(D(t_0))$, а следовательно, и $\mathbf{C}^1(G'')$ и для нее выполняется неравенство

$$\|\overline{H}(x,t)\|_{\mathbf{C}^1(G'')}<Cq_0 \tag{2.11}$$

с некоторой новой положительной постоянной C.

Из уравнений Максвелла (1.1) следует, что представление, аналогичное (2.5), имеет место и для вектора E, а именно

$$E(x,t) = \alpha_E(x)\,\delta(t-\tau(x)) + \theta_0(t-\tau(x))\overline{E}(x,t). \tag{2.12}$$

Здесь $\overline{E}(x,t)$ — регулярная функция, свойства которой идентичны свойствам функции $\overline{H}(x,t)$, а функция $\alpha_E(x)$ выражается через $\alpha(x)$ по формуле $\alpha_E(x) = \varepsilon^{-1}(x)\alpha(x)\times\nabla\tau(x)$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\widehat{H}(x,t) = H(x,t+\tau(x)).$$

Нетрудно проверить, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$2(\nabla\tau\cdot\nabla)\widehat{H}_t - \Delta\widehat{H} + \widehat{H}_t\Delta\tau + (\nabla\times\widehat{H} + \widehat{H}_t\times\nabla\tau)\times\nabla\ln\varepsilon = 0, \quad (x,t)\in B\times(0,T), \tag{2.13}$$

и предельному условию

$$\widehat{H}|_{t+0} = \beta(x). \tag{2.14}$$

Кроме того, в силу (2.1) на $S' := \partial B\times(0,T)$ она определена формулами

$$\widehat{H}(x,t) = \widehat{F}(x,t), \quad \frac{\partial\widehat{H}}{\partial n} = \widehat{G}(x,t), \quad (x,t)\in S', \tag{2.15}$$

в которых

$$\widehat{F}(x,t) = F(x,t+\tau(x)), \quad \widehat{G}(x,t) = G(x,t+\tau(x)) + F_t(x,t+\tau(x))\,\frac{\partial\tau}{\partial n}. \tag{2.16}$$

Пусть $\varepsilon_j(x)$, $j=1,2$, — любые две функции, принадлежащие $\Lambda(\varepsilon_0,q_0,d)$. Отвечающие им функции $\tau(x)$ отметим индексом j внизу, а вектор-функции H, $\widehat{H}$, α, β, $\widehat{F}$, $\widehat{G}$ — индексом j вверху, т. е. примем для них обозначения τ_j, $H^{(j)}$, $\widehat{H}^{(j)}$, $\alpha^{(j)}$, $\beta^{(j)}$, $\widehat{F}^{(j)}$, $\widehat{G}^{(j)}$, и введем разности

$$\tilde\varepsilon = \varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \tilde\tau = \tau_1-\tau_2,\ u = \widehat{H}^{(1)} - \widehat{H}^{(2)},\ \widetilde{F} = \widehat{F}^{(1)} - \widehat{F}^{(2)},\ \widetilde{G} = \widehat{G}^{(1)} - \widehat{G}^{(2)},$$
$$\tilde\eta = \ln\varepsilon_1 - \ln\varepsilon_2, \quad u = \widehat{H}^{(1)} - \widehat{H}^{(2)}, \quad \tilde\alpha = \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}, \quad \tilde\beta = \beta^{(1)} - \beta^{(2)}.$$

Из равенств (2.13)–(2.15) вытекают следующие соотношения для разностей:

$$2(\nabla\tau_1\cdot\nabla)u_t - \Delta u + u_t\Delta\tau_1 = P, \quad (x,t)\in B\times(0,T), \tag{2.17}$$

$$u|_{t+0} = \tilde\beta(x), \quad x\in B, \tag{2.18}$$

$$u(x,t) = \widetilde{F}(x,t), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \widetilde{G}(x,t), \quad (x,t)\in S', \tag{2.19}$$

в которых символом P обозначено выражение

$$\begin{aligned} P = {}&-(\nabla\times u + u_t\times\nabla\tau_1)\times\nabla\ln\varepsilon_1 - 2(\nabla\tilde\tau\cdot\nabla + \Delta\tilde\tau)\widehat{H}_t^{(2)} \\ &- \big(\widehat{H}_t^{(2)}\times\nabla\tilde\tau\big)\times\nabla\ln\varepsilon_1 - \big(\nabla\times\widehat{H}^{(2)} + \widehat{H}_t^{(2)}\times\nabla\tau_2\big)\times\nabla\tilde\eta. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Воспользуемся следующей леммой, являющейся следствием леммы 4.3.6 из книги [14].

