Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2004. Том 45, № 5

УДК 510.5+510.6+512.563

ГИПЕРАРИФМЕТИЧЕСКИЕ БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ С ВЫДЕЛЕННЫМ ИДЕАЛОМ

П. Е. Алаев

Аннотация: Доказывается общая теорема, позволяющая осуществлять переход от гиперарифметической булевой алгебры с выделенным идеалом к вычислимой булевой алгебре, связанной с исходной естественными алгебраическими операциями. Приводятся примеры.

Ключевые слова: булева алгебра, вычислимость, конструктивная модель.

Статья посвящена построению некоторой общей теоремы, позволяющей осуществлять переход от гиперарифметической булевой алгебры с выделенным идеалом к вычислимой булевой алгебре, связанной с исходной естественными алгебраическими операциями. В [1] подобная теорема доказана просто для гиперарифметических булевых алгебр. Данная работа является естественным продолжением этих исследований на случай алгебр с выделенным идеалом.

В качестве следствия приводятся некоторые описания Δ^0_5-, Δ^0_4- и Δ^0_2-вычислимых булевых алгебр с выделенным идеалом. Последнее описание позволяет, в частности, решить одну известную проблему о булевых алгебрах характеристики $(1, 0, 1)$, чему посвящена отдельная публикация.

1. Предварительные сведения и некоторые вспомогательные факты

Булевы алгебры мы рассматриваем как модели языка $L_{BA} = \{0, 1, +, \cdot, C\}$, где $+$ соответствует объединению элементов, $\cdot$ — пересечению, C — операции дополнения. Предварительные сведения о них можно найти в [2]. *Алгеброй* кратко называем счетную булеву алгебру. Если A — алгебра, $M_0, \dots, M_k \subseteq A$, $a_0, \dots, a_n \in A$, то запись вида $(A, M_0, \dots, M_k, a_0, \dots, a_n)$ означает A, обогащенную одноместными предикатами $Q_0, \dots, Q_k$ из фиксированной последовательности $\{Q_i\}_{i\in\omega}$ и константами $c_0, \dots, c_n$ из последовательности $\{c_i\}_{i\in\omega}$, реализация которых соответствует $M_0, \dots, M_k$ и $a_0, \dots, a_n$.

Если A, B — алгебры, то $A \leq B$ означает, что A — подалгебра в B. Если даны идеалы $H \triangleleft A$ и $G \triangleleft B$, то $(A, H) \leq (B, G)$ соответствует тому, что $A \leq B$ и $H = A \cap G$; модель вида (A, H) называем *алгеброй с идеалом*; $A \times B$ — прямое произведение A и B с носителем $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. Запись $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ означает, что $A_1, \dots, A_n$ — главные идеалы в A, $A = A_1 + \dots + A_n$ и $A_i \cap A_j = \{0\}$ при $i \neq j$. Через n, кроме натурального числа, обозначаем также конечную алгебру с n атомами. Если $a_1, \dots, a_n, b \in A$, то $a_1, \dots, a_n \mid b$ означает, что

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00593) и программы «Ведущие научные школы» (грант НШ–2112.2003.1).

$a_1 + \dots + a_n = b$ и $a_i \cdot a_j = 0$ при $i \neq j$. Выражение $a - b$ равно $a \cdot C(b)$. Если L — линейный порядок, то через B_L обозначаем алгебру, порожденную L, η соответствует порядку рациональных чисел. Если не оговорено иное, то носителем любой алгебры является некоторое подмножество ω.

Оператор T — это соответствие, которое каждой алгебре A сопоставляет идеал $T(A) \triangleleft A$, и при этом верно: если A, B — алгебры, $a \in A$, $b \in B$ и $\hat{a} \cong \hat{b}$, то $a \in T(A) \Leftrightarrow b \in T(B)$. Нетрудно проверить, что операторами являются $N(A) = \{x \in A \mid x$ — безатомный$\}$, $R(A) = \{x \in A \mid x$ — атомный$\}$, $I(A) = N(A) + R(A)$, $F(A) = \{x \in A \mid x = 0$ или $x = p_1 + \dots + p_k$, p_i — атомы$\}$, $F_2(A) = \{x \in A \mid x/F(A) \in F(A/F(A))\}$ и $S(A) = F(A) + N(A)$. Если A, B — алгебры и T — оператор, то изоморфное вложение $f : A \to B$ назовем *T-стабильным*, если $f^{-1}(T(B)) = T(A)$ и $\widehat{f(a)} = f(\hat{a})$ для $a \in T(A)$ (в этом случае $\widehat{f(a)} \cong \hat{a}$ для $a \in T(A)$). Через A/T обозначаем фактор-алгебру $A/T(A)$.

Если даны последовательность алгебр $\{A_n\}_{n\in\omega}$ и изоморфные вложения $h_n : A_n \to A_{n+1}$, то $\mathrm{Lim}\{A_n, h_n\}_{n\in\omega}$ — это прямой предел этой последовательности. Если при этом $A_n \leq A_{n+1}$ и $h_n = \mathrm{Id}_{A_n}$, то этот прямой предел обозначается также символом $\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$.

Оператор T *стабилен*, если для любой последовательности алгебр $\{A_n\}_{n\in\omega}$ и любых T-стабильных вложений $h_n : A_n \to A_{n+1}$ верно утверждение: если $C = \mathrm{Lim}\{A_n, h_n\}_{n\in\omega}$ и $g_n : A_n \to C$ — естественные вложения, то g_n также являются T-стабильными. В [1] было доказано, что S, I и F — стабильные операторы.

Лемма 1. *Оператор $T = F_2 + N$ является стабильным.*

Доказательство. Пусть $C = \mathrm{Lim}\{A_n, h_n\}_{n\in\omega}$, $h_n : A_n \to A_{n+1}$ — T-стабильные вложения и $g_n : A_n \to C$ — естественные вложения. Если $a \in T(A_n)$, то h_n изоморфно отображает $\hat{a}$ на $\widehat{h_n(a)}$ и $h_n(a) \in T(A_{n+1})$. Отсюда следует, что g_n изоморфно отображает $\hat{a}$ на $\widehat{g_n(a)}$ и $g_n(a) \in T(C)$.

Допустим, что $a \in A_n \setminus T(A_n)$ и $g_n(a) \in T(C)$. Тогда $g_n(a) = b + c_1 + \dots + c_k$, где $k \geq 0$, $b \in N(C)$ и $\widehat{c_i/F(C)} \cong 1$. Найдутся такие $m \geq n$ и $x, y_1, \dots, y_k \in A_m$, что $g_m(x) = b$ и $g_m(y_i) = c_i$ для $i \in [1, k]$. Если $z = h_{m-1} \circ \dots \circ h_n(a)$, то $g_m(z) = g_n(a)$ и $z = x + y_1 + \dots + y_k$. Тогда $z \notin T(A_m)$, поскольку композиция T-стабильных вложений снова T-стабильна. Возможны два случая.

(1) $x \notin N(A_m)$. Тогда существует такой $d \leq x$, что $\hat{d} \cong 1$, следовательно, $d \in T(A_m)$, $\widehat{g_m(d)} \cong \hat{d}$ и $g_m(d) \leq b$; противоречие.

(2) $\widehat{y_i/F(A_m)}$ содержит больше чем два элементов для некоторого $i \in [1, k]$. Тогда найдутся такие $d, e \mid y_i$, что $d, e \notin F(A_m)$. Нетрудно показать, что h_n являются также F-стабильными. Поскольку оператор F стабилен, $g_m(d), g_m(e) \notin F(C)$ и $g_m(d), g_m(e) \mid c_i$, снова получаем противоречие. Лемма доказана.

Предварительные сведения по теории алгоритмов можно найти в [3]. Стандартная универсальная функция, описывающая результат работы машины Тьюринга с номером y и оракулом X на входе z, обозначается как $\varphi_y^X(z)$. Пусть для любого оракула $X \subseteq \omega$ определено некоторое множество $M_X \subseteq \omega$. Выражение вида «по $y \in M_X$ мы независимо от оракула X можем вычислить z такое, что … » означает существование такого $k \in \omega$, что если $X \subseteq \omega$ и $y \in M_X$, то $\varphi_k(y)\downarrow = z$ и z «такое, что … ».

