Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2005. Том 46, № 1

УДК 517.958

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ЧИСТО КОМПТОНОВСКИМ РАССЕЯНИЕМ

Д. С. Аниконов, Д. С. Коновалова

Аннотация: Исследуется краевая задача о нахождении распределения плотности или интенсивности потоков фотонов в произвольной среде. Основным элементом математической модели является стационарное уравнение переноса. Радиационные характеристики среды и источников излучения считаются известными, т. е. изучаемая проблема по типу является классической прямой задачей математической физики. Статья является продолжением предыдущей работы авторов. Удалось существенно расширить классы функций, описывающих процесс миграции фотонов, так, что резонансные эффекты и случаи составных сред оказались включенными в рассмотрение. Итогом работы является теорема существования и единственности решения краевой задачи для уравнения переноса.

Ключевые слова: комптоновское рассеяние, теория переноса, миграция фотонов, рентгеновское излучение.

Введение

В предыдущей работе авторов [1] рассмотрено стационарное уравнение переноса с комптоновской индикатрисой рассеяния, где уточнена математическая форма уравнения и доказаны теоремы существования и единственности решения поставленной краевой задачи. Однако некоторые ограничения в [1] типа непрерывности коэффициентов уравнения ограничивали общность полученных результатов и, как следствие, снижали их прикладную значимость. В частности, вне учета оказались резонансные уровни энергии и среды, состоящие из различных материалов, при наличии которых радиационные характеристики вещества оказываются разрывными функциями. В настоящей работе этот недостаток устранен путем использования класса почти всюду непрерывных функций. Вместе с тем, несмотря на возникшие трудности, удалось заметно упростить общую схему доказательства утверждений.

Как и в [1], отметим, что имеется ряд работ других авторов близкой направленности (например, [2–4]), где были предложены и апробированы различные численные алгоритмы решения подобных задач.

В § 1 ставится краевая задача, вводятся классы для коэффициентов уравнения переноса для функций, описывающих источники излучения и для искомого решения. Доказываются вспомогательные утверждения и дается определение некоторого обобщенного решения.

В § 2 содержатся доказательства основных утверждений, включая теорему существования и единственности решения краевой задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00126) и Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке научных школ (НШ–1172.2003.1).

Ограничения и терминология настоящей работы соответствуют процессу миграции фотонов в веществе. Однако ввиду общности рассмотренной математической модели не исключена интерпретация полученных результатов и для других видов излучения.

§ 1. Обозначения, постановка задачи и вспомогательные утверждения

Будем рассматривать стационарный процесс миграции фотонов в среде G, предполагая, что рассеяние частиц при взаимодействии с атомами вещества происходит только по закону Комптона.

Введем обозначения: $\Omega = \{\omega : \omega \in \mathbb{R}^3,\ |\omega| = 1\}$; $\alpha, \alpha' \in I$, $I = [\alpha_1, \alpha_2]$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$. Переменные ω' из единичной сферы Ω и α' из числового промежутка $[\alpha_1, \alpha_2]$ вводятся для обозначения направления потока фотонов (ω') и их энергии (α') до акта рассеяния. Для направления потока фотонов после рассеяния и оставшейся энергии используются переменные ω и α соответственно, причем считается, что $\alpha' > \alpha$. Для удобства энергия выражена в единицах энергии покоя электрона.

Мы не будем здесь повторять рассуждения работы [1] по уточнению формы стационарного уравнения переноса, соответствующего сделанным предположениям. Укажем лишь, что связь между переменными (ω', α') и (ω, α) дается соотношением Комптона:

$$\alpha' = g(\omega, \omega', \alpha), \quad g(\omega, \omega', \alpha) = \frac{\alpha}{1 + \alpha(\omega \cdot \omega' - 1)}, \tag{1.1}$$

где $\omega \cdot \omega'$ означает скалярное произведение векторов ω и ω', а переменная ω' принадлежит подмножеству единичной сферы $\Omega_{\omega,\alpha} = \{\omega' : \omega' \in \Omega,\ \omega \cdot \omega' \geq 1 - 1/\alpha + 1/\alpha_2\}$. Как отмечено в [1], верны неравенства $\alpha \leq g(\omega, \omega', \alpha) \leq \alpha_2$.

После незначительных переобозначений соответствующее уравнение переноса в [1] может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \omega \cdot \nabla_r f(r, \omega, \alpha) &+ \mu(r, \alpha) f(r, \omega, \alpha) \\ &= \int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} \sigma(r, \omega, \omega', \alpha) f(r, \omega', g(\omega, \omega', \alpha))\, d\omega' + J(r, \omega, \alpha), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где функция $f(r, \omega, \alpha)$ — плотность (или интенсивность) потока фотонов в точке r, имеющих направление ω и энергию α; $\sigma(r, \omega, \omega', \alpha)$ — дифференциальное сечение комптоновского рассеяния после использования в интеграле соотношений (1.1); $J(r, \omega, \alpha)$ — плотность (или интенсивность) внутренних источников излучения. По традиции интеграл в правой части (1.2) будем называть *интегралом столкновений* и обозначать через $N(r, \omega, \alpha)$. Для характеристики неоднородности среды G введем в рассмотрение области G_i, $i = 1, \ldots, p$, $p < \infty$, такие, что

$$G_i \subset G; \quad G_i \cap G_j = \varnothing,\ i \neq j; \quad G_0 = \bigcup_{i=1}^{p} G_i,\ \overline{G}_0 = \overline{G}.$$

Будем предполагать выполненным условие обобщенной выпуклости множества G_0, введенное в теорию переноса В. С. Владимировым [5]. Именно, считаем, что любой луч $L_{r,\omega} = \{r + t\omega,\ t \geq 0\}$, $(r, \omega) \in G_0 \times \Omega$, пересекает границу ∂G_0 множества G_0 в конечном числе точек.

Обозначим $d(r,\omega) = \mathrm{mes}_1(L_{r,\omega} \cap \overline{G})$, $r \in \overline{G}$, $\omega \in \Omega$, где $\mathrm{mes}_1 Y$ означает лебегову меру множества $Y \subset \mathbb{R}^1$. Функцию $d(r,\omega)$ иначе можно определить как расстояние от точки r до границы области G в направлении ω. Ясно, что $\xi = r - d(r,-\omega)\omega \in \partial G$, $(r,\omega) \in G_0 \times \Omega$. Обозначим множество всевозможных пар (ξ,ω) через Γ^- и рассмотрим граничное условие:

$$f(\xi,\omega,\alpha) = h(\xi,\omega,\alpha), \quad (\xi,\omega) \in \Gamma^-,\ \alpha \in \mathrm{I},\ \mathrm{I} = [\alpha_1,\alpha]. \tag{1.3}$$

Функция $h(\xi,\omega,\alpha)$ имеет смысл плотности (или интенсивности) потока частиц, поступающих извне в среду G через граничную точку $\xi \in \partial G$ в направлении ω и имеющих энергию α (падающий поток).

Целью настоящей работы является исследование корректности краевой задачи (1.2), (1.3), состоящей в нахождении $f(r,\omega,\alpha)$ из уравнения (1.2) и условия (1.3) при известных $\mu(r,\alpha)$, $\sigma(r,\omega,\omega',\alpha)$, $J(r,\omega,\alpha)$ и $h(\xi,\omega,\alpha)$.