Лемма. *Для любой скалярной функции* $w \in \mathbf{H}^2(G')$, $G' = B \times (0,T))$, *и* $\varepsilon_1 \in \Lambda(\varepsilon_0, q_0, d)$ *при выполнении условия* $4r < T$ *существуют такие положительные постоянные* q_0, C_1, C_2, *зависящие только от* r, T, ε_0, *что имеет место оценка*

$$\begin{aligned}\int\limits_{G'} (2\nabla w_t \cdot \nabla\tau_1 - \Delta w + w_t \Delta\tau_1)^2\, dxdt \\ \geq C_1\Big[\int\limits_{G'} \big(w^2 + w_t^2 + |\nabla w|^2\big)\, dxdt + \int\limits_{\Sigma_0\cup\Sigma_T} (w^2 + |\nabla w|^2)\, dx\Big] \\ - C_2 \int\limits_{S'} \big(w^2 + w_t^2 + |\nabla w|^2\big)\, dSdt, \qquad (2.21)\end{aligned}$$

в которой

$$\Sigma_0 = \{(x,t) \mid x \in B, t = 0\}, \quad \Sigma_T = \{(x,t) \mid x \in B, t = T\},$$

dS *— элемент площади.*

Аналогичное неравенство имеет место для каждой из компонент вектора $u(x,t)$. В силу равенства (2.17) имеет место соотношение

$$|2(\nabla\tau_1 \cdot \nabla)u_t - \Delta u + u_t \Delta\tau_1|^2 = |P|^2.$$

Поэтому неравенство (2.21) можно записать для функции $u(x,t)$ в виде

$$\begin{aligned}\int\limits_{G'} |P|^2\, dxdt \geq C_1\Big[\int\limits_{G'} (|u|^2 + |u_t|^2 + |u_x|^2)\, dxdt + \int\limits_{\Sigma_0\cup\Sigma_T} (|u|^2 + |u_x|^2)\, dx\Big] \\ - C_2 \int\limits_{S'} (|u|^2 + |u_t|^2 + |u_x|^2)\, dSdt. \qquad (2.22)\end{aligned}$$

Здесь через $|u_x|^2$ обозначено выражение $\sum\limits_{i,j=1}^{3} ((u_i)_{x_j})^2$.

Оценим величину $|P|$ и после этого используем неравенство (2.22). В силу принадлежности $\varepsilon_j(x)$, $j = 1, 2$, классу $\Lambda(\varepsilon_0, q_0, d)$ для функции $\widehat{H}^{(2)}$ имеет место оценка такого же типа (2.11), как и для функции $\overline{H}$, т. е.

$$\|\widehat{H}^{(2)}\|_{\mathbf{C}^1(B\times(0,T))} < Cq_0, \qquad (2.23)$$

с постоянной C, зависящей лишь от r, T, ε_0. В дальнейшем тем же символом C будут иногда обозначаться различные постоянные, зависящие от r, T, ε_0 и не зависящие от q_0. Из теорем вложения следует, что $\|\varepsilon_j - \varepsilon_0\|_{\mathbf{C}^7(B)} \leq Cq_0$, где C — некоторая постоянная, зависящая лишь от r. Для функции $\tilde\eta$ имеет место представление

$$\tilde\eta = \int\limits_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} z^{-1}\, dz = \tilde\varepsilon \int\limits_0^1 [s\varepsilon_1 + (1-s)\varepsilon_2]^{-1}\, ds. \qquad (2.24)$$

Поэтому справедливо неравенство вида

$$|\nabla\tilde\eta| \leq C(|\nabla\tilde\varepsilon| + |\tilde\varepsilon|). \qquad (2.25)$$

Из уравнения эйконала и сделанного выше предположения о достаточной малости постоянной q_0 вытекает, что $|\nabla\tau_1|^2 = \varepsilon_1(x)\mu_0 \le 3\varepsilon_0\mu_0/2 = 3/2$. Все эти факты приводят к оценке

$$|P|^2 \le C_3 q_0^2 (|u_t|^2 + |u_x|^2 + |u|^2 + |\nabla\tilde\tau|^2 + |\Delta\tilde\tau|^2 + |\nabla\tilde\varepsilon|^2 + |\tilde\varepsilon|^2), \tag{2.26}$$

в которой постоянная C_3 зависит лишь от r, T, ε_0.