Для работы с вычислимыми ординалами мы, следуя [3], вводим множество обозначений O с порядком $<_o$. Всюду, где это имеет смысл, под вычислимым ординалом α понимается некоторое обозначение из O, соответствующее α. Если $X \subseteq \omega$, $\alpha \geq 1$ — вычислимый ординал, то мы можем ввести оракул X_1, соответствующий классу $\Delta^0_\alpha(X)$. Он равен $X^{(\alpha)}$ при $\alpha \geq \omega$ и $X^{(\alpha-1)}$ при $\alpha < \omega$. В этом случае f называется *частичной* $\Delta^0_\alpha(X)$-*вычислимой функцией*, если $f = \varphi_k^{X_1}$ для некоторого $k \in \omega$. Любое такое k — $\Delta^0_\alpha(X)$-*индекс функции* f, $\Delta^0_\alpha(X)$-*индексом множества* $M \subseteq \omega$ называется любой $\Delta^0_\alpha(X)$-индекс его характеристической функции. Подобные индексы стандартным способом могут быть введены и для других классов.

Вычислимая алгебра, или Δ^0_1-*алгебра* — алгебра такая, что ее носитель — вычислимое подмножество ω, а операции — вычислимые функции на этом подмножестве. Это понятие также может быть обобщено для произвольного оракула X и вычислимого ординала α, и тогда $\Delta^0_\alpha(X)$-*индексом* такой алгебры называем набор из $\Delta^0_\alpha(X)$-индексов носителя и операций.

Данная работа существенно опирается на метатеорему для α-систем, которая была впервые доказана в [4] и переработана в [5]. Вариант метатеоремы, который мы используем, является комбинацией формулировок из [4] и [6].

Чередующееся дерево на множествах L и U — некоторое множество P, состоящее из непустых конечных последовательностей вида $l_0u_1l_1u_2l_2\ldots$, где $l_i \in L$, $u_i \in U$, и замкнутое относительно взятия начальных сегментов. Через PU, PL обозначаются множества элементов P четной и нечетной длины соответственно. *Путь в* P — это бесконечная последовательность $\pi = l_0u_1l_1\ldots$, все начальные сегменты которой лежат в P. Для такого пути π через $L(\pi)$ обозначается подпоследовательность элементов из L, т. е. $l_0l_1\ldots$. *Инструкция* для P — это такая функция $q : PL \to U$, что если $\tau \in PL$, то $\tau q(\tau) \in P$. *Исполнение пары* (P, q), где q является инструкцией для P, — это такой путь $\pi = l_0u_1l_1\ldots$ в P, что $q(l_0) = u_1$ и $q(l_0\ldots u_nl_n) = u_{n+1}$ для $n \in \omega$.

Если два вычислимых ординала α, β рассматриваются вместе и $\beta < \alpha$, то мы считаем, что соответствующие обозначения (которые подразумеваются под β, α) связаны отношением $<_o$. Тем самым для любого вычислимого ординала α множество $\{\beta \mid \beta < \alpha\}$ является вычислимо-перечислимым (в.-п.).

Если $\alpha \geq 1$ — вычислимый ординал, то α-*системой* называется набор $\mathscr{M} = (L, U, P, \hat{l}, E, \leq_\beta)_{\beta<\alpha}$, для которого верны свойства (1)–(5).

(1) L, U — непересекающиеся в.-п. множества, $\hat{l} \in L$, P — в.-п. чередующееся дерево на L и U, все элементы которого начинаются с $\hat{l}$, $E \subseteq L \times \omega$ — в.-п. множество, $\leq_\beta$ — рефлексивные и транзитивные бинарные отношения на L, в.-п. равномерно по $\beta < \alpha$ (последнее означает, что в.-п.-индекс $\leq_\beta$ может быть вычислен по $\beta \in O$, $\beta < \alpha$).

Если $l \in L$, то $E(l)$ обозначает $\{n \mid (l, n) \in E\}$, если $\pi = l_0u_1l_1\ldots$ — путь в P, то $E(\pi) = \bigcup\limits_{i\in\omega} E(l_i)$.

(2) Если $\gamma < \beta < \alpha$ и $l \leq_\beta m$, то $l \leq_\gamma m$.

(3) Если $l \leq_0 m$, то $E(l) \subseteq E(m)$.

(4) Если $\tau l^0 u \in PU$, $k \geq 0$, $\alpha > \beta_0 > \cdots > \beta_k \geq 0$, $l^0 \leq_{\beta_0} l^1 \leq_{\beta_1} \cdots \leq_{\beta_{k-1}} l^k$, то существует такой $l \in L$, что $\tau l^0 ul \in P$, $l^0 \leq_{\beta_0} l, \ldots, l^k \leq_{\beta_k} l$.

(5) Если $l, m \in L$, $u \in U$ и $\ldots lum \ldots \in P$, то $l \leq_0 m$.

Определение α-системы может быть естественно релятивизовано относительно некоторого оракула X, если везде «в.-п.» заменить на «X-в.-п.».

Теорема 1 (Эш, Найт). *Если $\alpha \geq 1$ — вычислимый ординал,*

$$\mathscr{M} = (L, U, P, \hat{l}, E, \leq_\beta)_{\beta<\alpha}$$

— α-система, q — Δ^0_α-инструкция для P, то существует π — исполнение (P, q) такое, что $E(\pi)$ вычислимо-перечислимо.

Более того, если X — некоторый оракул и рассматривается релятивизация всех объектов, кроме α, относительно X, то по $\alpha \in O$, X-в.-п.-индексам всех составляющих α-системы и $\Delta^0_\alpha(X)$-индексу q мы можем независимо от X вычислить $\Delta^0_\alpha(X)$-индекс указанного π и X-в.-п.-индекс $E(\pi)$.

Эта теорема будет непосредственным следствием теоремы 2.1 из [6], если положить E_β равным E для $1 \le \beta \le \alpha$ и $\subseteq_\beta$ равным $\le_\beta$ для $1 \le \beta < \alpha$. Замечание о равномерности результата по индексам составляющих содержится в конце доказательства этой теоремы, релятивизация относительно оракула X тривиальна. Внимательный анализ доказательства позволяет заметить равномерность конструкции и по $\alpha \in O$, $\alpha \ge 1$.

Если язык фиксирован, то Σ_α- и Π_α-формулы этого языка для ординалов α определяем, как в [4]. Через $\Pi_\alpha(\mathfrak{M})$ обозначим множество всех Π_α-предложений, истинных в модели $\mathfrak{M}$, через $\mathfrak{M} \le_\alpha \mathfrak{N}$ — то, что $\Pi_\alpha(\mathfrak{M}) \subseteq \Pi_\alpha(\mathfrak{N})$. Назовем $\mathfrak{M}$ *моделью простого типа*, если для любого $n \in \omega$ число конечных бескванторных формул от переменных $v_0, \dots, v_n$, неэквивалентных в $\mathfrak{M}$, конечно.

Лемма 2. *Если $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ — счетные модели одного языка, $\mathfrak{M}$ — модель простого типа, $\alpha \ge 1$ — ординал, то эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $\mathfrak{M} \le_\alpha \mathfrak{N}$;

(2) *для любых $b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{N}$ и любого $\beta < \alpha$ найдутся такие $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{M}$, что $(\mathfrak{N}, b_1, \dots, b_n) \le_\beta (\mathfrak{M}, a_1, \dots, a_n)$.*

Лемма может быть доказана подобно лемме 1 из [5] или непосредственно. Переход (2) $\Rightarrow$ (1) доказывается одинаково для всех α, в (1) $\Rightarrow$ (2) нужно отдельно рассмотреть случаи $\alpha = 1$ и $\alpha > 1$.

Пусть $\sigma = \{P_0, \dots, P_k\}$ — некоторый конечный набор 1-местных предикатных символов (может быть, пустой), для каждого из которых заранее определена его реализация в любой алгебре, причем эта реализация сохраняется при изоморфизмах. Например, $\sigma = \{At, N\}$, где если A — алгебра, то $A \models At(x) \Leftrightarrow x$ — атом, $A \models N(x) \Leftrightarrow x$ — безатомный элемент. Тогда A^σ означает единственное обогащение алгебры A предикатами $\{P_0, \dots, P_k\}$.