Теперь сформулируем основные предположения. Для произвольного измеримого по Лебегу множества $Y \subset \mathbb{R}^m$ его m-мерную меру будем означать через $\mathrm{mes}_m Y$. Рассматривается класс функций $D(Y)$, ограниченных и непрерывных п. в. на Y в следующем смысле: для каждой функции $V(y) \in D(Y)$ существует множество $M \subset Y$, $\mathrm{mes}_m M = 0$, такое, что $V(y)$, рассматриваемая на $Y \backslash M$ (т. е. след $V(y)$ на $Y \backslash M$), является ограниченной и непрерывной функцией. Такое понятие непрерывности эквивалентно следующему: для любой точки $y_0 \in Y \backslash M$ и для любой последовательности $\{y_n\}$, $n = 1,\ldots$, $y_n \in Y \backslash M$, $y_n \to y_0$, $n \to \infty$, имеет место сходимость $V(y_n) \to V(y_0)$.

Заметим, что множество M может быть разным даже для одной и той же функции $V(y)$. В связи с этим обстоятельством нам понадобится следующее свойство.

Лемма 1.1. *Если для любого шара $B(z,\varepsilon) = \{y : y \in \mathbb{R}^m,\ |y - z| < \varepsilon\}$ его пересечение с множеством Y имеет положительную меру в $\mathbb{R}^m$ при $z \in Y$, то следующая величина β для каждой функции $V(y) \in D(Y)$ ($V(y)$ ограничена и непрерывна на $Y \backslash M$):*

$$\beta = \sup_{y \in Y \backslash M} |V(y)|, \quad M \subset Y, \quad \mathrm{mes}_m M = 0,$$

не зависит от выбора M.

Доказательство. Фиксируем произвольную функцию $V(y) \in D(Y)$. Пусть имеются два множества $M_1, M_2 \subset Y$, $\mathrm{mes}_m M_1 = \mathrm{mes}_m M_2 = 0$, такие, что функция $V(y)$ ограничена и непрерывна на $Y \backslash M_1$ и на $Y \backslash M_2$. Обозначим через β_i наибольшее значение функции $|V(y)|$ на $Y \backslash M_i$, $i = 1, 2$.

Очевидно, что существует последовательность $\{y_n\}$, $y_n \in M_1$, такая, что $|V(y_n)| \to \beta_1$ при $n \to \infty$. Рассмотрим пересечение $B(y_n,\varepsilon) \cap (Y \backslash M_1)$.

Докажем, что всякое такое множество содержит элементы из $Y \backslash M_2$. Действительно, допустим что это не так, т. е. существуют n и ε такие, что любой элемент $z \in B(y_n,\varepsilon) \cap (Y \backslash M_1)$ не принадлежит $Y \backslash M_2$. Но поскольку $z \in Y$, то $z \in M_2$. Поэтому $B(y_n,\varepsilon) \cap (Y \backslash M_1) \subset M_2$, что невозможно ввиду соотношений $0 = \mathrm{mes}_m M_2 \geq \mathrm{mes}_m(B(y_n,\varepsilon) \cap (Y \backslash M_1)) > 0$.

Итак, установлено, что любое множество $B(y_n,\varepsilon) \cap (Y \backslash M_1)$ содержит элементы из $Y \backslash M_2$. Так как $V(y)$ непрерывна на $Y \backslash M_1$ и на $Y \backslash M_2$, для любого y_n можно подобрать такой элемент $z_n \in Y \backslash M_1$, $z_n \in Y \backslash M_2$, настолько близкий к y_n, что $|V(y_n) - V(z_n)| < 1/n$. Отсюда следует, что $|V(y_n)| < |V(z_n)| + 1/n \leq \beta_2 + 1/n$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве $|V(y_n)| \leq \beta_2 + 1/n$, получим $\beta_1 \le \beta_2$. Точно так же доказывается, что $\beta_1 \ge \beta_2$, следовательно, $\beta_1 = \beta_2$. Лемма доказана.

Замечание 1.1. Нетрудно проверить, что множество $D(Y)$ с нормой β, определенной в лемме 1.1, является банаховым пространством и произведение двух функций из $D(Y)$ есть также функция из $D(Y)$.

Для векторов $\omega \in \Omega$ будем использовать их представление через сферические углы: широту θ и долготу γ, т. е. $\omega(\theta,\gamma) = (\sin\theta\cos\gamma, \sin\theta\sin\gamma, \cos\theta)$, $0 < \theta < \pi, 0 \le \gamma < 2\pi$. Для любой функции $\zeta(\omega)$ рассмотрим суперпозицию $\zeta(w(\theta,\gamma))$, $(\theta,\gamma) \in P$, $P = (0,\pi)\times[0,2\pi)$. Обозначим $s = (\theta,\gamma)$, $\zeta(\omega(\theta,\gamma)) = \zeta^*(s)$. В дальнейшем, для удобства ссылок на известные результаты из теории мер, будем кое-где менять местами функции $\zeta(\omega)$ и $\zeta^*(s)$, каждый раз специально оговаривая такой шаг.

Для обозначений вышеупомянутых множеств нулевой меры, элементы которых содержат в качестве компонент точки из Ω, будем использовать букву M. Для соответствующих множеств, элементы которых вместо векторов ω содержат их представление через s, к букве M будем прибавлять символ $*$, т. е. писать, например, M*.

Лемма 1.2. *Справедливы следующие неравенства:*

$$0 \le \omega\cdot\omega' - 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_2}, \quad \omega' \in \Omega_{\omega,\alpha},$$

$$\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} \left(\omega\cdot\omega' - 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_2}\right)^m d\omega' \le \frac{2\pi}{m+1}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_2}\right)^{m+1}, \quad m = 0,1,\ldots.$$

Доказательство. Первое неравенство в лемме есть очевидное следствие определения: $\Omega_{\omega,\alpha} = \{\omega' : \omega' \in \Omega,\ \omega\cdot\omega' \ge 1 - 1/\alpha + 1/\alpha_2\}$. Докажем второе по индукции. Сначала пусть $m = 0$, тогда, вводя функцию $\chi(t)$, равную единице при $t \ge 0$ и нулю при $t < 0$, имеем

$$\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} d\omega' = \int\limits_{\Omega} \chi\left(\omega\cdot\omega' - 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_2}\right) d\omega'.$$

Как известно [6, 7], интеграл по $\omega' \in \Omega$ от функции, зависящей от скалярного произведения $\omega\cdot\omega'$, не зависит от ω. Поэтому, выбирая в качестве ω вектор $(0,0,1)$, делая замену переменной $\nu = \omega\cdot\omega'$ и вводя функцию $\eta(\alpha) = \max\{-1, 1 - 1/\alpha + 1/\alpha_2\}$, получим

$$\int\limits_{\Omega} \chi\left(\omega\cdot\omega' - 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_2}\right) d\omega' = 2\pi\int\limits_{-1}^{1} \chi\left(\nu - 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_2}\right) d\nu$$

$$= 2\pi\int\limits_{\eta(\alpha)}^{1} d\nu \le 2\pi\int\limits_{1-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha_2}}^{1} d\nu = 2\pi\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_2}\right),$$

т. е. второе неравенство леммы установлено при $m = 0$. Пусть теперь лемма верна для некоторого m. Докажем, что она верна для $m+1$. Подобно случаю

$m = 0$ имеем

$$\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} \left(\omega\cdot\omega' - 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_2}\right)^m d\omega'$$

$$= 2\pi \int\limits_{-1}^{1} \left(\chi\left(\nu - 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_2}\right)\right)\left(\nu - 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_2}\right)^m d\nu$$

$$= 2\pi \int\limits_{\eta(\alpha)}^{1} \left(\nu - 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_2}\right)^m d\nu$$

$$\le 2\pi \int\limits_{1-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha_2}}^{1} \left(\nu - 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_2}\right)^m d\nu = \frac{2\pi}{m+1}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_2}\right)^{m+1}.$$

Тем самым лемма доказана полностью.