Из неравенства (2.22) следует, что

$$\begin{aligned} C_1 \bigg[\int\limits_{G'} (|u|^2 + |u_t|^2 + |u_x|^2)\,dxdt + \int\limits_{\Sigma_0\cup\Sigma_T} (|u|^2 + |u_x|^2)\,dx \bigg] \\ - C_2 \int\limits_{S'} (|u|^2 + |u_t|^2 + |u_x|^2)\,dSdt \\ \le q_0^2 C_3 \int\limits_{G'} (|u_t|^2 + |u_x|^2 + |u|^2 + |\nabla\tilde\tau|^2 + |\Delta\tilde\tau|^2 + |\nabla\tilde\varepsilon|^2 + |\tilde\varepsilon|^2)\,dxdt. \end{aligned} \tag{2.27}$$

При достаточно малом значении постоянной q_0 из неравенства (2.27) вытекает соотношение

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Sigma_0} (|u|^2 + |u_x|^2)\,dx \le C_2' \int\limits_{S'} (|u|^2 + |u_t|^2 + |u_x|^2)\,dSdt \\ + q_0^2 C_3' \int\limits_{B} (|\nabla\tilde\tau|^2 + |\Delta\tilde\tau|^2 + |\nabla\tilde\varepsilon|^2 + |\tilde\varepsilon|^2)\,dx, \end{aligned} \tag{2.28}$$

в котором постоянные C_2', C_3' зависят от r, T, ε_0.

Так как из уравнения эйконала (1.7), записанного для функций τ_j, $c_j^{-2} = \varepsilon_j\mu_0$, $j = 1, 2$, следует равенство

$$\nabla\tilde\tau \cdot (\nabla\tau_1 + \nabla\tau_2) = \tilde\varepsilon\mu_0, \tag{2.29}$$

то справедлива оценка

$$\int\limits_B (|\nabla\tilde\varepsilon|^2 + |\tilde\varepsilon|^2)\,dx \le C \int\limits_B \bigg(|\nabla\tilde\tau|^2 + \sum_{i,j=1}^{3} \tilde\tau_{x_i x_j}^2 \bigg)\,dx \tag{2.30}$$

с некоторой постоянной C, зависящей от r, ε_0. С другой стороны, из соотношений (2.18) имеем

$$\int\limits_{S'} (|u|^2 + |u_t|^2 + |u_x|^2)\,dSdt = \|\widetilde F\|^2_{\mathbf{H}^1(S')} + \|\widetilde G\|^2_{\mathbf{L}^2(S')}. \tag{2.31}$$

Поэтому неравенство (2.28) можно записать в виде

$$\int\limits_B (|\tilde\beta|^2 + |\tilde\beta_x|^2)\,dx \le C\big(\|\widetilde F\|^2_{\mathbf{H}^1(S')} + \|\widetilde G\|^2_{\mathbf{L}^2(S')} + q_0^2\|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\big). \tag{2.32}$$

Воспользуемся этим неравенством, чтобы оценить $\|\tilde\tau\|_{\mathbf{H}^2(B)}$ через значения функции $\tilde\tau$ и ее производных на ∂B и $\|\widetilde F\|_{\mathbf{H}^1(S')}$, $\|\widetilde G\|_{\mathbf{L}^2(S')}$. Тогда из неравенства (2.30) будет следовать оценка для $\mathbf{H}^1(B)$ нормы функции $\tilde\varepsilon$. С этой целью вернемся к соотношениям (2.7), запишем их для функций τ_j, $\alpha^{(j)}$, $\beta^{(j)}$, $j = 1, 2$, и вычтем одно из другого. В результате для разностей $\tilde{\tau}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\eta} = \ln\varepsilon_1 - \ln\varepsilon_2$ получим равенства