Если A, B — алгебры, то запись вида $A \le^\sigma_\alpha B$ означает, что $A^\sigma \le_\alpha B^\sigma$. Набор σ назовем *локальным*, если для любых алгебр A, B, любых $a_0, \dots, a_n \in A$, $a_0, \dots, a_n \mid 1$, и любых $b_0, \dots, b_n \in B$, $b_0, \dots, b_n \mid 1$, верна эквивалентность: $(A, a_0, \dots, a_n) \le^\sigma_0 (B, b_0, \dots, b_n) \Leftrightarrow$ для всех $i \in [0, n]$ $\hat{a}_i \le^\sigma_0 \hat{b}_i$. Заметим, что $A \le^\sigma_0 B$ равносильно тому, что A и B неразличимы атомарными предложениями языка $L_{BA} \cup \sigma$. Тем самым если локальны все наборы $\{P_1\}, \dots, \{P_n\}$, то и $\sigma = \{P_1, \dots, P_n\}$ локален.

Лемма 3. *Если $\sigma = \{At\}$, $\sigma = \{T\}$, где T — предикат, соответствующий некоторому оператору в алгебрах, или σ пустой, то σ — локальный набор.*

Доказательство. Рассмотрим случай $\sigma = \{At\}$ (остальные случаи проще). Если A — алгебра и $a_0, \dots, a_n \in A$, $a_0, \dots, a_n \mid 1$, то любое атомарное предложение в модели вида $(A^\sigma, a_0, \dots, a_n)$ может быть приведено к виду $t(c_0, \dots, c_n) = 0$ или $At(t(c_0, \dots, c_n))$, где $t(v_0, \dots, v_n)$ — терм. В свою очередь, этот терм приводится к виду $\sum\limits_{i \in I} v_i$, где $I \subseteq \{0, \dots, n\}$. Тем самым предложения сводятся к $c_i = 0$ и $At(\sum_{i\in I} c_i)$. Последнее эквивалентно выражению вида

$$\bigvee_{i\in I}\Big(At(c_i)\&\bigwedge_{j\in I\setminus\{i\}} c_j = 0\Big).$$

При этом в моделях вида $\hat{a}_i^\sigma$ возможные атомарные предложения суть $0 = 0$, $0 \neq 0$, $0 = 1$, $At(1)$. Дальнейшие рассуждения очевидны. Лемма доказана.

Для каждого $n \in \omega$ зафиксируем некоторый порядок на $\{0,1\}^n$. Если $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ — набор элементов из алгебры A, то положим $\bar{a}^\perp = \{a_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\varepsilon_n}\}_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\{0,1\}^n}$, где $a^1 = a$, $a^0 = C(a)$. Ясно, что $\bar{a}^\perp \mid 1$ в A.

Лемма 4. *Пусть A, B — алгебры, σ — локальный набор, α — ординал, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $b_1, \ldots, b_n \in B$. Тогда*

(1) $(A, \bar{a}) \leq_\alpha^\sigma (B, \bar{b})$ равносильно $(A, \bar{a}^\perp) \leq_\alpha^\sigma (B, \bar{b}^\perp)$;

(2) если $a_1, \ldots, a_n \mid 1$ в A, $b_1, \ldots, b_n \mid 1$ в B, то $(A, \bar{a}) \leq_\alpha^\sigma (B, \bar{b})$ равносильно тому, что $\hat{a}_i \leq_\alpha^\sigma \hat{b}_i$ для всех $i \in [1, n]$;

(3) $A \leq_{\alpha+1}^\sigma B$ тогда и только тогда, когда для любых $b_1, \ldots, b_n \mid 1$ из B существуют $a_1, \ldots, a_n \mid 1$ из A такие, что $\hat{b}_i \leq_\alpha^\sigma \hat{a}_i$ при $i \in [1, n]$;

(4) если α предельный, то $A \leq_\alpha^\sigma B$ тогда и только тогда, когда $A \leq_\beta^\sigma B$ для всех $\beta < \alpha$.

Доказательство. (1) легко следует из того, что элементы $\bar{a}$ и $\bar{a}^\perp$ выражаются термами друг через друга.

(2) доказывается индукцией по α. Для $\alpha = 0$ это верно по определению. Пусть $\alpha > 0$ и для всех $\beta < \alpha$ утверждение доказано. Заметим, что $(A^\sigma, \bar{a})$ является моделью простого типа и мы можем использовать лемму 2. Переход ($\Rightarrow$): пусть $(A, \bar{a}) \leq_\alpha^\sigma (B, \bar{b})$, $i \in [1, n]$. Пусть $\beta < \alpha$ и $\bar{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ — набор из $\hat{b}_i$. Докажем, что найдется такой $\bar{c}$ из $\hat{a}_i$, что $(\hat{b}_i, \bar{d}) \leq_\beta^\sigma (\hat{a}_i, \bar{c})$. Пользуясь (1), можно считать, что $\bar{d} \mid b_i$. Поскольку

$$(A, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) \leq_\alpha^\sigma (B, b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n),$$

найдется такой набор $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_m) \in A$, что

$$(B, b_1, \ldots, b_{i-1}, \bar{d}, b_{i+1}, \ldots, b_n) \leq_\beta^\sigma (A, a_1, \ldots, a_{i-1}, \bar{c}, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Тогда $\bar{c} \mid a_i$, $\hat{d}_j \leq_\beta^\sigma \hat{c}_j$, отсюда $(\hat{b}_i, \bar{d}) \leq_\beta^\sigma (\hat{a}_i, \bar{c})$.

Докажем переход ($\Leftarrow$). Пусть $\hat{a}_i \leq_\alpha^\sigma \hat{b}_i$ для $i \in [1, n]$. Возьмем произвольный $\bar{d} = (d_1, \ldots, d_m) \in B$, $\beta < \alpha$. Вновь, переходя от $\bar{d}$ к $\bar{d}^\perp$, можно считать, что $\bar{d} \mid 1$. Пусть $i \in [1, n]$. Найдутся такие $c_1^i, \ldots, c_m^i$, что

$$(\hat{b}_i, d_1 \cdot b_i, \ldots, d_m \cdot b_i) \leq_\beta^\sigma \big(\hat{a}_i, c_1^i, \ldots, c_m^i\big),$$

отсюда $\widehat{d_j \cdot b_i} \leq_\beta^\sigma \widehat{c_j^i}$ и

$$(B, d_j \cdot b_i)_{i,j\in[1,n]\times[1,m]} \leq_\beta^\sigma \big(A, c_j^i\big)_{i,j\in[1,n]\times[1,m]}.$$

Переходя к другим наборам, которые выражаются термами через эти, получаем

$$(B, b_1, \ldots, b_n, d_1, \ldots, d_m) \leq_\beta^\sigma (A, a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots, c_m),$$

где $c_j = c_j^1 + \cdots + c_j^n$, что и требовалось.

(3) непосредственно следует из (1), (2), леммы 2 и того факта, что $\leq_\alpha^\sigma$ влечет $\leq_\beta^\sigma$ при $\beta \leq \alpha$.

(4) следует из того, что любое Σ_α-предложение является дизъюнкцией предложений из Σ_β, $\beta < \alpha$. Лемма доказана.

Пусть $f : A \to B$ — изоморфное вложение, σ — локальный набор. Будем говорить, что f — *σ-вложение*, если f является изоморфным вложением A^σ в B^σ, т. е. $A \models P(a) \Leftrightarrow B \models P(f(a))$ для всех $a \in A$ и $P \in \sigma$.

Пусть T — оператор, σ — локальный набор. Будем говорить, что σ *согласован с* T, если для любой последовательности алгебр $\{A_n\}_{n\in\omega}$ и T-стабильных σ-вложений $h_n : A_n \to A_{n+1}$ верно: если $C = \mathrm{Lim}\{A_n, h_n\}_{n\in\omega}$ и $g_n : A_n \to C$ — естественные вложения, то g_n также являются σ-вложениями.

Нетрудно показать, что оператор T стабилен тогда и только тогда, когда набор $\{T\}$ согласован с T, но нам это не нужно. Пустой набор согласован с любым оператором.

Лемма 5. *Набор $\sigma = \{At, N, R\}$ согласован с операторами $S = F + N$ и $F_2 + N$.*

Доказательство. Пусть $\{A_n\}_{n\in\omega}$ — алгебры, $h_n : A_n \to A_{n+1}$ — T-стабильные σ-вложения, $C = \mathrm{Lim}\{A_n, h_n\}_{n\in\omega}$ и $g_n : A_n \to C$ — естественные вложения, где $T = F + N$ или $F_2 + N$. Если $A_n \models At(x)$ или $A_n \models N(x)$, то $x \in T(A_n)$, отсюда в силу T-стабильности g_n имеем $\hat{x} \cong \widehat{g_n(x)}$.