Обозначим $x = (r,\omega,\alpha)$, $X = \overline{G}\times\Omega\times I$, $x \in X$, и рассмотрим любую функцию $f(x)$, для которой существует M, $\mathrm{M} \subset \Omega\times I$, $\mathrm{mes}_3\,\mathrm{M} = 0$, такое, что $f(r,\omega,\alpha)$ непрерывна и ограничена на $G_0 \times ((\Omega\times I)\backslash \mathrm{M})$. Последнее эквивалентно тому, что функция $f^*(r,s,\alpha)$, соответствующая $f(x)$, с областью определения $\overline{G}\times P\times I$ является непрерывной и ограниченной на множестве $G_0\times((P\times I)\backslash \mathrm{M}^*)$, где M^* — прообраз множества M при отображении $\omega = \omega(s)$, $\mathrm{M}^* \subset P\times I$, $\mathrm{mes}_3\,\mathrm{M}^* = 0$. Множество всех таких функций $f(x)$ обозначим через $D(X)$. Это определение является некоторой конкретизацией более общего определения $D(Y)$. Действительно, из множества $\overline{G}\times P\times I$ достаточно удалить множество $(\overline{G}\times \mathrm{M}^*)\cup(\partial G_0\times P\times I)$ меры нуль в $\mathbb{R}^6$, чтобы на оставшейся части функция $f^*(r,s,\alpha)$ была ограничена и непрерывна. Таким образом, $D(X)$ — банахово пространство.

Именно в $D(X)$ будем искать решение задачи (1.2), (1.3). Функция $J(r,\omega,\alpha)$ также берется из $D(X)$. Для введения ограничений для $h(\xi,\omega,\alpha)$ рассмотрим $h_1(r,\omega,\alpha) = h(r - d(r,-\omega)\omega,\omega,\alpha)$ и предположим, что $h_1(r,\omega,\alpha)$ принадлежит $D(X)$. Далее, пусть $\mu(r,\alpha)\in D(\overline{G}\times I)$, т. е. $\mu(r,\alpha)$ непрерывна и ограничена на множестве $G_0\times(I\backslash \mathrm{M})$, где $\mathrm{M}\subset I$, $\mathrm{mes}_1\,\mathrm{M} = 0$. Функция $\sigma(r,\omega,\omega',\alpha)$ считается элементом $D(\overline{G}\times\Omega\times\Omega\times I)$, т. е. функция $\sigma^*(r,s,s',\alpha)$ непрерывна и ограничена на множестве $G_0\times((P\times P\times I)\backslash \mathrm{M}^*)$, $\mathrm{M}^*\subset P\times P\times I$, $\mathrm{mes}_5\,\mathrm{M}^* = 0$.

Для удобства в дальнейшем полагаем, что функции $\mu(r,\alpha)$, $\sigma(r,\omega,\omega',\alpha)$ и $J(r,\omega,\alpha)$ продолжены по r нулем вне $\overline{G}$.

Рассмотрим следующие величины, называемые оптическими расстояниями:

$$\tau(r,\omega,\alpha,t) = \int\limits_0^t \mu(r-\nu\omega,\alpha)\,d\nu,\quad \tau(r,\omega,\alpha) = \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \mu(r-\nu\omega,\alpha)\,d\nu. \tag{1.4}$$

Лемма 1.3. *Функции $\tau(r,\omega,\alpha)$ и $\tau(r,\omega,\alpha,t)$ непрерывны и ограничены на множествах $G_0\times\Omega\times(I\backslash M)$, $G_0\times\Omega\times(I\backslash M)\times[0,d]$ соответственно, где d — диаметр области G, $\mathrm{M}\subset I$, $\mathrm{mes}_1\,\mathrm{M} = 0$.*

Доказательство. Поскольку функция $\mu(r,\alpha)$ продолжена по r нулем вне $\overline{G}$, в интеграле, определяющем $\tau(r,\omega,\alpha)$, верхний предел $d(r,-\omega)$ можно заменить на d. По условию существует множество M, $\mathrm{M}\subset I$, $\mathrm{mes}_1\,\mathrm{M} = 0$, такое, что $\mu(r,\alpha)$ непрерывна и ограничена на $G_0 \times (I \backslash \mathrm{M})$. Фиксируем произвольную точку $(r_0, \omega_0, \alpha_0) \in G_0 \times \Omega \times (I \backslash \mathrm{M})$ и любую последовательность $\{r_n, \omega_n, \alpha_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, точек из $G_0 \times \Omega \times (I \backslash \mathrm{M})$, сходящуюся к $(r_0, \omega_0, \alpha_0)$. По условию обобщенной выпуклости для каждого $n = 0, 1, \ldots$ только при конечном числе значений переменной ν $(0 \leq \nu \leq d)$ точки $(r_n - \nu\omega_n, \alpha_n)$ не принадлежат множеству $G_0 \times (I \backslash \mathrm{M})$. В совокупности для всех $n = 0, 1, \ldots$ таких значений ν набирается не более чем счетное множество, имеющее меру нуль в $\mathbb{R}^1$. Поэтому для функций $\psi_n(\nu) = \mu(r_n - \nu\omega_n, \alpha_n)$, $\psi_0(\nu) = \mu(r_0 - \nu\omega_0, \alpha_0)$ имеем сходимость $\psi_n(\nu) \to \psi_0(\nu)$ п. в. на $[0, d]$. Так как последовательность функций $\psi_n(\nu)$ ограничена п. в. на $[0, d]$, применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем $\tau(r_n, \omega_n, \alpha_n) \to \tau(r_0, \omega_0, \alpha_0)$, что эквивалентно непрерывности $\tau(r, \omega, \alpha)$ на $G_0 \times \Omega \times (I \backslash \mathrm{M})$. Ее ограниченность следует из ограниченности п. в. подынтегральной функции в (1.4). Следовательно, утверждение леммы для $\tau(r, \omega, \alpha)$ доказано.

Пусть $(r_n, \omega_n, \alpha_n)$, $n = 0, 1, \ldots$, — те же самые точки из $G_0 \times \Omega \times (I \backslash \mathrm{M})$, и возьмем произвольную последовательность $\{t_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящуюся к произвольной точке t_0, $t_n \in [0, d]$, $n = 0, 1, \ldots$. Величины $\tau(r_n, \omega_n, \alpha_n, t_n)$, $n = 0, 1, \ldots$, представим в виде

$$\tau(r_n, \omega_n, \alpha_n, t_n) = \int\limits_0^{t_0} \mu(r_n - \nu\omega_n, \alpha_n)\, d\nu + \int\limits_{t_0}^{t_n} \mu(r_n - \nu\omega_n, \alpha_n)\, d\nu.$$

В силу ограниченности п. в. по мере в $\mathbb{R}^1$ подынтегрального выражения второй интеграл в правой части последнего равенства по абсолютной величине не превосходит $\mathrm{const}\,|t_0 - t_n|$, т. е. он стремится к нулю при $n \to \infty$. Сходимость первого интеграла к $\tau(r_0, \omega_0, \alpha_0, t_0)$ доказывается точно так же, как была доказана непрерывность $\tau(r, \omega, \alpha)$. Тем самым лемма доказана полностью.

Как и в [5–7], будем понимать решение краевой задачи для уравнения переноса в некотором обобщенном смысле. В частности, первое слагаемое в левой части уравнения (1.2) понимается в следующем смысле:

$$\omega \cdot \nabla_r f(r, \omega, \alpha) = \frac{d}{d\upsilon} f(r + \upsilon\omega, \omega, \alpha)\Big|_{\upsilon=0}. \tag{1.5}$$

Обозначим левую часть уравнения (1.2) через lf, т. е.

$$lf(r, \omega, \alpha) = \frac{d}{d\upsilon} f(r + \upsilon\omega, \omega, \alpha)\Big|_{\upsilon=0} + \mu(r, \alpha) f(r, \omega, \alpha).$$

Определение 1. Функция $f(x)$ $(x = (r, \omega, \alpha))$ из пространства $D(X)$ называется *решением краевой задачи* (1.2), (1.3), если существует множество M, $\mathrm{M} \subset \Omega \times I$, $\mathrm{mes}_3\, \mathrm{M} = 0$, такое, что $f(r, \omega, \alpha)$ и $lf(r, \omega, \alpha)$ непрерывны и ограничены на $G_0 \times ((\Omega \times I) \backslash \mathrm{M})$ и на этом же множестве выполняется уравнение (1.2), $lf(x) = P(x)$, $P(x) = N(x) + J(x)$, а также функция $f(r - t\omega, \omega, \alpha)$ непрерывна по $t \in [0, d(r, -\omega)]$ и имеет место краевое условие (1.3) $f(r - d(r, -\omega)\omega, \omega, \alpha) = h(r - d(r, -\omega)\omega, \omega, \alpha)$.

§ 2. Основные утверждения

На пространстве $D(X)$ определим линейные операторы A и S:

$$(A\varphi)(r, \omega, \alpha) = \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp\left(-\int\limits_0^t \mu(r - \nu\omega, \alpha) d\nu\right) \varphi(r - t\omega, \omega, \alpha)\, dt, \tag{2.1}$$

$$(S\varphi)(r,\omega,\alpha) = \int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} \sigma(r,\omega,\omega',\alpha)\varphi(r,\omega',g(\omega,\omega',\alpha))\,d\omega', \tag{2.2}$$

где $\varphi(x) \in D(X)$, а функция $g(\omega,\omega',\alpha)$ определена соотношением (1.1).

Теорема 2.1. *Оператор A переводит $D(X)$ в себя.*

Доказательство. Для удобства продолжим $\varphi(r,\omega,\alpha)$ по r нулем вне $\overline{G}$ и обозначим все подынтегральное выражение в (2.1) через $\Psi(r,\omega,\alpha,t)$. Тогда имеем

$$(A\varphi)(r,\omega,\alpha) = \int\limits_0^d \Psi(r,\omega,\alpha,t)\,dt. \tag{2.3}$$

По лемме 1.3 функция $\tau(r,\omega,\alpha,t)$, являющаяся множителем в выражении $\Psi(r,\omega,\alpha,t)$, такова, что $\tau^*(r,s,\alpha,t)$ непрерывна и ограничена на множестве $G_0 \times P \times \big(I\backslash \mathrm{M}_1^*\big) \times [0,d]$, где $\mathrm{M}_1^* \subset I$, $\mathrm{mes}_1 \mathrm{M}_1^* = 0$. Так как $\varphi(x) \in D(X)$, существует $\mathrm{M}_2^* \subset P \times I$, $\mathrm{mes}_3 \mathrm{M}_2^* = 0$, такое, что $\varphi^*(r,s,\alpha)$ непрерывна и ограничена на $G_0 \times \big((P \times I)\backslash \mathrm{M}_2^*\big)$. Обозначим $\mathrm{M}_3^* = P \times \mathrm{M}_1^*$. Ясно, что $\mathrm{M}_3^* \subset P \times I$, $\mathrm{mes}_3 \mathrm{M}_3^* = 0$. Рассмотрим множество $\mathrm{M}_4^* = \mathrm{M}_2^* \cup \mathrm{M}_3^*$. По построению $\mathrm{mes}_3 \mathrm{M}_4^* = 0$ и функция $\Psi^*(r,s,\alpha,t)$ непрерывна и ограничена на множестве $G_0 \times \big((P\times I)\backslash \mathrm{M}_4^*\big)$ при всех t, кроме таких, при которых $r - t\omega \in \partial G_0$. Возьмем произвольную точку (r_0,ω_0,α_0) и любую сходящуюся к ней последовательность $\{(r_n,\omega_n,\alpha_n)\}$, $n = 1,2,\dots$, причем $(r_n,\omega_n,\alpha_n) \in G_0 \times ((\Omega \times I)\backslash \mathrm{M}_4)$ для всех $n = 0,1,\dots$, где M_4 — образ множества M_4^* при отображении $\omega = \omega(s)$. Ввиду непрерывности имеет место сходимость $\Psi(r_n,\omega_n,\alpha_n,t) \to \Psi(r_0,\omega_0,\alpha_0,t)$ для всех t, кроме тех, при которых $r_n - t\omega_n \in \partial G_0$, $n = 0,1,\dots$. По условию обобщенной выпуклости таких значений t для каждого n конечное число, а при всех $n = 0,1,\dots$ их всего не более чем счетное множество, мера которого равна нулю. Следовательно, последовательность функций $\Psi(r_n,\omega_n,\alpha_n,t)$ от аргумента t сходится к функции $\Psi(r_0,\omega_0,\alpha_0,t)$ для п. в. $t \in [0,d]$. Поскольку указанная последовательность ограничена в совокупности, по теореме Лебега возможен предельный переход под знаком интеграла, что и означает непрерывность $(A\varphi)(r,\omega,\alpha)$ на множестве $G_0 \times ((\Omega \times I)\backslash \mathrm{M}_4)$, где $\mathrm{M}_4 \subset \Omega \times I$, $\mathrm{mes}_3 \mathrm{M}_4 = 0$. Ограниченность $(A\varphi)(r,\omega,\alpha)$ на этом же множестве легко следует из ограниченности п. в. по $t \in [0,d]$ последовательности $\Psi_n(r_n,\omega_n,\alpha_n,t)$. Следовательно, $(A\varphi)(x) \in D(X)$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Оператор S переводит $D(X)$ в себя.*

Доказательство. Для удобства обозначим $\sigma(r,\omega,\omega',\alpha) = \Psi_1(r,\omega,\omega',\alpha)$, $\varphi(r,\omega',\ g(\omega,\omega',\alpha)) = \Psi_2(r,\omega,\omega',\alpha)$, $\Psi(r,\omega,\omega',\alpha) = \Psi_1(r,\omega,\omega',\alpha)\cdot\Psi_2(r,\omega,\omega',\alpha)$ и продолжим нулем функции $\Psi_1(r,\omega,\omega',\alpha)$ и $\Psi_2(r,\omega,\omega',\alpha)$ по ω' с множества $\Omega_{\omega,\alpha}$ на всю сферу Ω. Ясно, что для исходных функций Ψ_1, Ψ_2 и таких их продолжений свойства непрерывности и ограниченности п. в. эквивалентны. Теперь можно считать, что интеграл в правой части равенства (2.2) берется по Ω.

По предположению функция $\Psi_1(r,\omega,\omega',\alpha)$ порождает функцию $\Psi_1^*(r,s,s',\alpha)$, непрерывную и ограниченную на множестве $G_0 \times \big((P \times P \times I)\backslash \mathscr{M}_1^*\big)$, $\mathscr{M}_1^* \subset P \times P \times I$, $\mathrm{mes}_5\, \mathscr{M}_1^* = 0$. Докажем, что и функция $\Psi_2^*(r,s,s',\alpha)$ такого же типа, т. е. существует множество $\mathscr{M}_2^* \subset P \times P \times I$, $\mathrm{mes}_5\, \mathscr{M}_2^* = 0$, такое, что $\Psi_2^*(r,s,s',\alpha)$ непрерывна и ограничена на $G_0 \times \big((P\times P\times I)\backslash \mathscr{M}_2^*\big)$. Для этого рассмотрим отображение F множества $\Omega\times\Omega\times I$ в $\Omega\times I$, определяемое равенством

$F(\omega,\omega',\alpha)=(\omega',g(\omega,\omega',\alpha))$. Переходя к переменным $s=(\theta,\gamma)$ $s'=(\theta',\gamma')$ (s, s' — сферические углы для векторов ω и ω' соответственно), получим отображение $F^*(s,s',\alpha)=\big(F_1^*(s,s',\alpha),F_2^*(s,s',\alpha),F_3^*(s,s',\alpha)\big)$ из $\mathbb{R}^5$ в $\mathbb{R}^3$, где

$$\theta'=F_1^*(s,s',\alpha),\quad \gamma'=F_2^*(s,s',\alpha),\quad g^*(s,s',\alpha)=F_3^*(s,s',\alpha). \tag{2.4}$$

Так как $\varphi(x)\in D(X)$, функция $\varphi^*(r,s',\alpha')$ непрерывна и ограничена на $G_0\times\big((P\times I)\backslash \mathrm{M}_2^*\big)$, где $\mathrm{M}_2^*\subset P\times I$, $\mathrm{mes}_3\,\mathrm{M}_2^*=0$. Определим множество $\mathscr{M}_2^*$ условием $\mathscr{M}_2^*=\big\{(s,s',\alpha): F^*(s,s',\alpha)\in \mathrm{M}_2^*\big\}$. В силу связи между функциями $\varphi^*(r,s',\alpha')$ и $\Psi_2^*(r,s,s',\alpha)$ нетрудно заметить, что $\Psi_2^*(r,s,s',\alpha)$ непрерывна и ограничена на множестве $G_0\times\big((P\times P\times I)\backslash\mathscr{M}_2^*\big)$, $\mathscr{M}_2^*\subset P\times P\times I$.

Докажем, что $\mathrm{mes}_5\,\mathscr{M}_2^*=0$. Для этого фиксируем произвольную точку $s=(\theta,\gamma)\in P$ и рассмотрим отображение $F^*(s,s',\alpha)$ при этом s. Иначе говоря, s рассматривается как параметр отображения, действующего на переменные $(s',\alpha)\in P\times I\subset\mathbb{R}^3$ и переводящего их в $P\times I$. Пользуясь равенствами (2.4), запишем и преобразуем якобиан этого отображения:

$$Q=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1^*}{\partial\theta'} & \frac{\partial F_2^*}{\partial\theta'} & \frac{\partial F_3^*}{\partial\theta'}\\ \frac{\partial F_1^*}{\partial\gamma'} & \frac{\partial F_2^*}{\partial\gamma'} & \frac{\partial F_3^*}{\partial\gamma'}\\ \frac{\partial F_1^*}{\partial\alpha} & \frac{\partial F_2^*}{\partial\alpha} & \frac{\partial F_3^*}{\partial\alpha}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & \frac{\partial F_3^*}{\partial\theta'}\\ 0 & 1 & \frac{\partial F_3^*}{\partial\gamma'}\\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3^*}{\partial\alpha}\end{vmatrix}=\frac{\partial F_3^*}{\partial\alpha}=\frac{\partial g^*}{\partial\alpha}.$$

Из равенства (1.1) непосредственно следует, что

$$\frac{\partial g(\omega,\omega',\alpha)}{\partial\alpha}=\frac{1}{(1+\alpha(\omega\cdot\omega'-1))^2}. \tag{2.5}$$

Для $\omega'\in\Omega_{\omega,\alpha}$ легко проследить за справедливостью неравенств:

$$\frac{1}{(1+2\alpha_2)^2}\le\frac{\partial g(\omega,\omega',\alpha)}{\partial\alpha}\le\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2.$$

Благодаря совпадению $\partial g(\omega,\omega',\alpha)/\partial\alpha$ и $\partial g^*(s,s',\alpha)/\partial\alpha$ в соответствующих точках, в последних оценках $\partial g(\omega,\omega',\alpha)/\partial\alpha$ можно заменить на $\partial g^*(s,s',\alpha)/\partial\alpha$. Поэтому $1/(1+2\alpha_2)^2\le Q\le(\alpha_2/\alpha_1)^2$.

Тем самым доказано, что при любом фиксированном s отображение F^* точек (s',α) из $P\times I$ в $P\times I$ имеет ограниченный и отделенный от нуля якобиан. Поэтому оно и ему обратное переводят любое множество меры нуль в множество меры нуль. Рассмотрим сечение $\mathscr{M}_2^*$ элементом s, т. е. $\mathscr{M}_2^*(s)=\big\{(s',\alpha): F^*(s,s',\alpha)\in\mathrm{M}_2^*\big\}$. Так как $\mathscr{M}_2^*(s)$ содержится в прообразе множества меры нуль при отображении $F^*(s,s',\alpha)$ при фиксированном s, то и оно само имеет нулевую меру, т. е. $\mathrm{mes}_3\,\mathscr{M}_2^*(s)=0$. Ввиду того, что любое сечение $\mathscr{M}_2^*(s)$ имеет нулевую меру в $\mathbb{R}^3$, само множество $\mathscr{M}_2^*$ также имеет нулевую меру в $\mathbb{R}^5$. Таким образом, установлено, что $\Psi_2^*(r,s,s',\alpha)$ является непрерывной и ограниченной на $G_0\times\big((P\times P\times I)\backslash\mathscr{M}_2^*\big)$, где $\mathscr{M}_2^*\subset P\times P\times I$, $\mathrm{mes}_5\,\mathscr{M}_2^*=0$.

Теперь рассмотрим подынтегральное выражение в (2.2), т. е. $\Psi=\Psi_1\cdot\Psi_2$. По доказанному функция $\Psi^*(r,s,s',\alpha)$ непрерывна и ограничена на множестве $G_0\times((P\times P\times I)\backslash\mathscr{M}^*)$, где $\mathscr{M}^*=\mathscr{M}_1^*\cup\mathscr{M}_2^*$, $\mathscr{M}^*\subset P\times P\times I$, $\mathrm{mes}_5\,\mathscr{M}^*=0$. Следовательно, для п. в. $(s,\alpha)\in P\times I$ имеем $\mathrm{mes}_2\,\mathscr{M}^*(s,\alpha)=0$, где $\mathscr{M}^*(s,\alpha)$ — сечение множества $\mathscr{M}^*$ элементом (s,α). Иначе говоря, существует множество $\mathrm{M}_3^*\subset P\times I$, $\mathrm{mes}_3\,\mathrm{M}_3^*=0$, такое, что для всех $(s,\alpha)\in(P\times I)\backslash\mathrm{M}_3^*$ имеет место равенство $\mathrm{mes}_2\,\mathscr{M}^*(s,\alpha)=0$. Возьмем любой элемент (r_0,s_0,α_0) и любую сходящуюся к нему последовательность $\{(r_n,s_n,\alpha_n)\}$, $n=1,2,\ldots$, причем

$(r_n, s_n, \alpha_n) \in G_0 \times ((P \times I)\backslash \mathrm{M}_3^*)$, $n = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим последовательность функций $\{\Psi(r_n, s_n, s', \alpha_n)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, от s' и функцию $\Psi(r_0, s_0, s', \alpha_0)$, также зависящую от s'. Так как $\mathrm{mes}_2\, \mathscr{M}^*(s_n, \alpha_n) = 0$, объединение M^* всех $\mathscr{M}^*(s_n, \alpha_n)$ тоже имеет меру нуль в $\mathbb{R}^2$. По построению все элементы (r_n, s_n, s', α_n), $n = 0, 1, \ldots$, принадлежат множеству $G_0 \times ((P \times P \times I)\backslash \mathscr{M}^*)$, если $s' \notin \mathrm{M}^*$. Функция $\Psi(r, s, s', \alpha)$ непрерывна и ограничена на $G_0 \times ((P \times P \times I)\backslash \mathrm{M}^*)$, поэтому $\Psi(r_n, s_n, s', \alpha_n) \to \Psi(r_0, s_0, s', \alpha_0)$, если $s' \notin \mathrm{M}^*$. Иначе говоря, последовательность функций $\Psi(r_n, s_n, s', \alpha_n)$, зависящих от s', сходится п. в. на P к $\Psi(r_0, s_0, s', \alpha_0)$. Очевидно, что эта последовательность ограничена в совокупности. Поэтому применима теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Из сказанного следует непрерывность $(S\varphi)(r, \omega, \alpha)$ на множестве $G_0 \times ((\Omega \times I)\backslash \mathrm{M})$, где M есть образ множества M_3^* при отображении $\omega = \omega(s)$, $\mathrm{M} \subset \Omega \times I$, $\mathrm{mes}_3\, \mathrm{M} = 0$. Ограниченность $(S\varphi)(r, \omega, \alpha)$ на этом же множестве вытекает из подобной ограниченности функции $\Psi(r, \omega, \omega', \alpha)$. Следовательно, $(S\varphi)(x) \in D(X)$. Теорема доказана.

Замечание 2.1. При доказательстве теоремы 2.2, в частности, установлено, что при любой $\varphi(x) \in D(X)$ существует множество $\mathscr{M} \subset \Omega \times \Omega \times I$, $\mathrm{mes}_5\, \mathscr{M} = 0$, такое, что функции $\Psi(r, \omega, \omega', \alpha) = \varphi(r, \omega', g(\omega, \omega', \alpha))$ и $\sigma(r, \omega, \omega', \alpha)$ непрерывны и ограничены на $G_0 \times ((\Omega \times \Omega \times I)\backslash \mathscr{M})$.

Замечание 2.2. Если $f(x)$ — решение задачи (1.2), (1.3), то интеграл столкновений $N(x) = (Sf)(x)$ также принадлежит $D(X)$. Это свойство является очевидным следствием теоремы 2.2. Из теорем 2.1, 2.2 следует, что произведение операторов $B = AS$ действует из $D(X)$ в $D(X)$.

Теорема 2.3. *Для любой степени $n = 1, 2, \ldots$ оператора B справедлива оценка*

$$\|B^n\| \le \frac{(2\pi K d)^n}{n!} \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right)^n, \tag{2.6}$$

где d — диаметр области G, $K = \|\sigma(r, \omega, \omega', \alpha\|_D$.

Доказательство. Фиксируем произвольную функцию $\varphi(x) \in D(X)$ и, пользуясь определениями операторов A и S, подробно запишем выражение $B\varphi$:

$$(B\varphi)(r, \omega, \alpha) = \int\limits_0^{d(r, -\omega)} \exp\big(- \tau(r, \omega, \alpha, t)\big) \times \int\limits_{\Omega_{\omega, \alpha}} \sigma(r - t\omega, \omega', \omega, \alpha) \varphi(r - t\omega, \omega', g(\omega, \omega', \alpha))\, d\omega' dt. \tag{2.7}$$

Сначала для п. в. (r, ω, α) методом математической индукции докажем оценку

$$|(B^n\varphi)(r, \omega, \alpha)| \le \frac{(2\pi K d)^n}{n!} \|\varphi\| \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_2} \right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.8}$$

Будем использовать обозначения $(B^n\varphi)(r, \omega, \alpha) = \Psi_n(r, \omega, \alpha)$, $\widetilde{\Psi}_n(r, \omega, \omega', \alpha) = \Psi_n(r, \omega', g(\omega, \omega', \alpha))$. Поскольку $(B^n\varphi)(x) \in D(X)$, для каждого $n = 0, 1, \ldots$ существует множество $\mathrm{M}_n \subset \Omega \times I$, $\mathrm{mes}_3\, \mathrm{M}_n = 0$, такое, что $(B^n\varphi)(r, \omega, \alpha) = \Psi_n(r, \omega, \alpha)$ ограничена и непрерывна на $G_0 \times ((\Omega \times I)\backslash \mathrm{M}_n)$. Согласно замечанию 2.1 для каждого $n = 0, 1, \ldots$ существует множество $\mathscr{M}_n \subset \Omega \times \Omega \times I$, $\mathrm{mes}_5\, \mathscr{M}_n = 0$, такое, что функция $\widetilde{\Psi}_n(r, \omega, \omega', \alpha)$ ограничена и непрерывна на

$G_0 \times ((\Omega \times \Omega \times I) \backslash \mathscr{M}_n)$. Для почти любой точки $(\omega, \alpha) \in \Omega \times I$ сечение $\mathscr{M}_n(\omega, \alpha)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^2$, т. е. существует множество $\widetilde{\mathrm{M}}_n \subset \Omega \times I, \mathrm{mes}_3\, \widetilde{\mathrm{M}}_n = 0$, такое, что при всех $(\omega, \alpha) \in (\Omega \times I) \backslash \widetilde{\mathrm{M}}_n$ имеет место равенство $\mathrm{mes}_2\, \mathscr{M}_n(\omega, \alpha) = 0$.

Для любой точки $(r, \omega) \in G_0 \times \Omega$ множество тех t, $0 \le t \le d(r, -\omega)$, при которых $r - t\omega \notin G_0$, конечно в силу условия обобщенной выпуклости. Рассмотрим множества

$$\mathrm{M} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\mathrm{M}_n \cup \widetilde{\mathrm{M}}_n\right), \quad \mathscr{M} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{M}_n.$$

Они имеют нулевую меру в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^5$ соответственно. По построению все $(B^n\varphi)$ $(r, \omega, \alpha) = \Psi_n(r, \omega, \alpha)$ ограничены и непрерывны на $G_0 \times ((\Omega \times I) \backslash \mathrm{M})$, а функции $\Psi_n(r, \omega', g(\omega, \omega', \alpha)) = \widetilde{\Psi}_n(r, \omega, \omega', \alpha)$ ограничены и непрерывны на $G_0 \times ((\Omega \times \Omega \times I) \backslash \mathscr{M})$, $n = 0, 1, \ldots$.

Фиксируем произвольную точку $(r, \omega, \alpha) \in G_0 \times ((\Omega \times I) \backslash \mathrm{M})$ и оценим сверху величину $|(B\varphi)(r, \omega, \alpha)|$. При этом в интегралах в (2.7) учитываем только значения $\omega' \in \Omega_{\omega,\alpha} \backslash \mathscr{M}(\omega, \alpha)$ и такие t, что $r - t\omega \in G_0$. Согласно вышесказанному значения подынтегральных функций в (2.7) для остальных значений ω', t не влияют на интегралы. Пользуясь этим соображением и очевидными неравенствами $0 < \exp(-\tau(r, \omega, \alpha, t)) \le 1$, получаем цепочку простых соотношений:

$$|(B\varphi)(r, \omega, \alpha)| \le \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\tau(r, \omega, \alpha, t))$$
$$\times \int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} |\sigma(r - t\omega, \omega, \omega', \alpha)| \cdot |\widetilde{\Psi}_0(r - t\omega', \omega, \omega', \alpha)| \, d\omega' dt$$
$$\le d \cdot K\|\varphi\| \cdot \int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} d\omega' \le d \cdot K\|\varphi\| 2\pi \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_2}\right)$$

$(\widetilde{\Psi}_0(r, \omega, \omega', \alpha) = \varphi(r, \omega', g, (\omega, \omega', \alpha)))$. Отметим, что последнее неравенство получено благодаря использованию леммы 1.2 при $m = 0$, а в предпоследнем учтено неравенство $\|\widetilde{\Psi}_0(r - t\omega, \omega, \omega', \alpha)\|_D \le \|\varphi(x)\|_D$, верное потому, что в левой его части аргументы функции лежат в множестве, где она ограничена и непрерывна.

Тем самым неравенство (2.8) установлено для $n = 1$. Теперь предположим, что оно имеет место при некотором n, и докажем его выполнение для $n + 1$. Имеем

$$|(B^{n+1}\varphi)(r, \omega, \alpha)| = |(B(B^n\varphi))(r, \omega, \alpha)| = \left| \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\tau(r, \omega, \alpha, t)) \right.$$
$$\left. \times \int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} \sigma(r - t\omega, \omega, \omega', \alpha) \Psi_n(r - t\omega, \omega', g(\omega, \omega', \alpha)) \, d\omega' dt \right|.$$

Используя оценку (2.8) и явный вид функции $g(\omega, \omega', \alpha)$, получаем

$$|\Psi_n(r - t\omega, \omega', g(\omega, \omega', \alpha))| \le \frac{(2\pi K d)^n}{n!} \|\varphi\|_D \left(\frac{1}{g(\omega, \omega', \alpha)} - \frac{1}{\alpha_2}\right)^n$$
$$= \frac{(2\pi K d)^n}{n!} \|\varphi\|_D \left(\omega \cdot \omega' - 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_2}\right)^n.$$

Из этих соотношений и из леммы 1.2 выводим

$$|(B\Psi_n)(r,\omega,\alpha)| \le \frac{(2\pi Kd)^n}{n!}\|\varphi\| \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\tau(r,\omega,\alpha,t))$$

$$\times \int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} |\sigma(r-t\omega,\omega,\omega',\alpha)| \left(\omega\cdot\omega' - 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_2}\right)^n d\omega' dt$$

$$\le \frac{(2\pi Kd)^n}{n!}\|\varphi\| \frac{d\cdot K\cdot 2\pi}{n+1}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha_2}\right)^{n+1} = \frac{(2\pi Kd)^{n+1}}{(n+1)!}\|\varphi\|\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha_2}\right)^{n+1},$$

что и доказывает верность неравенства (2.8) для любого $n, n = 1, 2, \ldots$. В силу неравенства $\alpha > \alpha_1$, произвольности $\varphi(x) \in D(x)$ и точки $(r,\omega,\alpha) \in G_0 \times ((\Omega \times I)\backslash \mathrm{M})$ из (2.8) легко получаем неравенство (2.6). Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Существует n такое, что $\|B^n\| < 1$.*

Наряду с краевой задачей (1.2), (1.3) будем рассматривать следующее операторное уравнение:

$$f(x) = (Bf)(x) + (AJ)(x) + f_0(x), \tag{2.9}$$

где $f_0(r,\omega,\alpha) = h(r - d(r,-\omega)\omega,\omega,\alpha)\exp(-\tau(r,\omega,\alpha))$, $B = AS$.

Функцию $f(x) \in D(X)$ будем называть *решением уравнения* (2.9), если существует $\mathrm{M} \subset \Omega\times I$, $\mathrm{mes}_3\,\mathrm{M} = 0$, такое, что $f(r,\omega,\alpha)$ непрерывна и ограничена на $G_0 \times ((\Omega\times I)\backslash \mathrm{M})$ и на этом же множестве $f(x)$ обращает (2.9) в тождество.

Напомним, что $P = N + J$, где $N(r,\omega,\alpha)$ — интеграл столкновений, и распишем уравнение (2.9) более подробно:

$$f(r,\omega,\alpha) = h(r - d(r,-\omega)\omega,\omega,\alpha)\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,-\omega)} \mu(r-\nu\omega,\alpha)\,d\nu\right)$$

$$+ \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp\left(-\int\limits_0^{t'} \mu(r-\nu\omega,\alpha)\,d\nu\right) P(r-t'\omega,\omega,\alpha)\,dt'. \tag{2.10}$$

Теорема 2.4. *Для того чтобы функция $f(x)$ была решением краевой задачи* (1.2), (1.3), *необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была решением уравнения* (2.9) *в пространстве $D(X)$.*

Доказательство. Будем использовать уравнение (2.9) в более подробной записи (2.10). Любая точка $(r,\omega) \in G_0\times\Omega$ позволяет определить единственным образом точку $(\xi,\omega)\in\Gamma^-$ по формуле $\xi = r - d(r,-\omega)\omega$, и, обратно, любая точка $(\xi + t\omega,\omega)$ при таких t, что $\xi + t\omega \in G_0$, определяет единственным образом точку $(r,\omega)\in G_0\times\Omega$. При этом $t = d(r,-\omega)$. Пользуясь этим соображением, запишем (2.10) в эквивалентном виде, более удобном для доказательства:

$$f(\xi+t\omega,\omega,\alpha) = h(\xi,\omega,\alpha)\exp\left(-\int\limits_0^{t}\mu(\xi+\nu\omega,\alpha)\,d\nu\right)$$

$$+\int\limits_0^t \exp\left(-\int\limits_{t'}^{t}\mu(\xi+\nu\omega,\alpha)\,d\nu\right) P(\xi+t'\omega,\omega,\alpha)\,dt'. \tag{2.11}$$

Отметим, что при переходе от (2.10) к (2.11) сделаны замены типа сдвига тех переменных, по которым производится интегрирование в (2.10).

Достаточность. Пусть $f(x)$ является решением (2.11). Поскольку $f(x) \in D(X)$, существует множество $\mathrm{M}_1 \subset \Omega\times I$, $\mathrm{mes}_3\, \mathrm{M}_1 = 0$, такое, что $f(r,\omega,\alpha)$ ограничена и непрерывна на $G_0 \times ((\Omega \times I)\backslash \mathrm{M}_1)$. По теореме 2.2 функция $P(r,\omega,\alpha)$ также принадлежит $D(X)$, так как $P(x) = (Sf)(x) + J(x)$, т. е. существует $\mathrm{M}_2 \subset \Omega \times I$, $\mathrm{mes}_3\, \mathrm{M}_2 = 0$ такое, что $P(r,\omega,\alpha)$ ограничена и непрерывна на $G_0 \times ((\Omega \times I)\backslash \mathrm{M}_2)$. По условию $h_1(r,\omega,\alpha)$ ограничена и непрерывна на $G_0 \times ((\Omega \times I)\backslash \mathrm{M}_3)$, $\mathrm{M}_3 \subset \Omega \times I$, $\mathrm{mes}_3\, \mathrm{M}_3 = 0$. Наконец, функции $\tau(r,\omega,\alpha)$ и $\tau(r,\omega,\alpha,t)$ ограничены и непрерывны на $G_0\times((\Omega\times I)\backslash \mathrm{M}_4)$, $\mathrm{M}_4 \subset \Omega\times I$, $\mathrm{mes}_3\, \mathrm{M}_4 = 0$, при всех t, $0 \le t \le d(r,-\omega)$. Рассмотрим множество $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 \cup \mathrm{M}_2 \cup \mathrm{M}_3 \cup \mathrm{M}_4$. По построению $\mathrm{M} \subset \Omega\times I$, $\mathrm{mes}_3\, \mathrm{M} = 0$, и функции $f(r,\omega,\alpha)$, $P(r,\omega,\alpha)$, $h_1(r,\omega,\alpha)$, $\tau(r,\omega,\alpha)$, $\tau(r,\omega,\alpha,t)$ ограничены и непрерывны на $G_0 \times ((\Omega \times I)\backslash \mathrm{M})$ при всех t.

Фиксируем произвольную точку (ξ,ω,α) такую, что $(\xi,\omega) \in \Gamma^-$, $(\omega,\alpha) \in (\Omega \times I)\backslash \mathrm{M}$. Выполнение краевого условия (1.3) очевидным образом получается из (2.11) при $t = 0$. Отсюда видно, что для всех t при условии $\xi + t\omega \in G_0$ возможно дифференцирование по t обеих частей (2.11) и оно осуществляется по классическим правилам, поскольку подынтегральные функции непрерывны при всех ν, t', кроме конечного числа их значений. Соответственно имеем следующее легко проверяемое тождество:

$$
\begin{aligned}
(lf)(\xi + t\omega,\omega,\alpha) &= P(\xi + t\omega,\omega,\alpha) + \mu(\xi + \nu\omega,\alpha) f(\xi + t\omega,\omega,\alpha) \\
&\quad - \mu(\xi + t\omega,\omega,\alpha)\left(h(\xi,\omega,\alpha)\exp\left(-\int\limits_0^t \mu(\xi + \nu\omega,\alpha)\,d\nu\right)\right. \\
&\quad \left. + \int\limits_0^t \exp\left(-\int\limits_{t'}^t \mu(\xi + \nu\omega,\alpha)\,d\nu\right) P(\xi + t'\omega,\omega,\alpha)dt'\right).
\end{aligned}
$$

Подставив в правую часть последнего равенства представление (2.11) для $f(\xi + t\omega,\omega,\alpha)$, получим $(lf)(\xi + t\omega,\omega,\alpha) = P(\xi + t\omega,\omega,\alpha)$. Тем самым установлены выполнение уравнения (1.2) для $f(\xi+t\omega,\omega,\alpha)$, а также принадлежность $f(x)$ и $(lf)(x)$ пространству $D(X)$. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $f(x)$ является решением краевой задачи (1.2), (1.3). По условию $f(x)$, $(lf)(x)$ принадлежат $D(X)$. Аналогично тому, как это делалось при доказательстве достаточности, можно считать, что существует $\mathrm{M} \subset \Omega\times I$, $\mathrm{mes}_3\, \mathrm{M} = 0$, такое, что все функции $f(r,\omega,\alpha)$, $(lf)(r,\omega,\alpha)$, $h_1(r,\omega,\alpha)$, $\tau(r,\omega,\alpha)$, $\tau(r,\omega,\alpha,t)$ ограничены и непрерывны на $G_0((\Omega \times I)\backslash \mathrm{M})$ при всех t, $0 \le t \le d(r,-\omega)$. Фиксируем (ξ,ω,α), $(\xi,\omega) \in \Gamma^-$, $(\omega,\alpha) \in (\Omega \times I)\backslash \mathrm{M}$ и рассмотрим $f(\xi + t'\omega,\omega,\alpha)$. По условию для всех t' таких, что $r - t'\omega \in G_0$, имеем

$$
\frac{d}{dt'} f(\xi + t'\omega,\omega,\alpha) + \mu(\xi + t'\omega,\alpha) f(\xi + t'\omega,\omega,\alpha) = P(\xi + t'\omega,\omega,\alpha).
$$

Умножим последнее равенство на $\exp(\tau(\xi,-\omega,\alpha,t')$ и проинтегрируем по $t' \in (0,t)$ при условии $\xi + t\omega \in G_0$. Значения интегрируемых функций при конечном множестве значений t' таких, что $\xi + t'\omega \in \partial G_0$, не оказывают влияния на интеграл. В результате получим

$$\int_0^t \exp\left(\int_0^{t'} \mu(\xi+\nu\omega,\alpha)\,d\nu\right) \frac{d}{dt'} f(\xi+t'\omega,\omega,\alpha)\,dt' \\ + \int_0^t \mu(\xi+t'\omega,\alpha) \exp\left(\int_0^{t'} \mu(\xi+\nu\omega,\alpha)\,d\nu\right) \cdot f(\xi+t'\omega,\omega,\alpha)\,dt' \\ = \int_0^t \exp\left(\int_0^{t'} \mu(\xi+\nu\omega,\alpha)\,d\nu\right) P(\xi+t'\omega,\omega,\alpha)\,dt'.$$

В первом интеграле в левой части последнего равенства, выполняя интегрирование по частям и используя краевое условие $f(\xi,\omega,\alpha) = h(\xi,\omega,\alpha)$, получаем

$$\exp\left(\int_0^t \mu(\xi+\nu\omega,\alpha)\,d\nu\right) f(\xi+t\omega,\omega,\alpha) - h(\xi,\omega,\alpha) \\ = \int_0^t \exp\left(\int_0^{t'} \mu(\xi+\nu\omega,\alpha)\,d\nu\right) P(\xi+t'\omega,\omega,\alpha)\,dt'.$$

Перенося $h(\xi,\omega,\alpha)$ в правую часть и умножая равенство на $\exp(-\tau(\xi,-\omega,\alpha,t))$, приходим к (2.11). Тем самым необходимость и вместе с тем теорема доказаны.

Теорема 2.5. *Краевая задача* (1.2), (1.3) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Согласно теореме 2.4 краевая задача (1.2), (1.3) эквивалента уравнению (2.9). Обозначим $u(x) = (AJ)(x) + f_0(x)$ и $(T\varphi)(x) = (B\varphi)(x) + u(x)$ и запишем уравнение (2.9) в виде

$$f(x) = (Tf)(x). \tag{2.12}$$

Ясно, что оператор T действует из $D(X)$ в $D(X)$ и его произвольная степень имеет вид

$$(T^n\varphi)(x) = (B^n\varphi)(x) + (B^{n-1}u)(x) + \cdots + (Bu)(x) + u(x), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Подчеркнем, что в задаче (1.2), (1.3) $u(x)$ — известная функция из пространства $D(X)$. Отсюда следует, что для любых $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ из $D(X)$ имеет место неравенство

$$\|(T^n\varphi_1)(x) - (T^n\varphi_2)(x)\|_D \le \|B^n\| \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|_D.$$

Согласно следствию 2.1 существует такое натуральное число n, что $\|B^n\| < 1$. Поэтому, обозначив $\|B^n\| = q$, запишем

$$\|(T^n\varphi_1)(x) - (T^n\varphi_2)(x)\|_D \le q\|\varphi_1 - \varphi_2\|_D, \quad 0 < q < 1,$$

т. е. оператор T^n является сжимающим. Отсюда на основании теоремы о неподвижной точке для сжимающих операторов, переводящих банахово пространство в себя, следует, что уравнение $f(x) = (T^nf)(x)$ имеет единственное решение в $D(X)$. Пользуясь этой же теоремой, заключаем, что и уравнение (2.12) имеет то же самое единственное решение. Тем самым теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аниконов Д. С., Коновалова Д. С.* Кинетическое уравнение переноса для случая комптоновского рассеяния // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 5. С. 9877–1001.
2. *Дэвисон Б.* Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1960.
3. *Марчук Г. И., Лебедев В. И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1981.
4. *Михайлов Г. А.* Весовые методы Монте-Карло. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
5. *Владимиров В. С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. МИАН СССР. 1961. № 61. С. 3–158.
6. *Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров И. В.* Использование уравнение переноса в томографии. М.: Логос, 2000.
7. *Гермогенова Т. А.* Локальные свойства решения уравнения переноса. М.: Наука, 1986.

Статья поступила 10 октября 2003 г.

Аниконов Дмитрий Сергеевич, *Коновалова Дина Сергеевна*
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
anik@math.nsc.ru