$$\begin{aligned}2(\nabla\tau_1\cdot\nabla)\tilde{\alpha} + (\Delta\tau_1 - \nabla\ln\varepsilon_1\cdot\nabla\tau_1)\tilde{\alpha} + (\nabla\ln\varepsilon_1\cdot\tilde{\alpha})\nabla\tau_1 + (\nabla\ln\varepsilon_1\cdot\alpha^{(2)})\nabla\tilde{\tau}\\ + 2(\nabla\tilde{\tau}\cdot\nabla)\alpha^{(2)} + (\Delta\tilde{\tau} - \nabla\ln\varepsilon_1\cdot\nabla\tilde{\tau} - \nabla\tilde{\eta}\cdot\nabla\tau_2)\alpha^{(1)}\\ + (\nabla\ln\varepsilon_1\cdot\tilde{\alpha} + \nabla\tilde{\eta}\cdot\alpha^{(2)})\nabla\tau_2 = 0,\end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}2(\nabla\tau_1\cdot\nabla)\tilde{\beta} + (\Delta\tau_1 - \nabla\ln\varepsilon_1\cdot\nabla\tau_1)\tilde{\beta} + (\nabla\ln\varepsilon_1\cdot\tilde{\beta})\nabla\tau_1 + (\nabla\ln\varepsilon_1\cdot\beta^{(1)})\nabla\tilde{\tau}\\ + 2(\nabla\tilde{\tau}\cdot\nabla)\beta^{(2)} + (\Delta\tilde{\tau} - \nabla\ln\varepsilon_1\cdot\nabla\tilde{\tau} - \nabla\tilde{\eta}\cdot\nabla\tau_2)\beta^{(2)}\\ + (\nabla\ln\varepsilon_1\cdot\tilde{\beta} + \nabla\tilde{\eta}\cdot\beta^{(2)})\nabla\tau_2 = \Delta\tilde{\alpha} + \nabla\ln\varepsilon_1\times(\nabla\times\tilde{\alpha}) + \nabla\tilde{\eta}\times(\nabla\times\alpha^{(2)}).\end{aligned} \quad (2.34)$$

Рассмотрим вначале последнее из этих двух равенств. С учетом того, что для $\alpha^{(2)}(x)$, $\beta^{(2)}$ имеют место неравенства вида (2.10), а для $\tilde{\eta}$ и $\tilde{\varepsilon}$ неравенства (2.25) и (2.30) соответственно, из равенства (2.34) следует, что

$$\|\Delta\tilde{\alpha}\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} \le C\big(\|\tilde{\beta}\|_{\mathbf{H}^1(B)} + q_0^2(\|\tilde{\alpha}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^2(B)})\big). \quad (2.35)$$

Воспользуемся теперь оценкой (см. [15]) $\mathbf{H}^2(B)$-нормы функции через ее лапласиан:

$$\|\tilde{\alpha}\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} \le C\Big(\|\Delta\tilde{\alpha}\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} + \sum_{|\gamma|\le 2}\|D^\gamma\tilde{\alpha}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial B)}\Big) \quad (2.36)$$

с постоянной C, зависящей лишь от r. Здесь принято также обычное обозначение D^γ для мультииндексной производной, при этом $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ и $|\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$. Вне области Ω коэффициент $\varepsilon(x)$ совпадает с постоянной ε_0, поэтому уравнение (2.33) для $\tilde{\alpha}$ имеет вид

$$2(\nabla\tau_1\cdot\nabla)\tilde{\alpha} + \Delta\tau_1\tilde{\alpha} + 2(\nabla\tilde{\tau}\cdot\nabla)\alpha^{(2)} + \Delta\tilde{\tau}\alpha^{(2)} = 0, \quad x\in B\setminus\Omega. \quad (2.37)$$

При этом в силу уравнения (2.29) для функции $\tilde{\tau}(x)$ справедливо соотношение

$$\nabla\tilde{\tau}\cdot(\nabla\tau_1 + \nabla\tau_2) = 0, \quad x\in B\setminus\Omega. \quad (2.38)$$

Равенства (2.37), (2.38) позволяют оценить входящие в (2.36) $\mathbf{L}^2(\partial B)$-нормы функции $\tilde{\alpha}$ и ее производных через граничные значения на ∂B функции $\tilde{\tau}(x)$. В самом деле, как говорилось выше, поле геодезических (линий, ортогональных фронтам $\tau(x) = \mathrm{const}$) является регулярным в некоторой области, содержащей B внутри себя по крайней мере для достаточно малых q_0. Поэтому, с одной стороны, имеют место равенства

$$\tilde{\tau}(x) = 0, \quad \tilde{\alpha}(x) = 0,\ x\in\partial B\setminus\partial B', \quad \partial B' =: \big\{x\in\partial B \mid x_1 - x_1^0 > \sqrt{r^2-(r-d)^2}\big\}, \quad (2.39)$$