Допустим, что $C \models At(g_n(x))$. Если $x \notin T(A_n)$, то $g_n(x) \notin T(C)$; противоречие. Если же $x \in T(A_n)$, то $\hat{x} \cong \widehat{g_n(x)}$ и $A_n \models At(x)$. Аналогично будет для N. Получаем, что g_n являются $\{At, N\}$-вложениями.

Если $C \models R(g_n(x))$ и $A_n \not\models R(x)$, то найдется такой $y \neq 0$, что $y \leq x$ и $A_n \models N(y)$, отсюда $g_n(y) \leq g_n(x)$ и $g_n(y) \neq 0$ безатомный; противоречие.

Допустим, что $A_n \models R(x)$ и $C \not\models R(g_n(x))$. Тогда $C \models N(z)$ для некоторого $z \leq g_n(x)$, $z \neq 0$. Найдется такое $k \geq n$, что $z = g_k(y)$ для некоторого $y \in A_k$. Если $x' = h_{k-1} \circ \dots \circ h_n(x)$, то $y \leq x'$ и $g_k(x') = g_n(x)$. Тогда $A_k \models R(x')$ и $A_k \models N(y)$; противоречие. Лемма доказана.

2. Основная конструкция и примеры

Пусть фиксированы оператор T и две такие алгебры B_0, B_1, что $B_0/T \cong 1$ и $B_1/T \cong 1$. Если A — конечная ненулевая алгебра и $G \lhd A$, то введем операцию $(A, G)^*$. Пусть $p_1 < \dots < p_n$ — все атомы A, $p_1, \dots, p_n \mid 1$. Положим $(A, G)^* = (D_1 \times \{p_1\}) \times \dots \times (D_n \times \{p_n\})$, где $D_i = B_0$ при $p_i \notin G$, $D_i = B_1$ при $p_i \in G$, $i \in [1, n]$, и $D_i \times \{p_i\}$ — результат изоморфного перенесения структуры алгебры с D_i на множество $D_i \times \{p_i\}$. В этом случае алгебра $D_i \times \{p_i\}$ может быть естественно вложена в $(A, G)^*$ как главный идеал. Наибольший элемент этого идеала обозначим через 1_{p_i}. Тем самым $(A, G)^* = \hat{1}_{p_1} \oplus \dots \oplus \hat{1}_{p_n}$. Из такого описания ясно, что $(A, G)^*$ эффективно строится по (A, G), B_0 и B_1 (это понадобится позднее).

Если $(A_1, G_1) \leq (A_2, G_2)$ — конечные ненулевые алгебры с идеалами, то определим *каноническое вложение* $h : (A_1, G_1)^* \to (A_2, G_2)^*$ (оно зависит от T, B_0 и B_1). Если $p_1, \dots, p_n$ — все атомы A_1, то $(A_1, G_1)^* = \hat{1}_{p_1} \oplus \dots \oplus \hat{1}_{p_n}$, и достаточно задать h на $\hat{1}_{p_1}, \dots, \hat{1}_{p_n}$. Зададим на $\hat{1}_{p_1}$. Пусть $q_1 < \dots < q_m$ — атомы A_2, $q_1, \dots, q_m \mid p_1$. Тогда $(A_2, G_2)^* = \hat{1}_{q_1} \oplus \dots \oplus \hat{1}_{q_m} \oplus C$. Возможны два случая.

(1) $p_1 \in G_1$. Тогда $q_1, \dots, q_m \in G_2$ и $\hat{1}_{p_1} \cong B_1 \cong \hat{1}_{q_1}$. Пусть $r : \hat{1}_{p_1} \to \hat{1}_{q_1}$ — естественный изоморфизм. Если $x \in T(\hat{1}_{p_1})$, то $h(x) = r(x)$, если $x \in \hat{1}_{p_1} \setminus T(\hat{1}_{p_1})$, то $h(x) = r(x) + 1_{q_2} + \dots + 1_{q_m}$.

(2) $p_1 \notin G_1$. Тогда найдется такой наименьший $j \in [1, m]$, что $q_j \notin G_2$. В этом случае $\hat{1}_{p_1} \cong B_0 \cong \hat{1}_{q_j}$. Пусть $r : \hat{1}_{p_1} \to \hat{1}_{q_j}$ — естественный изоморфизм. Аналогично предыдущему случаю полагаем $h(x) = r(x)$ при $x \in T(\hat{1}_{p_1})$ и

$$h(x) = r(x) + 1_{q_1} + \dots + 1_{q_{j-1}} + 1_{q_{j+1}} + \dots + 1_{q_m}$$

при $x \in \hat{1}_{p_1} \setminus T(\hat{1}_{p_1})$.

Лемма 6. *Отображение h является T-стабильным вложением $(A_1, G_1)^*$ в $(A_2, G_2)^*$.*

Доказательство леммы несложно и может быть проведено так же, как для леммы 5 из [1].

Предложение 1. *Пусть T — стабильный оператор, B_0, B_1 — алгебры такие, что $B_0/T \cong 1$ и $B_1/T \cong 1$. Пусть также дана ненулевая алгебра A, $G \lhd A$, $A = \bigcup_{i \in \omega} A_i$, где A_i — конечные алгебры и $A_i \leq A_{i+1}$ для $i \in \omega$. Если $C = \mathrm{Lim}\{(A_i, G_i)^*, h_i\}_{i \in \omega}$, где $G_i = G \cap A_i$ и $h_i : (A_i, G_i)^* \to (A_{i+1}, G_{i+1})^*$ — канонические вложения, то $C/T \cong A$. Более того, существует такой изоморфизм $f : A \to C/T$, что*

(1) *если $a \in A \setminus G$ и $f(a) = b/T(C)$, то найдутся $z \leq b$, $e \in B_0 \setminus T(B_0)$ и T-стабильное вложение $g : \hat{e} \to \hat{z}$;*

(2) *если $a \in G$, то существует такой $d \in C$, что $f(a) = d/T(C)$ и при любом $y \leq d$*

(i) *если $y \notin T(C)$, то найдутся $z \leq y$, $e \in B_1 \setminus T(B_1)$ и T-стабильное вложение $g : \hat{e} \to \hat{z}$;*

(ii) *если $y \in T(C)$, то $\hat{y} \cong \hat{a}_1 \times \dots \times \hat{a}_n$, где $a_i \in T(B_1)$;*

(3) *если $y \in T(C)$, то $\hat{y} \cong \hat{a}_1 \times \dots \times \hat{a}_n$, где $a_i \in T(B_0)$ или $a_i \in T(B_1)$ для каждого $i \in [1, n]$.*

Доказательство. Пусть $g_i : (A_i, G_i)^* \to C$ — естественные вложения для $i \in \omega$. Они T-стабильны. Если $p_1, \dots, p_n$ — все атомы A_i, то определенное выше разложение для $(A_i, G_i)^*$ обозначим через $(A_i, G_i)^* = \hat{1}_{i,p_1} \oplus \dots \oplus \hat{1}_{i,p_n}$. Пусть $a \in A \setminus \{0\}$ и $a \in A_i$ для некоторого $i \in \omega$. Тогда $a = p_1 + \dots + p_k$, где p_j — некоторые атомы A_i. Положим

$$f(a) = g_i(1_{i,p_1} + \dots + 1_{i,p_k})/T(C), \quad f(0) = 0.$$

Проверим, что f — изоморфизм A и $C/T(C)$. Пусть $h_{ij} : (A_i, G_i)^* \to (A_j, G_j)^*$, $h_{ij} = h_{j-1} \circ \dots \circ h_i$ для $i < j$, тогда $g_j \circ h_{ij} = g_i$. Пусть также $T_i = T((A_i, G_i)^*)$.

(a) Корректность: пусть $i < j$, $a \in A_i$, $p_1, \dots, p_k \mid a$ в A_i, p_t — атомы A_i, и $q_1, \dots, q_m \mid a$ в A_j, q_s — атомы A_j. Если $t \in [1, k]$, $\{q'_1, \dots, q'_l\} \subseteq \{q_1, \dots, q_m\}$, $q'_1, \dots, q'_l \mid p_t$ в A_j, то из определения канонического вложения следует, что $h_{ij}(1_{i,p_t}) = 1_{j,q'_1} + \dots + 1_{j,q'_l}$. Значит,

$$1_{j,q_1} + \dots + 1_{j,q_m} = h_{ij}(1_{i,p_1}) + \dots + h_{ij}(1_{i,p_k}).$$

(b) Сохранение операций: легко следует из того, что если $p_1, \dots, p_n$ — все атомы A_i, то $1_{i,p_1}, \dots, 1_{i,p_n}$ порождают в $(A_i, G_i)^*$ подалгебру, изоморфную A_i.