которые верны на $\partial B\setminus\partial B'$ и для всех существующих производных функций $\tilde{\tau}(x)$, $\tilde{\alpha}(x)$, а с другой стороны, $\nabla\tau_j(x)\cdot n(x) > 0$, $j = 1, 2$, для $x\in\partial B'$. Это позволяет, используя соотношение (2.38), выразить все производные функции $\tilde{\tau}(x)$ на $\partial B'$ до третьего порядка через производные вдоль $\partial B'$. Аналогично из равенства (2.37) можно выразить производные до второго порядка функции $\tilde{\alpha}(x)$ на $\partial B'$ через соответствующие производные от нее вдоль $\partial B'$ и производные до третьего порядка функции $\tilde{\tau}(x)$. В результате получаем оценки вида

$$\sum_{|\gamma|\le 3}\|D^\gamma\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial B)} \le C\|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)}, \quad (2.40)$$

$$\sum_{|\gamma|\le 2}\|D^\gamma\tilde\alpha\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial B)}\le C\bigl(\|\tilde\alpha\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)}+\|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)}\bigr),\tag{2.41}$$

в которых постоянная C зависит от r и d.

Из полученных оценок (2.35), (2.36), (2.41) следует при достаточно малых значениях q_0 неравенство

$$\|\tilde\alpha\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\le C\bigl(\|\tilde\beta\|_{\mathbf{H}^1(B)}+\|\tilde\alpha\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)}+\|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)}+q_0^2\|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\bigr).\tag{2.42}$$

Рассмотрим теперь соотношение (2.33). Умножим его скалярно на $\alpha^{(2)}$ и воспользуемся тем, что $\alpha^{(2)}\cdot\nabla\tau_2=0$. Выполняя достаточно простые оценки, приходим к неравенству

$$\|\Delta\tilde\tau-\nabla\tilde\eta\cdot\nabla\tau_2\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\le C\bigl(\|\tilde\alpha\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}+q_0^2\|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\bigr)\tag{2.43}$$

с постоянной C, зависящей от r, d.

Вычислим выражение $\nabla\tilde\eta\cdot\nabla\tau_2$ через $\tilde\tau$ с помощью соотношений (2.24), (2.29), (2.6). В результате вычислений получаем представление

$$\nabla\tilde\eta\cdot\nabla\tau_2=:L\tilde\tau=2\tilde\tau_{x_1x_1}+\sum_{1\le|\gamma|\le 2}a_\gamma(x)D^\gamma\tilde\tau,\tag{2.44}$$

в котором коэффициенты a_γ являются гладкими функциями и удовлетворяют неравенствам

$$\|a_\gamma(x)\|_{\mathbf{H}^6(B)}\le Cq_0.\tag{2.45}$$

Оператор $\Delta-L$ является x_1-гиперболическим при малых значениях q_0. Применяя обычный для гиперболических уравнений метод энергетических неравенств с использованием семейства областей $B_s=\bigl\{x\in B\mid x_1<x_1^0+s\bigr\}$, $-r<s<r$, находим, что

$$\|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\le C\Bigl(\|\Delta\tilde\tau-L\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}+\sum_{|\gamma|\le 2}\|D^\gamma\tilde\tau\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial B)}\Bigr).\tag{2.46}$$

Здесь $C=C(r)$. Тогда из неравенств (2.40), (2.43), (2.46) следует оценка

$$\|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\le C\bigl(\|\tilde\alpha\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}+\|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)}+q_0^2\|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\bigr).\tag{2.47}$$

Исключим из этого неравенства норму функции $\tilde\alpha$ с помощью соотношения (2.42), а затем и норму $\tilde\beta$, используя соотношение (2.32). Результат этих операций можно записать для достаточно малых значений q_0 в виде

$$\|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\le C\bigl(\|\widetilde F\|^2_{\mathbf{H}^1(S')}+\|\widetilde G\|^2_{\mathbf{L}^2(S')}+\|\tilde\alpha\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)}+\|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)}\bigr).\tag{2.48}$$

Из неравенства (2.30) вытекает оценка

$$\|\tilde\varepsilon\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\le C\bigl(\|\widetilde F\|^2_{\mathbf{H}^1(S')}+\|\widetilde G\|^2_{\mathbf{L}^2(S')}+\|\tilde\alpha\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)}+\|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)}\bigr).\tag{2.49}$$

Для получения оценки (1.7) достаточно выразить нормы функций $\widetilde F$, $\widetilde G$ и $\tilde\alpha$, входящих в неравенство (2.49), через

$$\tilde f_H=\hat f_H^{(1)}-\hat f_H^{(2)},\quad \tilde f_E=\hat f_E^{(1)}-\hat f_E^{(2)},\quad \tilde\gamma_H=\hat\gamma_H^{(1)}-\hat\gamma_H^{(2)},\quad \tilde\gamma_E=\hat\gamma_E^{(1)}-\hat\gamma_E^{(2)}.$$

Воспользуемся для этого уравнениями (1.1). Рассмотрим их в d-окрестности ∂S. При этом $\varepsilon=\varepsilon_0$. Перейдем к функциям $\widehat H=H(x,t+\tau(x))$, $\widehat E=E(x,t+\tau(x))$. В окрестности S' эти функции удовлетворяют соотношениям

$$\nabla\times\widehat H+\widehat H_t\times\nabla\tau=\varepsilon_0\widehat E_t,\quad \nabla\times\widehat E+\widehat E_t\times\nabla\tau=-\mu_0\widehat H_t,\tag{2.50}$$

$$\nabla\cdot\widehat{H}-\widehat{H}_t\cdot\nabla\tau=0,\quad \nabla\cdot\widehat{E}-\widehat{E}_t\cdot\nabla\tau=0. \tag{2.51}$$

Отсюда легко выводятся соответствующие равенства для функций $\widetilde{H}=\widehat{H}^{(1)}-\widehat{H}^{(2)}$, $\widetilde{E}=\widehat{E}^{(1)}-\widehat{E}^{(2)}$. Они имеют вид

$$\nabla\times\widetilde{H}+\widetilde{H}_t\times\nabla\tau_1+\widehat{H}_t^{(2)}\times\nabla\tilde{\tau}=\varepsilon_0\widetilde{E}_t,\quad \nabla\times\widetilde{E}+\widetilde{E}_t\times\nabla\tau_1+\widehat{E}_t^{(2)}\times\nabla\tilde{\tau}=-\mu_0\widetilde{H}_t, \tag{2.52}$$

$$\nabla\cdot\widetilde{H}-\widetilde{H}_t\cdot\nabla\tau_1-\widehat{H}_t^{(2)}\cdot\nabla\tilde{\tau}=0,\quad \nabla\cdot\widetilde{E}-\widetilde{E}_t\cdot\nabla\tau_1-\widehat{E}_t^{(2)}\cdot\nabla\tilde{\tau}=0. \tag{2.53}$$

Представим функции $\widetilde{H}$, $\widetilde{E}$ на S' в виде

$$\widetilde{H}=\mathbf{n}\times(\widetilde{H}\times n)+\widetilde{H}_n n,\quad \widetilde{H}_n=\widetilde{H}\cdot n,\quad \widetilde{E}=n\times(\widetilde{E}\times n)+\widetilde{E}_n n,\quad \widetilde{E}_n=\widetilde{E}\cdot n. \tag{2.54}$$

Отсюда

$$\widetilde{H}=n\times\tilde{f}_H+\widetilde{H}_n n,\quad \widetilde{E}=n\times\tilde{f}_E+\widetilde{E}_n n,\qquad (x,t)\in S'. \tag{2.55}$$