(c) $\mathrm{ran}(f) = C/T(C)$: если $x \in C \setminus T(C)$, то $x = g_i(y)$ для некоторого i, где $y \in (A_i, G_i)^* \setminus T_i$. Если $p_1, \dots, p_n$ — все атомы A_i, то $(A_i, G_i)^*/T_i$ — конечная алгебра, порожденная атомами $1_{i,p_1}/T_i, \dots, 1_{i,p_n}/T_i$, и y/T_i выражается через них.

(d) $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$: легко проверяется.

(1) Пусть $a \in A \setminus G$ и $f(a) = b/T(C)$. Найдем такое $i \in \omega$, что $a \in A_i$ и $b = g_i(b')$ для некоторого $b' \in (A_i, G_i)^*$. Пусть $p_1, \dots, p_k \mid a$ в A_i, p_j — атомы A_i. Тогда $f(a) = g_i(1_{i,p_1} + \dots + 1_{i,p_k})/T(C)$, отсюда $b'/T_i = 1_{i,p_1}/T_i + \dots + 1_{i,p_k}/T_i$. Существует такое $t \in [1,k]$, что $p_t \notin G_i$. Тогда $b' \cdot 1_{i,p_t} \notin T_i$, и если в качестве z взять $g_i(b' \cdot 1_{i,p_t})$, то g_i будет T-стабильно вкладывать $\widehat{b' \cdot 1_{i,p_t}}$ в $\hat{z}$, а $\widehat{b' \cdot 1_{i,p_t}} \cong \hat{e}$ для некоторого $e \in B_0 \setminus T(B_0)$.

(2) Если $a = 0$, то можно положить $d = 0$. Пусть $a \in G \setminus \{0\}$ и $a \in A_i$, $i \in \omega$. Если $p_1, \dots, p_k \mid a$, p_t — атомы A_i, то возьмем $d = g_i(1_{i,p_1} + \dots + 1_{i,p_k})$. Допустим, что $y \leq d$. Найдутся такие $j > i$ и $y' \in (A_j, G_j)^*$, что $g_j(y') = y$. Пусть $q_1, \dots, q_m \mid a$ в A_j, q_s — атомы A_j. Тогда

$$h_{ij}(1_{i,p_1} + \dots + 1_{i,p_k}) = 1_{j,q_1} + \dots + 1_{j,q_m} \geq y',$$

при этом $q_1, \dots, q_m \in G$ и $\hat{1}_{j,q_s} \cong B_1$.

Если $y \notin T(C)$, то $1_{j,q_s} \cdot y' \notin T_j$ для некоторого $s \in [1,m]$. Положим $z = g_j(1_{j,q_s} \cdot y')$, тогда g_j T-стабильно вкладывает $\widehat{1_{j,q_s} \cdot y'}$ в $\hat{z}$. Если же $y \in T(C)$, то $1_{j,q_s} \cdot y' \in T_j$ и $\hat{y}' \cong \widehat{1_{j,q_1} \cdot y'} \times \dots \times \widehat{1_{j,q_m} \cdot y'}$, аналогичное верно для $g_j(y') = y$.

(3) доказывается подобными рассуждениями. Предложение доказано.

Сформулированная ниже теорема 2 является естественным продолжением теоремы 3 из [1] на случай алгебр с выделенным идеалом (более точно, на случай Δ^0_α-алгебр с Δ^0_α-идеалом).

Запись $f : X \to_p Y$ означает, что $f : X_0 \to Y$ — разнозначное отображение, где X_0 — некоторое конечное подмножество X (может быть, пустое). Пусть $L^* = \{(f, C) \mid C$ — алгебра, $f : \omega \to_p C\}$, σ — некоторый локальный набор. Если $l_1, l_2 \in L$, $l_1 = (f_1, C_1)$, $l_2 = (f_2, C_2)$, γ — ординал, то $l_1 \leq^\sigma_\gamma l_2$ означает, что $\mathrm{dom}(f_1) \subseteq \mathrm{dom}(f_2)$, и если $\mathrm{dom}(f_1) = \{a_1, \dots, a_n\}$, то

$$(C_1, f_1(a_1), \dots, f_1(a_n)) \leq^\sigma_\gamma (C_2, f_2(a_1), \dots, f_2(a_n)).$$

В случае $f_1 = \varnothing$ это означает просто $C_1 \leq^\sigma_\gamma C_2$. Пусть $L_{BA} \cup \sigma \cup \omega$ — язык $L_{BA} \cup \sigma$, в который добавлена константа для каждого элемента ω.

Если $l \in L^*$, $l = (f, C)$, то $E^\sigma(l) = \{\psi(a_1, \dots, a_n) \mid \psi(v_1, \dots, v_n)$ — атомарная формула $L_{BA} \cup \sigma$ или отрицание атомарной, $a_1, \dots, a_n \in \mathrm{dom}(f)$, $C \models \psi(f(a_1), \dots, f(a_n))\}$ — множество предложений $L_{BA} \cup \sigma \cup \omega$.

В теории булевых алгебр для фиксированных $n \in \omega$ и σ существует лишь конечное число неэквивалентных атомарных формул от переменных $v_1, \dots, v_n$ языка $L_{BA} \cup \sigma$ и этот набор формул можно эффективно построить по n. Зафиксируем такое построение и будем рассматривать $E^\sigma(l)$ как конечное множество, построенное только из таких формул. Используя гёделевскую нумерацию формул $L_{BA} \cup \sigma \cup \omega$, можно также считать $E^\sigma(l)$ подмножеством ω.

Лемма 7. *Пусть $k \geq 1$, $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_k \geq 0$ — ординалы, $l_1, \dots, l_k \in L^*$, $l_i \leq^\sigma_{\gamma_i} l_{i+1}$ для $i \in [1, k-1]$, $l_1 = (f_1, C_1)$. Тогда существует такой $l \in L^*$, $l = (f, C_1)$, что $f_1 \subseteq f$ и $l_i \leq^\sigma_{\gamma_i} l$ для $i \in [1,k]$.*

Это может быть показано индукцией по k подобно лемме 3 из [5] с использованием леммы 2.

Алгебру A называем *σ-вычислимой*, если A^σ — вычислимая модель. Ее индексом считаем набор из вычислимого индекса A и вычислимых индексов реализаций элементов σ. Последовательность вида $\{A_n^\sigma\}_{n\in\omega}$, где A_n — алгебры, назовем *вычислимой*, если A_n^σ вычислимы для всех $n \in \omega$ и индекс A_n^σ может быть вычислен по $n \in \omega$. Если α — вычислимый ординал, то вычислимая последовательность $\{A_n^\sigma\}_{n\in\omega}$ является *α-дружественной*, если отношение $(A_n^\sigma, \bar a) \le_\beta (A_m^\sigma, \bar b)$ на $n, m \in \omega$, $\bar a$ из A_n, $\bar b$ из A_m, $|\bar a| = |\bar b|$, и $\beta < \alpha$ является вычислимо-перечислимым.

Индексом α-дружественного семейства $\{A_n^\sigma\}_{n\in\omega}$ называем пару из индекса вычислимой функции, которая по $n \in \omega$ вычисляет индекс A_n^σ, и в.-п.-индекса указанного отношения.

Теорема 2. *Пусть T — стабильный оператор, B_0, B_1 — две бесконечные вычислимые алгебры, $B_0/T, B_1/T \cong 1$, $T(B_0)$, $T(B_1)$ — вычислимые подмножества в B_0 и B_1 соответственно. Пусть также $\alpha \ge 1$ — вычислимый ординал, σ — локальный набор, согласованный с T, и выполняются условия:*

(a) $\forall a \in B_0 \setminus T(B_0)\ \forall \beta < \alpha\ \big(\hat a \le_\beta^\sigma \hat a \times B_0$ *и* $\hat a \le_\beta^\sigma \hat a \times B_1\big)$;

(b) $\forall a \in B_1 \setminus T(B_1)\ \forall \beta < \alpha\ \big(\hat a \le_\beta^\sigma \hat a \times B_1\big)$;

(c) $\big\{\big(B_0^n \times B_1^m\big)^\sigma\big\}_{\langle n,m\rangle\in\omega}$ — *α-дружественное семейство.*

Тогда для любой Δ_α^0-алгебры $A \ne 0$ и любого Δ_α^0-идеала $G \lhd A$ найдется такая σ-вычислимая алгебра C, что $C/T \cong A$. При этом найдется изоморфизм $f : A \to C/T$ со свойствами:

(1) *если $a \in A \setminus G$ и $f(a) = b/T(C)$, то найдутся $z \le b$, $e \in B_0 \setminus T(B_0)$ и T-стабильное вложение $g : \hat e \to \hat z$;*

(2) *если $a \in G$, то существует такой $d \in C$, что $f(a) = d/T(C)$, и при любом $y \le d$*

(i) *если $y \notin T(C)$, то найдутся $z \le y$, $e \in B_1 \setminus T(B_1)$ и T-стабильное вложение $g : \hat e \to \hat z$;*

(ii) *если $y \in T(C)$, то $\hat y \cong \hat a_1 \times \dots \times \hat a_n$, где $a_i \in T(B_1)$;*

(3) *если $y \in T(C)$, то $\hat y \cong \hat a_1 \times \dots \times \hat a_n$, где $a_i \in T(B_0)$ или $a_i \in T(B_1)$.*

Если наложить еще условие $A \ne G$, то конструкция станет равномерной: по индексам B_0, B_1, $T(B_0)$, $T(B_1)$, по $\alpha \in O$, $\alpha \ge 1$, индексу α-дружественного семейства $\big\{\big(B_0^n \times B_1^m\big)^\sigma\big\}_{\langle n,m\rangle\in\omega}$ и Δ_α^0-индексам A и $G \ne A$ можно вычислить Δ_1^0-индекс C^σ. Если известно, что $G = A$, то подобная равномерность также будет иметь место. Однако различить случаи $G = A$ и $G \ne A$, вообще говоря, нельзя с нужным уровнем эффективности.

Доказательство. Построим α-систему $\mathscr{M}$.

$L = \{(f, C) \in L^* \mid C = (A_*, G_*)^*,\ A_*$ — конечная ненулевая алгебра, $G_* \lhd A_*\}$. Ясно, что L можно считать в.-п. множеством, кодируя его элементы тройками (f, A_*, G_*).

$U = \{(A_*, G_*) \mid A_*$ — конечная ненулевая алгебра, $G_* \lhd A_*$, $G_* = A_*$ при $G = A$ и $G_* \ne A_*$ при $G \ne A\}$.

$\hat l = (\varnothing, (1,1)^*)$ при $G = A$ и $\hat l = (\varnothing, (1, \{0\})^*)$ при $G \ne A$.

$E = \{(l, n) \mid n \in E^\sigma(l)\}$, отношения $\le_\beta$ на L индуцируются соответствующими отношениями $\le_\beta^\sigma$ на L^*. Дерево P состоит из всех конечных последовательностей $l_0u_1l_1u_2l_2\dots$, для которых $u_i \in U$, $l_i \in L$, $l_0 = \hat l$ и верны указанные ниже свойства (a)–(e). Пусть $l_i = (f_i, (A_i, G_i)^*)$. Тогда

(a) $u_i = (A_i, G_i)$;

(b) $(A_i, G_i) \le (A_{i+1}, G_{i+1})$, $l_i \le_0 l_{i+1}$;

(c) $\mathrm{dom}(f_{i+1}) \supseteq [0, i]$.

Пусть $h_i : (A_i, G_i)^* \to (A_{i+1}, G_{i+1})^*$ — канонические вложения. Тогда

(d) если $i < j$, $h'_{ij} = h_{j-1} \circ \dots \circ h_i$, то $h'_{ij}((A_i, G_i)^* \cap [0, j]) \subseteq \operatorname{ran}(f_j)$;

(e) $h_i \circ f_i \subseteq f_{i+1}$.

Большинство свойств из определения α-системы $\mathscr{M} = (L, U, P, \hat{l}, E, \leq_\beta)_{\beta<\alpha}$ легко проверяются. Вычислимая перечислимость отношений $\leq_\beta$ на L следует из α-дружественности семейства и из того, что $(A_*, G_*)^*$ эффективно-изоморфно $B_0^n \times B_1^m$ для некоторых $n, m \in \omega$. Дерево P также является в.-п., поскольку вложения h_i вычислимы. Из α-дружественности также следует, что $B_0^n \times B_1^m$ σ-вычислимы, следовательно, таковы и $(A_*, G_*)^*$ для $(A_*, G_*) \in U$. Это дает вычислимость отношения E.

Проверим (4) из определения α-системы. Пусть $\tau l^0 u \in PU$, $\alpha > \beta_0 > \beta_1 > \dots > \beta_k \geq 0$, $l^0 \leq_{\beta_0} l^1 \leq_{\beta_1} \dots \leq_{\beta_{k-1}} l^k$, $l^j \in L$. Докажем существование такого l, что $\tau l^0 u l \in P$ и $l^j \leq_{\beta_j} l$ для $j \in [0, k]$. Пусть $l^0 = (f_i, (A_i, G_i)^*)$ и $u = (A_{i+1}, G_{i+1})$, тогда $(A_i, G_i) \leq (A_{i+1}, G_{i+1})$. Согласно лемме 7 существует такая $f : \omega \to_p (A_i, G_i)^*$, что $f_i \subseteq f$ и если $l' = (f, (A_i, G_i)^*)$, то $l^j \leq_{\beta_j} l'$ для $j \in [0, k]$. Достаточно найти такое l, что $\tau l^0 u l \in P$ и $l' \leq_{\beta_0} l$. Если $h_i : (A_i, G_i)^* \to (A_{i+1}, G_{i+1})^*$ — каноническое вложение, то положим $g_0 = h_i \circ f$ и $l = (g, (A_{i+1}, G_{i+1})^*)$, где g — расширение g_0, достаточное для удовлетворения (c) и (d). Осталось проверить, что $(f, (A_i, G_i)^*) \leq^\sigma_{\beta_0} (g_0, (A_{i+1}, G_{i+1})^*)$. Докажем, что $((A_i, G_i)^*, \bar{a}) \leq^\sigma_{\beta_0} ((A_{i+1}, G_{i+1})^*, h_i(\bar{a}))$ для любого набора $\bar{a}$ из $(A_i, G_i)^*$. В силу леммы 4 можно считать, что $\bar{a} \mid 1$. Если $(A_i, G_i)^* = \hat{1}_{p_1} \oplus \dots \oplus \hat{1}_{p_m}$, то достаточно показать, что

$$((A_i, G_i)^*, \bar{a}, 1_{p_1}, \dots, 1_{p_m}) \leq^\sigma_{\beta_0} ((A_{i+1}, G_{i+1})^*, h_i(\bar{a}), h_i(1_{p_1}), \dots, h_i(1_{p_m})).$$

Рассматривая всевозможные произведения 1_{p_t} и элементов $\bar{a}$ и вновь используя лемму 4, можно свести задачу к тому, что $((A_1, G_1)^*, \bar{a}) \leq^\sigma_{\beta_0} ((A_2, G_2)^*, h(\bar{a}))$, где A_1 — одноэлементная алгебра, $(A_1, G_1) \leq (A_2, G_2)$ и $h : (A_1, G_1)^* \to (A_2, G_2)^*$ — каноническое вложение. Возможны только два случая.

(1) $G_1 = \{0\}$. Можно считать, что $(A_1, G_1)^* = B_0$ и $(A_2, G_2)^* = B_0^n \times B_1^m$, $n \neq 0$. Тогда если $\bar{a} = (a_1, \dots, a_s) \mid 1$, то $\hat{a}_t \cong \widehat{h(a_t)}$ при $t \neq t_0$, $a_{t_0} \notin T(B_0)$ и $\widehat{h(a_{t_0})} \cong \hat{a}_{t_0} \times B_0^{n-1} \times B_1^m$. По условию $\hat{a}_{t_0} \leq^\sigma_{\beta_0} \hat{a}_{t_0} \times B_1$ и $\hat{a}_{t_0} \leq^\sigma_{\beta_0} \hat{a}_{t_0} \times B_0$. Из $C_1 \leq^\sigma_\beta C_2$ и $D_1 \leq^\sigma_\beta D_2$ следует, что $C_1 \times D_1 \leq^\sigma_\beta C_2 \times D_2$. Отсюда легко вывести, что $\hat{a}_{t_0} \leq^\sigma_{\beta_0} \hat{a}_{t_0} \times B_0^{n-1} \times B_1^m$.

(2) $G_1 = A_1$. Случай разбирается аналогично: здесь $(A_1, G_1)^* \cong B_1$, $(A_2, G_2)^* \cong B_1^m$. Доказано, что $\mathscr{M}$ — α-система.

Построим Δ^0_α-инструкцию $q : PL \to U$. Поскольку A — Δ^0_α-алгебра, найдется такая Δ^0_α-вычислимая последовательность конечных алгебр $\{A_i\}_{i\in\omega}$, что $1 \leq A_i \leq A_{i+1}$ и $A = \bigcup\limits_{i\in\omega} A_i$. Пусть $G_i = G \cap A_i$. Положим $q(l_0) = (A_1, G_1)$, и если $\tau \in PL$, $\tau = l_0 u_1 l_1 \dots u_k l_k$, то

$$q(\tau) = \begin{cases} u_k, & \text{если } u_k \neq (A_k, G_k), \\ (A_{k+1}, G_{k+1}), & \text{если } u_k = (A_k, G_k). \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что q действительно является инструкцией. Согласно теореме 1 у пары (P, q) существует такое исполнение $\pi = \hat{l} u_1 l_1 u_2 l_2 \dots$, что $D = \bigcup\limits_{i\in\omega} E(l_i)$ в.-п. В этом случае $u_i = (A_i, G_i)$ для $i \in \omega$. Пусть, как и выше, $l_i = (f_i, (A_i, G_i)^*)$ и $h_i : (A_i, G_i)^* \to (A_{i+1}, G_{i+1})^*$ — канонические вложения. Из определения P легко вывести, что D будет диаграммой алгебры, изоморфной

C^σ, где $C = \mathrm{Lim}\{(A_i, G_i)^*, h_i\}_{i\in\omega}$: построим функцию $\beta : \omega \to C$. Если $n \in \omega$, то найдется такое $i \in \omega$, что $n \in \mathrm{dom}(f_i)$. Пусть $g_i : (A_i, G_i)^* \to C$ — естественное вложение. Положим $\beta(n) = g_i(f_i(n))$. Нетрудно проверить корректность этого определения и то, что $\mathrm{ran}(\beta) = C$.

Как показано выше, $((A_i, G_i)^*, \bar{a}) \leq_0^\sigma ((A_{i+1}, G_{i+1})^*, h_i(\bar{a}))$ для любого $\bar{a}$ из $(A_i, G_i)^*$. Из этого следует, что h_i являются σ-вложениями. В силу согласованности σ и T g_i также являются σ-вложениями. Пусть $\psi(v_1, \dots, v_t)$ — атомарная формула $L_{BA} \cup \sigma$ и $n_1, \dots, n_t \in \mathrm{dom}(f_i)$. В этом случае

$$\psi(n_1, \dots, n_t) \in D \Leftrightarrow [(A_i, G_i)^*]^\sigma \models \psi(f_i(n_1), \dots, f_i(n_t)) \\ \Leftrightarrow C^\sigma \models \psi(\beta(n_1), \dots, \beta(n_t)).$$

Отсюда ясно, что β будет изоморфизмом C^σ и некоторой алгебры, диаграммой которой является D. Поэтому можно сразу считать, что D — диаграмма искомой C^σ.

Все остальные свойства C следуют из предложения 1. Теорема доказана.

Основной задачей при применении теоремы 2 является вычисление отношений $\leq_\alpha^\sigma$ для алгебр B_0 и B_1. В [1] были описаны отношения $\leq_0, \dots, \leq_4$. Приведем это описание.

Если A — алгебра, то $|A|$ — мощность A, $\theta(A) = \sup\{n \in \omega \mid$ существуют такие атомные элементы $a_1, \dots, a_n \in A \setminus F(A)$, что $a_i \cdot a_j = 0$ при $i \neq j\}$ — характеристика, принимающая значения в $\omega \cup \{\infty\}$.

Лемма 8. *Пусть A и B — алгебры. Тогда*

(0) *$A \leq_0 B$ равносильно выполнению эквивалентности $A = 0 \Leftrightarrow B = 0$;*

(1) *$A \leq_1 B$ равносильно $|A| \geq |B|$ и $(A = 0 \Leftrightarrow B = 0)$;*

(2) *$A \leq_2 B$ равносильно $|A| = |B|$ и $|At(A)| \geq |At(B)|$;*

(3) *$A \leq_3 B$ равносильно $|A| = |B|$, $|At(A)| = |At(B)|$, $|A/F| \geq |B/F|$ и (A атомная $\Rightarrow B$ атомная);*

(4) *$A \leq_4 B$ равносильно выполнению следующего списка условий: $|A| = |B|$; $|At(A)| = |At(B)|$; $|A/F| = |B/F|$; A атомная $\Leftrightarrow B$ атомная; $|At(A/F)| \geq |At(B/F)|$; $|A/S| \geq |B/S|$; $\theta(A) \geq \theta(B)$; $B/I = 0 \Rightarrow A/I = 0$; ($B/I = 0$ и $|B/S| < \infty$) $\Rightarrow |A/S| = |B/S|$.*

Лемма 9. *Пусть A и B — алгебры. Тогда*

(1) *если $\sigma = \{At\}$, то*

(a) *$A \leq_0^\sigma B$ равносильно выполнению эквивалентностей ($A \cong 0 \Leftrightarrow B \cong 0$) и ($A \cong 1 \Leftrightarrow B \cong 1$);*

(b) *если $\alpha \geq 1$, то $A \leq_\alpha^\sigma B$ равносильно $A \leq_{1+\alpha} B$;*

(2) *если $\sigma = \{At, N, R\}$, то*

(a) *$A \leq_0^\sigma B$ равносильно выполнению эквивалентностей ($A \cong 0 \Leftrightarrow B \cong 0$), ($A \cong 1 \Leftrightarrow B \cong 1$), ($A$ безатомная $\Leftrightarrow B$ безатомная) и (A атомная $\Leftrightarrow B$ атомная);*

(b) *$A \leq_1^\sigma B$ равносильно тому, что $|A| = |B|$, (A безатомная $\Leftrightarrow B$ безатомная), (A атомная $\Leftrightarrow B$ атомная), $|At(A)| = |At(B)|$ и верна импликация ($B/I = 0 \Rightarrow A/I = 0$).*

Доказательство. (2) Пусть $\sigma = \{At, N, R\}$. Отношение $A \leq_0^\sigma B$ равносильно тому, что A и B неразличимы бескванторными предложениями $L_{BA} \cup \sigma$, и в лемме 3 был проведен анализ таких предложений. Из него сразу следует (a).

(b) Согласно лемме 4 $A \leq_1^\sigma B$ равносильно тому, что для любого набора $b_1, \dots, b_n \mid 1$ из B найдется такой набор $a_1, \dots, a_n \mid 1$ из A, что $\hat{b}_i \leq_0^\sigma \hat{a}_i$.

Пусть $A \le_1^\sigma B$ верно. Часть условий верна, поскольку $A \le_1^\sigma B$ влечет $A \le_0^\sigma B$. Предположим, что $B \cong n$. Тогда $B = \hat{b}_1 \oplus \dots \oplus \hat{b}_n$, где $\hat{b}_i \cong 1$ для $i \in [1, n]$. Найдя такие $a_1, \dots, a_n \mid 1$ в A, что $\hat{a}_i \cong 1$, получим, что $A \cong n$. Если же B бесконечна, то для любого $n \in \omega$ найдутся такие $b_1, \dots, b_n \mid 1$ в B, что $b_i \ne 0$. Аналогичными рассуждениями получаем, что A бесконечна.

Свойства $|At(A)| = |At(B)|$ и $(B/I = 0 \Rightarrow A/I = 0)$ доказываются подобным образом.

Предположим теперь, что правая часть пункта (b) верна. Возьмем набор $b_1, \dots, b_n \mid 1$ в B. Докажем, что найдется соответствующий набор $a_1, \dots, a_n \mid 1$ в A. Можно считать, что $b_1, \dots, b_n$ делятся на четыре вида (отбрасывая нулевые):

(i) $b'_1, \dots, b'_k$ — атомы;

(ii) $b''_1, \dots, b''_t$ атомные, содержащие по крайней мере 2 атома;

(iii) $b^*_1, \dots, b^*_s$ ненулевые безатомные;

(iv) $b'''_1, \dots, b'''_l$ не атомные, не безатомные.

Нужно найти $a'_i, a''_i, a^*_i, a'''_i$ с соответствующими свойствами.

Имеем, что $|At(B)| \ge k + 2t + l$, следовательно, $|At(A)| \ge k + 2t + l$. Рассмотрим случай $l \ne 0$. Найдем атомы $a'_1, \dots, a'_k \in A$ и такие $a''_1, \dots, a''_t \in A$, что $\hat{a}''_i \cong 2$. Если $A_1 = C(\widehat{a'_1 + \dots + a'_k + a''_1} + \dots + a''_t)$, то $|At(A_1)| \ge l$ и A_1 не атомная. Нетрудно разделить A_1 на элементы $a^*_1, \dots, a^*_s$ и $a''_1, \dots, a''_l$ с нужными свойствами.

Для завершения доказательства нужно рассмотреть еще случаи $l = 0, t \ne 0$ и $l = 0, t = 0$, что является несложным упражнением.

(1) Пусть $\sigma = \{At\}$. П. (a) вновь следует из рассуждений в доказательстве леммы 3. Действуя, как в (2), легко доказать, что $A \le_1^\sigma B$ равносильно тому, что $|A| = |B|$ и $|At(A)| \ge |At(B)|$. Это согласно лемме 8 эквивалентно $A \le_2 B$. Пользуясь леммой 4, далее можно индукцией по $\alpha \ge 1$ показать, что $A \le_\alpha^\sigma B$ эквивалентно $A \le_{1+\alpha} B$, так как $\sigma = \{At\}$ и $\sigma = \varnothing$ являются локальными наборами. Лемма доказана.

Приведем некоторые примеры использования теоремы 2. П. (3) из приведенной ниже теоремы является также некоторым описанием $\{At, N, R\}$-вычислимых алгебр, поскольку пара $(C/S, I/S)$ является почти инвариантом для алгебры C. Это описание позволяет, в частности, решить одну известную проблему о сильно конструктивных алгебрах характеристики $(1, 0, 1)$, но этому посвящена отдельная публикация (там же исследуется и связь $(C/S, I/S)$ и C).

Если даны алгебра A и два идеала $H, G \lhd A$, то $(A/H, G/H)$ обозначает алгебру с идеалом, точное определение которой ясно.

Теорема 3. *Пусть (A, H) — алгебра с идеалом. Тогда*

(1) (A, H) обладает Δ_5^0-представлением тогда и только тогда, когда

$$(A, H) \cong (C/(F_2 + N), I/(F_2 + N)),$$

где C — вычислимая алгебра;

(2) (A, H) обладает Δ_4^0-представлением тогда и только тогда, когда

$$(A, H) \cong (C/(F_2 + N), I/(F_2 + N)),$$

где C $\{At\}$-вычислима;

(3) (A, H) обладает Δ_2^0-представлением тогда и только тогда, когда

$$(A, H) \cong (C/S, I/S),$$

где C $\{At, N, R\}$-вычислима.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2. $(1, \Rightarrow)$ Пусть $T = F_2 + N$, $B_0 = B_{\omega^2+\eta}$ и $B_1 = B_{\omega^2}$. Ясно, что $B_0/T \cong B_1/T \cong 1$. Нетрудно найти такие вычислимые представления для B_0 и B_1, что $T(B_0)$ и $T(B_1)$ будут вычислимы. Набор σ пуст, $\alpha = 5$. Свойства (a) и (b) легко проверяются на основе леммы 8. Свойство (c): если $a \in B_1$, то $\hat{a}$ является алгеброй вида B_{ω^2}, $B_{\omega\cdot n}$ или B_n для некоторого $n \in \omega$. Легко построить такое вычислимое представление для B_1, что тип изоморфизма $\hat{a}$ будет вычисляться по $a \in B_1$. Аналогичное верно для B_0. Пусть фиксированы такие представления. Тогда по $a \in B_0^n \times B_1^m$ также можно вычислить тип изоморфизма $\hat{a}$. Если $\bar{a}$ — набор из $B_0^{n_1} \times B_1^{m_1}$ и $\bar{b}$ — из $B_0^{n_2} \times B_1^{m_2}$, то отношение

$$\left(B_0^{n_1} \times B_1^{m_1}, \bar{a}\right) \leq_\beta \left(B_0^{n_2} \times B_1^{m_2}, \bar{b}\right)$$

в силу леммы 4 сводится к отношениям вида $\hat{c} \leq_\beta \hat{d}$, где $c \in B_0^{n_1} \times B_1^{m_1}$, $d \in B_0^{n_2} \times B_1^{m_2}$. Зная типы изоморфизма $\hat{c}$ и $\hat{d}$, истинность $\hat{c} \leq_\beta \hat{d}$ можно определить по лемме 8.

Все условия теоремы 2 проверены. По Δ_5^0-алгебре (A, H) находим вычислимую алгебру C и изоморфизм $f : A \to C/T$ с указанными свойствами. Докажем, что f — изоморфизм (A, H) и $(C/T, I/T)$.

(i) Пусть $a \in H$. Покажем, что $f(a) \in I/T(C)$. Найдется такой $d \in C$, что $f(a) = d/T(C)$ и если $y \leq d$ и $y \in T(C)$, то $\hat{y} \cong \hat{a}_1 \times \dots \times \hat{a}_n$, где $a_i \in T(B_1)$. Ясно, что $d \in R(C)$, так как B_1 атомная.

(ii) Пусть $a \in A \setminus H$. Допустим, что $f(a) \in I/T(C)$. Тогда можно считать, что $f(a) = b/T(C)$, где $b \in R(C)$, поскольку $N(C) \subseteq T(C)$. Найдутся $z \leq b$, $e \in B_0 \backslash T(B_0)$ и T-стабильное вложение $g : \hat{e} \to \hat{z}$. Алгебра $\hat{e}$ содержит ненулевой безатомный элемент, следовательно, $z \notin R(C)$; противоречие.

$(1, \Leftarrow)$ Нетрудно проверить, что $F(C) \in \Sigma_2^0$, $F_2(C) \in \Sigma_4^0$, $N(C) \in \Pi_2^0$ и $I(C) \in \Sigma_4^0$. Следовательно, $F_2(C) + N(C) \in \Delta_5^0$ и $(C/(F_2(C) + N(C)), I/(F_2(C) + N(C)))$ — Δ_5^0-алгебра с Δ_5^0-идеалом.

(2) Все рассуждения буквально повторяют (1) с $\alpha = 4$ и $\sigma = \{At\}$. В силу леммы 9 $\leq_\beta^\sigma$ соответствует $\leq_{1+\beta}$. Набор $\{At\}$, очевидно, согласован с T.

(3) $T = S$, $B_0 = B_{\omega+\eta}$, $B_1 = B_\omega$, $\sigma = \{At, N, R\}$, $\alpha = 2$. Вновь можно рассуждать почти так же, как в (1), пользуясь леммой 9 вместо 8. Пусть (A, H) — Δ_2^0-алгебра, C — σ-вычислимая алгебра и $f : A \to C/T$ — изоморфизм с указанными в теореме 2 свойствами. Буквальным повторением (i) и (ii) получаем, что $f : (A, H) \to (C/T(C), I/T(C))$ — изоморфизм. Теорема доказана.

В заключение отметим, что список примеров, подобных указанным в теореме 3, может быть существенно расширен. В частности, приведенное ниже предположение кажется автору правдоподобным.

Гипотеза. *Если $\alpha \geq 1$ — вычислимый непредельный ординал и (A, H) — алгебра с идеалом, то (A, H) обладает $\Delta_{4\alpha+1}^0$-представлением тогда и только тогда, когда $(A, H) \cong (C/T_\alpha, I_\alpha/T_\alpha)$, где C — вычислимая алгебра. Здесь $T = F_2 + N$, T_α и I_α — итерированные версии операторов T и I соответственно.*

При $\alpha = 1$ это следует из теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алаев П. Е.* Вычислимые однородные булевы алгебры и одна метатеорема // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 2. С. 133–158.
2. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.

3. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
4. *Ash C. J.* Recursive labelling systems and stability of recursive structures in hyperarithmetical degrees // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. V. 298, N 2. P. 497–514.
5. *Ash C. J.* Labelling systems and r.e. structures // Ann. Pure Appl. Logic. 1990. V. 47, N 2. P. 99–119.
6. *Ash C. J., Knight J. F.* Ramified systems // Ann. Pure Appl. Logic. 1994. V. 70, N 3. P. 205–221.

Статья поступила 17 апреля 2003 г.

Алаев Павел Евгеньевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
alaev@math.nsc.ru