Заметим, что на S' нормальные компоненты поля $\widetilde{H}_n$, $\widetilde{E}_n$ совпадают с радиальными $\widetilde{H}_r=\widetilde{H}\cdot e_r$, $\widetilde{E}_r=\widetilde{E}\cdot e_r$, где $e_r=(x-x^0)/|x-x^0|$ — единичный радиус-вектор. Компоненты $\widetilde{H}_n$, $\widetilde{E}_n$, а также нормальные производные тангенциальных компонент векторов $\widetilde{H}$, $\widetilde{E}$ находятся из равенств (2.52). Производные по нормали на S' радиальных компонент $\widetilde{H}_r$, $\widetilde{E}_r$ вычисляются из равенств (2.53). Чтобы убедиться в этом, достаточно равенства (2.52), (2.53) записать в сферической системе координат. Поскольку при вычислении, например, $\widetilde{H}_n$ приходится дифференцировать тангенциальные компоненты $\widetilde{E}$ по угловым координатам и интегрировать выражение $\partial\widetilde{H}_n/\partial t$ по переменной t в пределах от $-\infty$ до t, находим, что

$$\|\widetilde{F}\|^2_{\mathbf{H}^1(S')}+\|\widetilde{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(S')}\le C(\|\tilde{f}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(S')}+\|\tilde{f}_E\|^2_{\mathbf{H}^2(S')}+\|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)}+\|\tilde{\alpha}\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)}). \tag{2.56}$$

Согласно принятым обозначениям и отмеченному ранее свойству ортогональности векторов α, $\nabla\tau$, имеем цепочку равенств:

$$\alpha_E=\alpha\times\nabla\tau,\quad \gamma_E=\alpha_E\times n=(\alpha\times\nabla\tau)\times n=-\alpha(\nabla\tau\cdot n)+\alpha_n\nabla\tau,$$

$$\alpha_n=\alpha\cdot n,\quad \alpha_n=\gamma_E\cdot\nabla\tau,\quad \tilde{\alpha}=n\times\tilde{\gamma}_H+(\tilde{\gamma}_E\cdot\nabla\tau_1+\gamma_E^{(2)}\cdot\nabla\tilde{\tau})n,\quad x\in\partial B.$$

Отсюда следует оценка

$$\|\tilde{\alpha}\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)}\le C\big(\|\tilde{\gamma}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)}+\|\tilde{\gamma}_E\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)}+\|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)}\big). \tag{2.57}$$

Из оценок (2.49), (2.56), (2.57) вытекает окончательная оценка для $\tilde{\varepsilon}$:

$$\|\tilde{\varepsilon}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\le C\big(\|\tilde{f}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(S')}+\|\tilde{f}_E\|^2_{\mathbf{H}^2(S')}+\|\tilde{\gamma}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)} + \|\tilde{\gamma}_E\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)}+\|\tilde{\alpha}\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)}+\|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)}\big), \tag{2.58}$$

которая приводит к оценке (1.7) решения обратной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н.* О единственности решения задачи электроразведки // Докл. АН СССР. 1949. Т. 69, № 6. С. 797–800.
2. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
3. *Романов В. Г., Кабанихин С. И.* Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука, 1991.
4. *Рамм А. Г.* Многомерные обратные задачи рассеяния. М.: Мир, 1994.
5. *Ola P., Päivärinta L., Somersalo E.* An inverse boundary value problem in electrodynamics // Duke Math. J. 1993. V. 70. P. 617–653.

6. *Ola P., Somersalo E.* Electromagnetic inverse problems and generalized Sommerfeld potential // SIAM J. Appl. Math. 1996. V. 560. P. 1129–1145.

7. *Yakhno V. G.* Multidimensional inverse problems in ray formulation for hyperbolic equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1998. V. 6, N 4. P. 373–386.

8. *Белишев М. И., Гласман А. К.* Динамическая обратная задача для системы Максвелла: восстановление скорости в регулярной зоне // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, № 2. С. 131–187.

9. *Белишев М. И., Исаков В. М., Пестов Л. Н., Шарафутдинов В. А.* К реконструкции метрики по внешним электромагнитным наблюдениям // Докл. РАН. 2000. Т. 372, № 2. С. 298–300.

10. *Романов В. Г.* Обратные задачи электродинамики // Докл. РАН. 2002. Т. 386, № 3. С. 304–309.

11. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости решения в одной обратной задаче для системы уравнений Максвелла // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. С. 196–205.

12. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости решения в двумерной обратной задаче электродинамики // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 4. С. 837–850.

13. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости в обратной задаче определения скорости звука // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 6. С. 1323–1338.

14. *Romanov V. G.* Investigation methods for inverse problems. Utrecht: VSP, 2002.

15. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

Статья поступила 12 мая 2004 г.

Романов Владимир Гаврилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru