Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2005. Том 46, № 3

УДК 517.972

ТЕОРЕМЫ О ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ И РЕЛАКСАЦИИ ДЛЯ ИНТЕГРАНДОВ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ БЫСТРОГО РОСТА

М. А. Сычёв

Аннотация: Доказаны теоремы о полунепрерывности снизу и о виде полунепрерывной снизу оболочки интегральных функционалов с интеграндами L, имеющими быстрый рост на бесконечности, т. е. когда $c_1G(|Du|) + c_2 \leq L \leq c_3G(|Du|) + c_4$, где $c_3 \geq c_1 > 0$, а $G : [0,\infty[\to [0,\infty[$ является выпуклой возрастающей функцией такой, что $vG'(v)/G(v) \to \infty$ при $v \to \infty$ и возрастает при больших v. Как и в случае стандартного роста (т. е. когда $G(\cdot) = |\cdot|^p$), квазивыпуклость интеграндов характеризует полунепрерывность снизу интегральных функционалов, а их квазиовыпукления задают интегральные функционалы, являющиеся полунепрерывными снизу оболочками исходных.

Ключевые слова: меры Янга, полунепрерывность снизу, полунепрерывные снизу оболочки, интегранды с быстрым ростом, квазивыпуклость.

§ 1. Введение

Цель данной работы — инициировать изучение вопросов о полунепрерывности снизу и о виде полунепрерывной снизу оболочки интегральных функционалов в условиях нестандартного роста интеграндов L. Напомним, что под стандартным ростом L подразумевается, что

$$c_1|Du|^p + c_2 \leq L(x,u,Du) \leq c_3|Du|^p + c_4, \quad c_3 \geq c_1 > 0,\ p > 1.$$

Одной из причин такого исследования является необходимость дальнейшего изучения задач математической теории упругости. В случае, когда допустимые деформации далеки от тождественной, теоремы существования были получены впервые в [1] для материалов, функционалы энергии которых имеют поливыпуклые интегранды. Под поливыпуклостью подразумеваем, что

$$L = \widetilde{L}(Du, \operatorname{Adj} Du, \det Du), \quad L(\cdot) \geq \alpha|\cdot|^{n+\varepsilon} + \beta,$$

где $\alpha, \varepsilon > 0$, $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $\widetilde{L}$ — выпуклая функция своих аргументов. При этом $\operatorname{Adj} Du$ — матрица младших миноров Du. Так как $u \to \det Du$ является градиентно свободным полем (см. [2]), интеграл по любой области от Du совпадает для функций $u \in W^{1,n+\varepsilon}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ с одинаковыми граничными данными. Как следствие, функционал

$$u \to \int\limits_U \det Du$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00162).

является непрерывным относительно слабой сходимости последовательностей в $W^{1,n+\varepsilon}$ для любой подобласти $U \subset \Omega$, где здесь и далее Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей. Тогда для любой слабо сходящейся последовательности u_k выполнено

$$w_k := (Du_k, \operatorname{Adj} Du_k, \det Du_k) \rightharpoonup w_0 := (Du_0, \operatorname{Adj} Du_0, \det Du_0)$$

(здесь и далее «$\rightharpoonup$» будет обозначать слабую сходимость). Выпуклость $\widetilde{L}$ является достаточным свойством для полунепрерывности снизу функционала

$$\int_\Omega \widetilde{L}(w_k(x))\, dx$$

относительно такой сходимости (см. [3, 4]). Таким образом, задача минимизации функционала

$$J(u) = \int_\Omega L(x, u(x), Du(x))\, dx \tag{1.1}$$

в классе функций

$$u|_{\partial\Omega} = f \tag{1.2}$$

будет иметь решение, если есть хотя бы одна функция $u \in W^{1,n+\varepsilon}$, удовлетворяющая (1.2) и такая, что $J(u) < \infty$ [1]. Для получения этого результата достаточно заметить, что любая последовательность, минимизирующая функционал в классе допустимых функций, является слабо компактной в $W^{1,n+\varepsilon}$, т. е. содержит подпоследовательность, которая сходится слабо в этом пространстве.

Разумеется, кроме возможности выделить слабо сходящуюся минимизирующую последовательность достаточно полунепрерывности снизу относительно этой сходимости. Именно эту трудность и удалось впервые преодолеть, рассмотрев поливыпуклые интегранды. В то же время далеко не все, даже изотропные, энергии имеют такое представление (см. [5]) и, что более интригующе, энергии (1.1), типичные для твердотельных фазовых переходов (см. [6]), не являются полунепрерывными снизу.

Исследования в этой области развивались в следующем порядке. Еще в 1952 г. Морри показал, что в случае непрерывных интеграндов (1.1) условием, необходимым и достаточным для полунепрерывности снизу функционалов относительно слабой* сходимости в $W^{1,\infty}$, является так называемая квазивыпуклость по Du [7]. Функция $F : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ называется *квазивыпуклой в точке* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, если и только если

$$\int_\Omega F(A + D\phi(x))\, dx \geq F(A) \operatorname{meas} \Omega \quad \forall \phi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m).$$

Нетрудно показать, что это неравенство выполнено для всех областей Ω обсуждаемого в данной статье типа одновременно (см. [7]). Однако это условие не локально в отличие от условия выпуклости (см. [8]). Поэтому поведение на бесконечности существенно, как показывают контрпримеры [9, 10].

Ачерби и Фуско первыми показали, что при условии стандартного роста квазивыпуклость интегранда по Du характеризует наличие у функционала (1.1) свойства полунепрерывности снизу. Хотя вопрос о получении этого результата для другого класса интеграндов неоднократно поднимался в литературе (см., например, [9, 11–14]), нахождение таких классов оказалось проблематичным.

В этой работе мы устанавливаем результат в случае интеграндов с быстрым ростом.

Напомним, что $L(x,u,v) : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ является *интеграндом Каратеодори*, если $L(x,\cdot,\cdot)$ непрерывна при почти всех x и $L(\cdot,u,v)$ измерима для всех u,v. Хорошо известно, что L является интеграндом Каратеодори, если и только если для каждого $\varepsilon > 0$ существует компактное подмножество Ω_ε множества Ω такое, что $\operatorname{meas}(\Omega\setminus\Omega_\varepsilon) \le \varepsilon$ и сужение L на множество $\Omega_\varepsilon \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n}$ непрерывно (см., например, [14]).

Говорят, что $L : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ *имеет быстрый рост*, если

$$c_1 G(|Du|) + c_2 \le L(x,u,Du) \le c_3 G(|Du|) + c_4, \quad c_3 \ge c_1 > 0, \tag{1.3}$$

с выпуклой $G : [0,\infty) \to [0,\infty)$ такой, что $vG'(v)/G(v) \to \infty$ при $v \to \infty$ и возрастает при больших v.

Теорема 1.1. *Пусть $L(x,u,v) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ является интеграндом Каратеодори и удовлетворяет неравенствам* (1.3).

Тогда функционал $u \to J(u)$ полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости в $W^{1,p}$, $p > 1$, если и только если интегранд L является квазивыпуклым относительно v для п. в. $x \in \Omega$ и для всех $u \in \mathbb{R}^m$.

Теоремы существования, разумеется, не обязаны опираться только на свойство полунепрерывности снизу функционалов. Подход, использующий интегральные представления полунепрерывной снизу оболочки, был предложен Н. Н. Боголюбовым еще в [15].

Нетрудно показать, что полунепрерывная снизу оболочка функционала J, определенная как

$$\widetilde{J}(u) = \inf_{u_k \rightharpoonup u} \liminf_{k\to\infty} J(u_k),$$

полунепрерывна снизу. В одномерном случае Н. Н. Боголюбов показал, что $\widetilde{J}$ есть также интегральный функционал с интеграндом L^c, при этом график $L^c(x,u,\cdot)$ является овыпуклением графика $L(x,u,\cdot)$ для п. в. $x \in \Omega$ и всех $u \in \mathbb{R}^m$. Таким образом, теорема об интегральном представлении оболочки сводит проблему решения изначальной задачи к поиску такого решения новой задачи, что интегранды совпадают вдоль его графика.

Естественно было ожидать, что в общем случае квазиовыпукление интегранда L, определяемое как

$$L^{qc}(A) = \inf_{\phi \in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)} \frac{1}{\operatorname{meas}\Omega} \int_\Omega L(A + D\phi(x))\, dx,$$

будет интеграндом полунепрерывной снизу оболочки исходного функционала J, по крайней мере относительно слабой* сходимости в $W^{1,\infty}$, что и было установлено в [14] (см. также [16]).

Однако расширение этого результата на класс функций, дающий функционалу конечное значение, оказалось проблематичным. Ачерби и Фуско впервые доказали этот результат в [17] в условиях стандартного роста и при некоторых дополнительных ограничениях на поведение по (x,u). Ограничения были сняты нами в [18]. Близкий результат получен также в [19]. Однако понадобилась существенно другая техника, использующая теорию градиентных мер Янга (см. [20–22]). Возможно развить подход, предложенный в [18], также для получения результата в случае интеграндов с быстрым ростом.

Теорема 1.2. *Пусть $L(x,u,v):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}$ является интеграндом Каратеодори, для которого выполнены неравенства* (1.3)*. Пусть также*

$$L^{qc}(x,u,v_0):=\inf_{\phi\in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)}\frac{1}{\operatorname{meas}\Omega}\int\limits_\Omega L(x,u,v_0+D\phi(y))\,dy,$$

$$J^{qc}(u):=\int\limits_\Omega L^{qc}(x,u(x),Du(x))\,dx.$$

Тогда L^{qc} удовлетворяет тем же оценкам (1.3)*, что и L, и также является интеграндом Каратеодори, а функция $v\to L^{qc}(x,u,v)$ квазивыпукла для п. в. $x\in\Omega$ и для всех $u\in\mathbb{R}^m$.*

Если $u_k\rightharpoonup u_0$ в $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, то $\liminf\limits_{k\to\infty}J(u_k)\geq J^{qc}(u_0)$. Более того, если $J^{qc}(u_0)<\infty$, то существует последовательность $u_k\in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ такая, что $u_k\rightharpoonup u_0$ в $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, $p>1$, и $J(u_k)\to J^{qc}(u_0)$.

Замечания 1.3. 1. Из доказательства теоремы 1.2 вытекает, что если L непрерывна, то L^{qc} также непрерывна.

2. Вторая часть теоремы и теорема 1.1 позволяют утверждать, что J^{qc} является полунепрерывной снизу оболочкой функционала J.

3. Для построения последовательности u_k, равной u_0 на границе, были бы полезны теоремы о продолжении функций u с конечной энергией, т. е. когда $J(u)<\infty$, на более широкие множества, на которых функционал все еще принимает ограниченные значения.

Нелишне напомнить, что особый интерес вызывают расширения результатов теорем 1.1, 1.2 на класс функционалов, соответствующих изотропным энергиям, т. е. когда L зависит только от главных инвариантов Du^tDu и удовлетворяет оценке $L(\cdot)\geq\alpha|\cdot|^{n+\varepsilon}+\gamma$, $\alpha>0$. Возможно, что в таком случае другие ограничения на рост L не будут так существенны. Ряд проблем квазиконформного анализа, сводимых к таким задачам, перечислен в [23–25]. Пока известны только частичные технические результаты (см. [26–29]).

В § 2 мы кратко излагаем общую теорию мер Янга, следуя нашему подходу, впервые изложенному в [18]. Благодаря ему нам удалось получить результаты работы [18] и охарактеризовать однородные градиентные меры Янга в случае произвольных интеграндов (см. [30]). Благодаря последнему результату удалось получить теорему о полунепрерывных снизу оболочках в скалярном случае для интеграндов $L(x,u,\cdot)\geq\alpha|\cdot|^{n+\varepsilon}+\beta$, $\alpha>0$ [31]; этот результат можно использовать также вместо леммы 3.5. Сам подход позволяет иначе изложить и теорию мер Янга (см. [32] и см. препринтную версию [33] работы [18] для этого изложения).

В данной работе мы используем следующие обозначения: Ω является липшицевой областью, $B(a,\varepsilon)$ обозначает шар с центром в точке a и с радиусом ε, $\langle L;\nu\rangle$ обозначает действие меры ν на интегранд L, l_F является аффинной функцией с градиентом, равным F.

§ 2. Общая теория мер Янга

Напомним определение мер Янга (см. [34]), стандартное в наши дни.

Определение 2.1. Семейство $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ вероятностных мер $\nu_x\in C_0(\mathbb{R}^l)'$ называется *мерой Янга*, если существует последовательность измеримых функций $\xi_k:\Omega\to\mathbb{R}^l$ такая, что для каждого $\Phi\in C_0(\mathbb{R}^l)$

$$\Phi(\xi_k)\rightharpoonup^*\overline{\Phi}\quad\text{в } L^\infty(\Omega),\quad\text{где }\overline{\Phi}(x)=\langle\Phi;\nu_x\rangle$$

(здесь и далее $\langle \Phi; \nu \rangle$ обозначает действие меры ν на функцию Φ).

Мера Янга является однородной, если для всех x выполнено $\nu_x = \nu$ для некоторой вероятностной меры ν.

Напомним, что каждая достаточно регулярная последовательность измеримых функций содержит подпоследовательность, порождающую меру Янга (см. теорему 2.8).

Ясно, что объекты, предельные к мерам Янга, если они существуют, должны также быть мерами Янга (см. теорему 2.7 для данного результата). Более того, любой интегральный функционал полунепрерывен снизу относительно такой сходимости [18] (в данной работе достаточно будет использовать теорему 2.2).

Теорема 2.2. *Пусть Ω — ограниченное измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$ и $L(x,v) : \Omega \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ — ограниченный снизу интегранд Каратеодори. Предположим, что существует последовательность измеримых функций $\xi_i : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$, порождающая меру Янга $(\nu_x)_{x\in\Omega}$.*

Тогда

$$\liminf_{i\to\infty} \int\limits_{\Omega} L(x, \xi_i(x))\, dx \ge \int\limits_{\Omega} \langle L(x,\cdot); \nu_x \rangle\, dx.$$

Более того,

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_{\Omega} L(x, \xi_i(x))\, dx \to \int\limits_{\Omega} \langle L(x,v); \nu_x \rangle\, dx < \infty,$$

если и только если функции $L(\cdot, \xi_i(\cdot))$, $i \in \mathbb{N}$, являются равномерно суммируемыми. В этом случае $L(\cdot,\xi_i(\cdot)) \rightharpoonup \langle L(\cdot,v); \nu_{(\cdot)} \rangle$ в L^1.

Таким образом, всегда можно расширить класс обычных функций до класса мер Янга, сохраняя результат о компактности последовательности мер Янга, на которых функционал ограничен некоторой константой и полунепрерывен снизу. *Данные результаты создают предпосылку для использования мер Янга в получении теорем о полунепрерывной снизу оболочке.* Однако для осуществления этой схемы надо было найти более подходящий аппарат для работы с мерами Янга $\nu_x : \Omega \to \mathbb{R}$, чем традиционный подход, основанный на рассмотрении их как элементов пространства, дуального к $L_1(\Omega; C_0(\mathbb{R})')$, и на теории банаховых пространств (см. [35–37]). Заметим, что сам новый аппарат позволяет также по-другому построить теорию мер Янга (см. [32, 33]).

Напомним, что слабая* сходимость элементов множества $M_c(\mathbb{R}^l)$, являющегося множеством всех мер Радона с носителем в $\mathbb{R}^l$ и с вариацией, ограниченной c, эквивалентна сходимости в следующей метрике:

$$\rho(\mu,\nu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i \|\Phi_i\|_C} |\langle \Phi_i; \mu \rangle - \langle \Phi_i; \nu \rangle|,$$

где $\{\Phi_i\}$ является последовательностью, задающей плотное множество элементов пространства

$$C_0(\mathbb{R}^l) = \{\Phi \in C(\mathbb{R}^l) : \lim_{v\to\infty} |\Phi(v)| = 0\}.$$

Хорошо известно, что $(M_c(\mathbb{R}^l), \rho)$ является компактным метрическим пространством. Этот факт легко вытекает из теоремы Рисса. Для любой последовательности $\mu_n \in M_c(\mathbb{R}^l)$ существует подпоследовательность μ_{n_k} такая, что последовательность $\langle \Phi_i; \mu_{n_k} \rangle$ сходится для каждого $i \in \mathbb{N}$. Тогда функционал $f : C_0(\mathbb{R}^l) \to \mathbb{R}$, определенный для каждой функции Φ_i как

$$f(\Phi_i) := \lim_{k\to\infty} \langle \Phi_i; \mu_{n_k} \rangle,$$

является линейным непрерывным функционалом, ограниченным по норме константой c. По теореме Рисса $f(\cdot) = \langle \cdot; \mu \rangle$ для некоторой $\mu \in M_c(\mathbb{R}^l)$. Тогда $\rho(\mu_{n_k}, \mu) \to 0$ при $k \to \infty$.

Метрика ρ характеризует меры Янга!

Теорема 2.3. *Семейство вероятностных мер $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ является мерой Янга, если и только если функция $\nu : \Omega \to (M_c, \rho)$ измерима* (здесь $c \geq 1$).

В свою очередь, измеримые функции $\nu : \Omega \to M_c$ обладают рядом полезных свойств, которые позволяют эффективно с ними работать.

1. Заметим, что сходимость $\langle \Phi; \nu^k_{(\cdot)} \rangle \rightharpoonup^* \langle \Phi; \nu_{(\cdot)} \rangle$ в L^∞ означает сходимость интегралов $\int_{\widetilde{\Omega}} \langle \Phi; \nu^k_x \rangle \, dx$ к интегралу $\int_{\widetilde{\Omega}} \langle \Phi; \nu_x \rangle \, dx$ для всех измеримых подмножеств $\widetilde{\Omega}$ множества Ω. С другой стороны, функционал

$$\Phi \to (1/\operatorname{meas} \widetilde{\Omega}) \int_{\widetilde{\Omega}} \langle \Phi; \nu_x \rangle \, dx$$

является действием меры Радона на функции Φ (эта мера обычно обозначается через $\operatorname{Av}(\nu_x)_{x\in\widetilde{\Omega}}$):

$$\langle \Phi; \operatorname{Av}(\nu_x)_{x\in\widetilde{\Omega}} \rangle := \frac{1}{\operatorname{meas} \widetilde{\Omega}} \int_{\widetilde{\Omega}} \langle \Phi; \nu_x \rangle \, dx \quad \forall \Phi \in C_0(\mathbb{R}^l).$$

Для сравнения действий семейств мер $(\nu^1_x)_{x\in\widetilde{\Omega}}$ и $(\nu^2_x)_{x\in\widetilde{\Omega}}$ мы должны сравнить расстояние между мерами $\operatorname{Av}(\nu^1_x)_{x\in\widetilde{\Omega}}$ и $\operatorname{Av}(\nu^2_x)_{x\in\widetilde{\Omega}}$ в метрике ρ. Следующее предложение дает подходящие *количественные оценки*. В лемме 2.4 мы рассматриваем случай семейства мер Радона, являющихся элементами множества $M_c(\mathbb{R}^l)$. В этом случае среднее Av также является элементом множества $M_c(\mathbb{R}^l)$.

Лемма 2.4. *Пусть $\nu^1, \nu^2 : \Omega \to (M_c, \rho)$ являются измеримыми функциями.*

1. *Если $\rho(\operatorname{Av}(\nu^1_x)_{x\in\widetilde{\Omega}}, \operatorname{Av}(\nu^2_x)_{x\in\widetilde{\Omega}}) \leq \delta$ с $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ таким, что $\operatorname{meas}(\Omega \setminus \widetilde{\Omega}) \leq \delta \operatorname{meas} \Omega$, то $\rho(\operatorname{Av}(\nu^1_x)_{x\in\Omega}, \operatorname{Av}(\nu^2_x)_{x\in\Omega}) \leq (2c+1)\delta$.*

2. *Если $\rho(\nu^1_x, \nu^2_x) \leq \delta$ для п. в. $x \in \widetilde{\Omega} \subset \Omega$ с $\operatorname{meas}(\Omega \setminus \widetilde{\Omega}) \leq \delta \operatorname{meas} \Omega$, то $\rho(\operatorname{Av}(\nu^1_x)_{x\in\Omega}, \operatorname{Av}(\nu^2_x)_{x\in\Omega}) \leq (2c+1)\delta$.*

Другие два свойства мер Янга верны для любых измеримых функций со значениями в компактном метрическом пространстве.

2. Вторым свойством является свойство Лузина таких функций.

Теорема 2.5. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество и (K, d) — компактное метрическое пространство. Функция $\xi : \Omega \to (K, d)$ измерима в обычном лебеговском смысле, если и только если она имеет свойство Лузина: для каждого $\varepsilon > 0$ существует компактное подмножество Ω_ε множества Ω такое, что $\operatorname{meas}(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) \leq \varepsilon$ и функция $\xi|_{\Omega_\varepsilon}$ непрерывна.*

Доказательство этой теоремы мало отличается от доказательства в случае, когда K — подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой.

3. Третьим свойством является версия теоремы об измеримых селекторах, доказанная впервые в [38] (более общие варианты подобных утверждений могут быть найдены в [39]). Этот ингредиент новой концепции позволяет связать однородные и неоднородные случаи.

Пусть Ω — ограниченное измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$ и (K, d) — компактное метрическое пространство. Отображение $V : \Omega \to 2^K$ называется *замкнутым измеримым многозначным отображением*, если множества $V(x) \subset K$ являются замкнутыми для п. в. $x \in \Omega$ и для каждого замкнутого подмножества C пространства K множество $\{x \in \Omega : V(x) \cap C \neq \varnothing\}$ измеримо.

Теорема 2.6. *Для любого замкнутого измеримого многозначного отображения $V : \Omega \to 2^K$ существует измеримый селектор, т. е. функция $\nu : \Omega \to (K, d)$ такая, что $\nu(x) \in V(x)$ для п. в. $x \in \Omega$.*

Далее данные свойства будут постоянно использоваться. На их основе можно также доказать результат о компактности, который влечет теорему существования.

Теорема 2.7 (компактность). *Пусть Ω — измеримое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$ и $\nu^k : \Omega \to (M_c, \rho)$, $k \in \mathbb{N}$, — измеримые функции. Тогда существуют подпоследовательность $\left(\nu_x^k\right)_{x \in \Omega}$ (индексация сохраняется) и функция $\nu : \Omega \to (M_c, \rho)$ такие, что $\left\langle \Phi; \nu_{(\cdot)}^k \right\rangle \rightharpoonup^* \langle \Phi; \nu_{(\cdot)} \rangle$ в $L^\infty(\Omega)$ для каждого $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^l)$.*

Теорема 2.8 (существование). *Пусть $\theta : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция такая, что $\theta(v) \to \infty$ при $|v| \to \infty$, и пусть $\xi_k : \Omega \to \mathbb{R}$ — последовательность измеримых функций такая, что*

$$\int\limits_\Omega \theta(\xi_k(x))\, dx \leq c < \infty, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда ξ_k содержит подпоследовательность, порождающую меру Янга.

Доказательства теорем 2.8, 2.2 приведены, например, в [35, 40].

§ 3. Главные вспомогательные результаты

В этом параграфе будут получены вспомогательные результаты, которые нам понадобятся при доказательстве теорем 1.1, 1.2.

Предложение 3.1. *Пусть G имеет быстрый рост на бесконечности* (см. (1.3)). *Тогда $G(v)/|v|^p \to \infty$ при $|v| \to \infty$ для любого $p > 1$.*

Доказательство. Напомним: (1.3) означает, что $G : [0, \infty[\to [0, \infty[$ является возрастающей выпуклой функцией с $vG'(v)/G(v) \to \infty$ при $v \to \infty$. Для каждого $p > 1$ существует $v_0 > 0$ такое, что

$$\frac{vG'(v)}{G(v)} \geq 2p, \quad v \geq v_0.$$

Решая данное дифференциальное неравенство, получаем $G(v) \geq v^{2p} + c$ с некоторым $c \in \mathbb{R}$. В частности, $G(v)/|v|^p \to \infty$ при $v \to \infty$, что и доказывает утверждение. $\square$

Далее мы будем использовать следующую версию теоремы Витали о покрытиях.

Семейство G замкнутых подмножеств $\mathbb{R}^n$ является покрытием Витали ограниченного множества A, если для каждого $x \in A$ существуют положительное число $r(x) > 0$, последовательность шаров $B(x, \varepsilon_k)$ с $\varepsilon_k \to 0$ и последовательность $C_k \in G$ такие, что $x \in C_k$, $C_k \subset B(x, \varepsilon_k)$ и $(\operatorname{meas} C_k / \operatorname{meas} B(x, \varepsilon_k)) > r(x)$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Версия теоремы Витали о покрытиях из [41, с. 109] позволяет утверждать, что каждое покрытие Витали множества A содержит не более чем счетное подмножество взаимно не пересекающихся множеств C_k таких, что

$$\operatorname{meas}\Big(A \setminus \bigcup_k C_k\Big) = 0.$$

Последовательность $\xi_k : \Omega \to \mathbb{R}^m$ называется *равномерно суммируемой* если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ и $\operatorname{meas} \widetilde{\Omega} \le \delta$, то

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}} |\xi_k(x)|\, dx \le \varepsilon.$$

Следующая лемма является вариантом так называемой «biting lemma» (см. [42]), утверждающей, что всякая ограниченная в L^1 последовательность ξ_k содержит подпоследовательность ξ_j со свойствами: существует последовательность измеримых множеств $\Omega_j \subset \Omega$ такая, что $\Omega_{j+1} \subset \Omega_j$ для любого $j \in \mathbb{N}$ с $\operatorname{meas} \Omega_j \to 0$ при $j \to \infty$ и $\xi_i|_{\Omega \setminus \Omega_j}$ сходятся слабо в $L^1(\Omega \setminus \Omega_j; \mathbb{R}^m)$ к $\xi_\infty \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ для любого $j \in \mathbb{N}$.

Читатель без труда сможет получить этот результат как следствие леммы 3.2. Напомним только, что последовательность слабо компактна в L^1, если и только если она равностепенно суммируема (см., например, [43]).

Лемма 3.2. *Пусть $\xi_k : \Omega \to [0, \infty[$ являются измеримыми функциями такими, что $\|\xi_k\|_{L^1} \le c < \infty$. Тогда найдутся подпоследовательность ξ_k (сохраняем прежнюю индексацию) и последовательность $M_k \in \mathbb{N}$ такие, что $M_k \to \infty$, $k \to \infty$, и если $\Omega_k := \{x \in \Omega : |\xi_k(x)| \le M_k\}$, а χ_k — характеристические функции Ω_k, то функции $\chi_k \xi_k$ равномерно суммируемы.*

Доказательство. Для исходной последовательности ξ_k определим

$$\sigma(\xi_k) := \sup_{M_k \to \infty} \Big\{ \limsup_{k \to \infty} \int\limits_{\{x \in \Omega : \xi_k(x) > M_k\}} \xi_k(x)\, dx : M_k \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Заметим, что последовательность ξ_k равномерно суммируема, если и только если $\sigma(\xi_k) = 0$. Действительно, равномерная суммируемость влечет $\sigma(\xi_k) = 0$, так как $\operatorname{meas}\{x \in \Omega : \xi_k(x) \ge M_k\} \to 0$ для каждой последовательности $M_k \to \infty$ (напомним, что $\|\xi_k\|_{L^1} \le c$, $k \in \mathbb{N}$). Обратно, $\sigma(\xi_k) = 0$ влечет, что для $\varepsilon > 0$ существует $M > 0$ такое, что

$$\sup_k \int\limits_{\{\xi_k \ge M\}} \xi_k\, dx \le \varepsilon/2.$$

В этом случае, если $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ удовлетворяет

$$\operatorname{meas} \widetilde{\Omega} \le \varepsilon/2M,$$

то для каждого $k \in \mathbb{N}$ справедливо

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}} \xi_k \, dx \le \int\limits_{\{\xi_k \ge M\}} \xi_k \, dx + M \operatorname{meas} \widetilde{\Omega} \le \varepsilon.$$

Таким образом, ξ_k является равномерно суммируемой последовательностью.

Мы можем найти подпоследовательности ξ_j и $M_j \to \infty$ такие, что

$$\sigma(\xi_k) = \sigma(\xi_j) = \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\{x\in\Omega : |\xi_j(x)| > M_j\}} \xi_j \, dx.$$

Последовательность $\chi_j \xi_j$ уже является равномерно суммируемой. Для этого достаточно показать равенство $\sigma(\chi_j \xi_j) = 0$, которое, в свою очередь, вытекает из тождества выше. Действительно, предполагая $\sigma(\xi_j \chi_j) > 0$, получаем $\sigma(\xi_j) \ge \sigma(\xi_j) + \sigma(\chi_j \xi_j) > \sigma(\xi_j)$, что является противоречием. $\square$

Лемма 3.3. *Для каждых $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $\lambda \in [0,1[$ выполнено*

$$G(|A + \mu v + w|) \le G(|A + v|),$$

если $|v| \ge c = (2|A|+1)/(1-\lambda)$, $0 \le \mu \le \lambda$, $|w| \le 1$, и $G : [0,\infty[\to [0,\infty[$ является неубывающей функцией.

Доказательство. Результат справедлив в случае

$$|A + \mu v + w| \le |A + v|.$$

Последнее неравенство выполнено, так как

$$|A + \mu v + w| \le |A| + \lambda |v| + |w|, \quad |v| - |A| \le |A + v|$$

и так как неравенство $|A| + \lambda|v| + |w| \le |v| - |A|$ следует из $2|A| + 1 \le (1-\lambda)|v|$. $\square$

Лемма 3.4. *Для каждого $M \ge 0$ найдется функция $\lambda : [0,\infty[\to [0,1[$ такая, что $\lambda(R) \to 1$ при $R \to \infty$ и*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{|v|\ge R, |A|\le M} \frac{G(|A + \lambda(R) v|)}{G(|A + v|)} = 0, \tag{3.1}$$

если G имеет быстрый рост на бесконечности (см. (1.3)).

Доказательство. Общая ситуация может быть сведена к случаю $M = 0$ (тогда $A = 0$). Покажем это. Пусть (3.1) выполнено с $M = 0$ и с подходящей функцией $\tilde{\lambda}$. Для $|v| \ge \max\{M, R\}$, $|A| \le M$ имеем

$$G(|v| - M) \le G(|A + v|), \quad G(|\lambda(R) v + A|) \le G(\lambda(R)|v| + M),$$

где

$$\begin{aligned} \lambda(R)|v| + M = \left(\lambda(R) + \frac{M}{|v|}\right)|v| &= \left(\lambda(R) + \frac{M}{|v|}\right) \frac{|v|}{|v| - M} (|v| - M) \\ &\le \left(\lambda(R) + \frac{M}{R}\right) \frac{R}{R - M} (|v| - M). \end{aligned}$$

Тогда $\lambda(R) : [0,\infty[\to [0,1[$ обладает всеми нужными свойствами, если $\lambda(R) \to 1$ при $R \to \infty$ и $(\lambda(R) + M/R)(R/(R-M)) \le \tilde{\lambda}(R)$ для всех достаточно больших R. Таким образом, (3.1) выполнено, если справедливо менее общее утверждение

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{|t|\ge R} \frac{G(\tilde{\lambda}(R) t)}{G(t)} = 0 \tag{3.2}$$

для некоторой функции $\tilde{\lambda} :]0,\infty[\to]0,1[$ с $\tilde{\lambda}(R) \to 1$ при $R \to \infty$.

Для данных $t_2 > t_1 > 0$ выполнено

$$G(t_2) = G(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} G'(t)\,dt \geq G(t_1) + (t_2 - t_1)G'(t_1),$$

$$\frac{G(t_2)}{G(t_1)} \geq 1 + \left(\frac{t_2 - t_1}{t_1}\right)\left(\frac{G'(t_1)t_1}{G(t_1)}\right).$$

Так как $(G'(t)t/G(t)) \to \infty$ при $t \to \infty$, мы можем указать функцию $f(t) : [0,\infty[\to]1/2,1[$ со свойствами: $f(t) \to 1$ при $t \to \infty$ и (полагая в неравенстве выше $t_2 = t$, $t_1 = f(t)t$)

$$\frac{t - f(t)t}{f(t)t}\frac{G'(f(t)t)f(t)t}{G(f(t)t)} = \frac{1 - f(t)}{f(t)}\frac{G'(f(t)t)f(t)t}{G(f(t)t)} \to \infty, \quad t \to \infty.$$

Тогда функция

$$\tilde{\lambda}(R) := \inf_{|t| \geq R} f(t)$$

уже обладает всеми нужными свойствами, т. е. она принимает значения в $]0,1[$ и удовлетворяет обоим требованиям: $\tilde{\lambda}(R) \to 1$ при $R \to \infty$ и (3.2). $\square$

Главным техническим средством в доказательствах теорем 1.1 и 1.2 является

Лемма 3.5. *Пусть $u_k \rightharpoonup l_A$ в $W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ с $\int_\Omega G(|Du_k|)\,dx \leq c < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, где G имеет быстрый рост на бесконечности (см. (1.3)).*

Тогда существуют подпоследовательность u_k (индексацию не меняем) и последовательность $\tilde{u}_k \in l_A + C_0^\infty(\Omega;\mathbf{R}^m)$ такие, что последовательность $G(|D\tilde{u}_k)|)$ равномерно суммируема и

$$\|Du_k - D\tilde{u}_k\|_{L^1} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Доказательство. Сначала мы покажем, что существуют подпоследовательность u_k (индексацию не меняем) и последовательность $\bar{u}_k \in W^{1,1}$ такие, что $\bar{u}_k \rightharpoonup l_A$ в $W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, $G(|D\bar{u}_k|)$ является равномерно суммируемой и $\|Du_k - D\bar{u}_k\|_{L^1} \to 0$. После чего построим последовательность $\tilde{u}_k$ со всеми необходимыми свойствами. Получим последовательность $\bar{u}_k$ в форме $\bar{\lambda}_k u_k$ с $\bar{\lambda}_k \to 1-0$ такими, что функции $G(\bar{\lambda}_k|Du_k|)$, $k \in \mathbb{N}$, равномерно суммируемы.

Заметим, что мы можем найти подпоследовательность u_k исходной последовательности и подмножества Ω_k множества Ω такие, что функции $G(|Du_k|)\chi_{\Omega_k}$ равномерно суммируемы (χ_{Ω_k} является характеристической функцией Ω_k), $\operatorname{meas}(\Omega \setminus \Omega_k) \to 0$ и

$$M_k := \operatorname*{ess\,inf}_{x \in (\Omega \setminus \Omega_k)} |Du_k(x)| \to \infty, \quad k \to \infty,$$

см. утверждение леммы 3.2. Пусть также функция $\lambda : [0,\infty[\to [0,1[$ задана леммой 3.4.

Тогда, полагая $\bar{\lambda}_k = \lambda(M_k)$, имеем

$$G(|D\bar{u}_k|) = \chi_{\Omega_k} G(|\lambda(M_k)Du_k|) + \chi_{\Omega\setminus\Omega_k} G(|\lambda(M_k)Du_k|).$$

Так как функции $\chi_{\Omega_k} G(|D\bar{u}_k|)$ равномерно суммируемы и

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_k} G(\lambda(M_k)|Du_k(x)|)\,dx \le \sup_{|t|\ge M_k} \frac{G(t\lambda(M_k))}{G(t)} \int\limits_{\Omega} G(|Du_k|)\,dx \to 0,$$

получаем, что последовательность $G(|D\bar{u}_k|)$ равномерно суммируема.

Заметим также, что предложение 3.1 влечет равномерную сходимость $\bar{u}_k$ к l_A.

Нам понадобится еще одна последовательность v_k вида

$$v_k = l_A + \lambda_k w_k \phi_k, \quad \text{где} \quad w_k = \bar{u}_k - l_A,$$

$\lambda_k \to 1-0$ с $\lambda_k \le \bar{\lambda}_k$, $\phi_k \in C_0^\infty(\Omega)$ с $\phi_k = 0$ в окрестности $\partial\Omega$, $\operatorname{meas}\{x \in \Omega : \phi_k(x) = 1\} \to \operatorname{meas}\Omega$, $\phi_k(x) \in [0,1]$ для всех $x \in \Omega$. Последовательность $G(|Dv_k|)$ будет равномерно суммируемой. Тогда члены искомой последовательности $\tilde{u}_k$ могут быть получены как усреднения v_k с достаточно малыми радиусами усреднения.

Для того чтобы построить последовательность v_k со свойством равномерной суммируемости $G(|Dv_k|)$, заметим, что ϕ_k могут быть выбраны с $|D\phi_k||w_k| \le \varepsilon_k$ всюду, $\operatorname{meas}\{x \in \Omega : \phi_k \ne 1\} < \varepsilon_k$, где $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$. Более того, мы можем также предположить, что λ_k, c_k удовлетворяют требованиям леммы 3.3 с некоторыми положительными $c_k \to \infty$, где $G(|A| + c_k + \varepsilon_k)\varepsilon_k \to 0$. Так как выполнено

$$Dv_k = A + \lambda_k(\phi_k Dw_k + w_k \otimes D\phi_k),$$

по лемме 3.3

$$G(|A + \lambda_k(\phi_k Dw_k + w_k \otimes D\phi_k)|) \le G(|A + Dw_k|) = G(|D\bar{u}_k|)$$

на множестве $\{x \in \Omega : |Dw_k(x)| > c_k\}$ для всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}$. Тем самым поведение v_k на множествах, где соответственно $|Dw_k| \le c_k$ или $|Dw_k| > c_k$, результируется в равномерной суммируемости $G(|Dv_k|)$. $\square$

§ 4. Доказательства теорем 1.1 и 1.2

Так как в этом параграфе мы имеем дело с мерами Янга, порожденными градиентами соболевских функций, нам понадобится

Определение 4.1. Пусть $L : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$, и пусть ν является вероятностной мерой, которая имеет конечное действие на L и центр масс в точке $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Мы назовем эту меру *однородной градиентной L-мерой Янга*, если существует последовательность $u_k \in l_A + C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ такая, что Du_k порождает ν как меру Янга, т. е.

$$\Phi(Du_k) \overset{*}{\rightharpoonup} \langle \Phi; \nu\rangle \quad \text{в } L^\infty(\Omega) \text{ для всех } \Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{m\times n}),$$

и $L(Du_k) \rightharpoonup \langle L; \nu\rangle$ в L^1 при $k \to \infty$.

Заметим, что $u_k \rightharpoonup l_A$ в $W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ в случае, если L имеет по крайней мере линейный рост на бесконечности.

Существует стандартный способ построения однородной градиентной L-меры Янга (см. лемму 4.2). Пусть $\phi \in l_A + C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Тогда $\operatorname{Av}(D\phi)_\Omega$ является мерой, определенной следующим образом:

$$\langle \Phi; \operatorname{Av}(D\phi)_\Omega\rangle := \frac{1}{\operatorname{meas}\Omega} \int\limits_\Omega \Phi(D\phi(x))\,dx \quad \forall \Phi \in C_0(\mathbb{R}^{m\times n}).$$

Лемма 4.2. *Пусть $\phi \in l_A + C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$, и пусть $L : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ является непрерывным интеграндом. Тогда $\mathrm{Av}(D\phi)_\Omega$ — однородная градиентная L-мера Янга и*

$$\int\limits_\Omega L(D\phi(x))\,dx = \langle L; \mathrm{Av}(D\phi)_\Omega\rangle \operatorname{meas}\Omega.$$

Доказательство стандартно и может быть найдено, например, в [18, 30].

Как квазивыпуклость, так и квазиовыпуклекия могут быть выражены в терминах однородных градиентных L-мер Янга.

Лемма 4.3. *Пусть $L : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенствам* (1.3). *Тогда*

1) *L является квазивыпуклой в $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, если и только если неравенство Йенсена*

$$\langle L; \nu\rangle \geq L(A)$$

выполнено для всех однородных градиентных L-мер Янга с центром масс в A;

2) *квазиовыпукление*

$$L^{qc}(\cdot) := \inf_{\phi\in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)} \frac{1}{\operatorname{meas}\Omega} \int\limits_\Omega L(\cdot + D\phi(x))\,dx$$

является квазивыпуклой функцией, и для каждого $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$L^{qc}(A) = \inf_\nu \langle L; \nu\rangle,$$

где ν принадлежат множеству однородных градиентных L-мер Янга с центром масс в A.

Доказательство. Если ν является однородной градиентной L-мерой Янга с центром масс в A, то найдется последовательность $\phi_k \in l_A + C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ такая, что $D\phi_k$ порождает ν и $\phi_k \rightharpoonup l_A$ в $W^{1,1}$,

$$L(D\phi_k(\cdot)) \rightharpoonup \langle L; \nu\rangle \quad \text{в } L^1,\ k \to \infty.$$

Квазивыпуклость L в точке A влечет

$$\int\limits_\Omega L(D\phi_k(x))\,dx \geq L(A) \operatorname{meas}\Omega, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда выполнено неравенство Йенсена $\langle L; \nu\rangle \geq L(A)$.

Обратно, неравенство Йенсена для $(\mathrm{Av}\, D\phi)_\Omega$, где $\phi \in l_A + C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$, вместе с леммой 4.2 влекут

$$\int\limits_\Omega L(A + (D\phi(x) - A))\,dx = \langle L; (\mathrm{Av}\, D\phi)_\Omega\rangle \operatorname{meas}\Omega \geq L(A) \operatorname{meas}\Omega.$$

Тогда L квазивыпукла в A.

Это доказывает первую часть леммы.

Те же аргументы позволяют получить равенство

$$\inf_{\phi\in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)} \frac{1}{\operatorname{meas}\Omega} \int\limits_\Omega L(A + D\phi(x))\,dx = \inf_\nu \langle L; \nu\rangle,$$

где ν является однородной градиентной L-мерой Янга с центром масс в A. Мы можем обойтись также меньшим множеством мер $(\mathrm{Av}\, D\phi)_\Omega$ с $\phi \in l_A + C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$, которые имеют компактные носители.

Мы можем использовать последнее тождество, чтобы показать, что L^{qc} является непрерывной функцией и удовлетворяет оценкам (1.3). Действительно, так как $L^{qc} \leq L$, выполнено правостороннее неравенство. Поскольку $v \to G(|v|)$ является выпуклой функцией, а ν является вероятностной мерой, получаем

$$\langle G(|\cdot|); \nu\rangle \geq G(|A|),$$

что влечет левостороннее неравенство.

Для доказательства непрерывности L^{qc} заметим, что лемма 3.5 позволяет утверждать, что если ν_k являются однородными градиентными L-мерами Янга с $\nu_k \rightharpoonup^* \nu$ и $\langle L; \nu_k\rangle \leq c$, $k \in \mathbb{N}$, то ν также однородная градиентная L-мера Янга. Тогда функция $A \to L^{qc}(A)$ полунепрерывна снизу, так как из сходимости $\nu_k \rightharpoonup^* \nu$ следует, что

$$\liminf_{k\to\infty} \langle L; \nu_k\rangle \geq \langle L; \nu\rangle.$$

Полунепрерывность сверху вытекает из того, что если ν — однородная градиентная L-мера Янга с компактным носителем и центром массы в A и если $A_k \to A$, то полученные сдвигом меры ν_k (т. е. такие, что $\langle \Phi(\cdot); \nu\rangle = \langle \Phi(\cdot - A + A_k); \nu_k\rangle$) являются однородными градиентными L-мерами Янга с центром масс в A_k и, следовательно, можно утверждать, что

$$L^{qc}(A_k) \leq \langle L; \nu_k\rangle \to \langle L; \nu\rangle, \quad k \to \infty.$$

Для завершения доказательства второго утверждения осталось проверить неравенство, определяющее квазивыпуклость в случае кусочно-аффинных возмущений $\phi \in l_A + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. В этом случае $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Omega_i \cup N$, где $\operatorname{meas} N = 0$, а Ω_i, $i \in \mathbb{N}$, являются попарно не пересекающимися открытыми множествами с липшицевой границей и с $D\phi(x) = A_i$ для $x \in \Omega_i$, $i \in \mathbb{N}$. Для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ и любого $i \in \mathbb{N}$ можно указать функцию $\psi_i \in C_0^\infty(\Omega_i; \mathbb{R}^m)$ такую, что

$$\int\limits_{\Omega_i} L(A_i + D\psi_i(x))\, dx \leq (L^{qc}(A_i) + \varepsilon) \operatorname{meas} \Omega_i.$$

Рассмотрим функцию $\phi_j \in l_A + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, определенную следующим образом:

$$\phi_j = \begin{cases} \phi + \psi_i & \text{в} \quad \Omega_i,\ i \in \{1, \dots, j\}, \\ \phi & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$L^{qc}(A) \operatorname{meas} \Omega \leq \int\limits_{\Omega} L(D\phi_j(x))\, dx \leq \int\limits_{\Omega \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{j} \Omega_i} L(D\phi(x))\, dx + \sum_{i=1}^{j} (L^{qc}(A_i) + \varepsilon) \operatorname{meas} \Omega_i$$

$$\leq \varepsilon \operatorname{meas} \Omega + \int\limits_{\Omega} L^{qc}(D\phi(x))\, dx + \int\limits_{\Omega \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{j} \Omega_i} \{|L(D\phi(x))| + |L^{qc}(D\phi(x))|\}\, dx.$$

Так как $\varepsilon > 0$ и $j \in \mathbb{N}$ произвольны, заключаем, что

$$L^{qc}(A) \operatorname{meas} \Omega \leq \int\limits_{\Omega} L^{qc}(D\phi(x))\, dx,$$

откуда и следует квазивыпуклость L^{qc}. $\square$

Замечание 4.4. Далее мы будем использовать установленный выше факт: в условиях леммы 4.3 предположения

$$\langle L;\nu_k\rangle \le c < \infty, \quad \nu_k \rightharpoonup^* \nu,$$

позволяют утверждать, что ν является однородной градиентной L-мерой Янга в случае, если это верно для ν_k, $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство теоремы 1.1. Факт необходимости квазивыпуклости $L(x,u,v)$ относительно v для полунепрерывности снизу функционала относительно слабой* сходимости в $W^{1,\infty}$ хорошо известен, и его доказательство может быть найдено, например, в [9, 14]. Альтернативно можно использовать леммы 4.2, 4.3.

Для доказательства полунепрерывности снизу J с квазивыпуклыми по v интеграндами $L(x,u,v)$ заметим, что всегда можно найти подпоследовательность u_k последовательности u_j такую, что

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) = \liminf_{j\to\infty} J(u_j),$$

а последовательность Du_k порождает меру Янга $(\nu_x)_{x\in\Omega}$. Заметим также, что почти каждая $x \in \Omega$ является лебеговской точкой функций

$$x \to \langle G(|\cdot|);\nu_x\rangle, \quad x \to \nu_x \in (M_1,\rho),$$

а также точкой классической дифференцируемости u_0 (см. [44, с. 234]). Более того, для каждой такой точки $x_0 \in \Omega$ мера ν_{x_0} является однородной градиентной L-мерой Янга. Для того чтобы это доказать, рассмотрим последовательность мер Янга $\left(\nu_x^j\right)_{x\in B(x_0,\varepsilon)}$, где $B(x_0,\varepsilon)\subset\Omega$, определенных по правилу

$$\nu^j_{(x_0+y)} = \nu_{(x_0+y/j)}, \quad y \in B(0,\varepsilon).$$

Тогда лемма 2.4 и теорема 2.8 влекут сходимость

$$\left\langle \Phi;\nu^j_{(\cdot)}\right\rangle \rightharpoonup^* \langle \Phi;\nu_{x_0}\rangle,\ j\to\infty, \quad \forall\Phi \in C_c(\mathbb{R}^{m\times n}).$$

Более того,

$$\left\langle G;\nu^j_{(\cdot)}\right\rangle \rightharpoonup \langle G;\nu_{x_0}\rangle \quad \text{в } L^1(B(x_0,\varepsilon)), \quad j\to\infty.$$

Мера Янга $(\nu_x)_{x\in B(x_0,\varepsilon)}$ порождается градиентами последовательности u_k со свойствами $u_k \rightharpoonup u_0$ в $W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$,

$$\int\limits_\Omega G(|Du_k(x)|)\,dx \le c < \infty.$$

Тогда каждое из семейств $\left(\nu_x^j\right)_{x\in B(x_0,\varepsilon)}$, $j\in\mathbb{N}$, порождается последовательностью u_k^j, $k\in\mathbb{N}$, где для каждого $k\in\mathbb{N}$ выполнено

$$u_k^j(x_0+y) = j(u_k(x_0+y/j) - u_k(x_0)), \quad y \in B(0,\varepsilon).$$

Последовательность $j(k)\to\infty$, $k\in\mathbb{N}$, выбирается таким образом, что $\big(u_k^{j(k)}(x_0+y/j(k)) - u_k(x_0)\big)j(k)$ сходится к функции $l_{Du(x_0)}$ в $W^{1,p}$, $p>1$. Последнее возможно, так как $\|u_k - u_0\|_{C(B(0,\varepsilon))} \to 0$, а функция u_0 дифференцируема в x_0 в классическом смысле. Последовательность $u_k^{j(k)}$, $k\in\mathbb{N}$, также может быть выбрана таким образом, что $Du_k^{j(k)}$ порождает однородную градиентную меру Янга ν_{x_0}, а функции $G\big(\big|Du_k^{j(k)}\big|\big)$ равномерно ограничены в $L^1(B(x_0,\varepsilon))$. Тогда лемма 3.5 позволяет утверждать, что мера ν_{x_0} является однородной градиентной G-мерой Янга.

Согласно лемме 4.3 квазивыпуклость $L(x,u,v)$ относительно v влечет

$$\langle L(x_0,u_0(x_0),\cdot);\nu_{x_0}\rangle \geq L(x_0,u_0(x_0),Du_0(x_0)).$$

Согласно теореме 2.2 выполнено также

$$\liminf_{k\to\infty} J(u_k) \geq \int\limits_{\Omega} \langle L(x,u_0(x),\cdot);\nu_x\rangle\,dx.$$

Вместе два последних неравенства влекут полунепрерывность снизу

$$\liminf_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u_0). \qquad \square$$

Замечание 4.5. Мы также установили, что если последовательность u_k такова, что $\int\limits_{\Omega} G(|Du_k(x)|)\,dx \leq c < \infty$, и если Du_k порождает меру Янга $(\nu_x)_{x\in\Omega}$, то для п. в. $x\in\Omega$ мера ν_x является однородной градиентной L-мерой Янга с центром масс в $Du_0(x)$, где $u_k \rightharpoonup u_0$ в $W^{1,p}$, $p>1$, а L имеет быстрый рост (см. (1.3)).

Доказательство теоремы 1.2. По второму утверждению леммы 4.3 квазиовыпукление $L(x,u,v)$ относительно v задается формулой

$$L^{qc}(x,u,A) = \inf\{\langle L;\nu\rangle : \nu \text{ является градиентной } L\text{-мерой Янга с центром масс в } A\}. \tag{4.1}$$

Эта формула уже была использована в лемме 4.3 для доказательства непрерывности L^{qc} в случае L, не зависящих от младших слагаемых x и u. Замечание 4.4 позволяет использовать те же самые аргументы для доказательства непрерывности сужения L^{qc} на $\Omega'\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n}$ в случае, если сужение L на это множество непрерывно, а множество Ω' компактно. Тогда L^{qc} является интеграндом Каратеодори, если это верно для L.

Для доказательства утверждения о полунепрерывной снизу оболочке мы должны показать, что для фиксированной функции $u_0\in W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ с $J(u_0)<\infty$ существует последовательность u_k с $u_k\rightharpoonup u_0$ в $W^{1,1}$ такая, что $J(u_k)\to J^{qc}(u_0)$, $k\to\infty$. В действительности ситуация может быть сведена к случаю кусочно-аффинной u_0, так как все соболевские функции с конечной энергией могут быть аппроксимированы такими функциями одновременно как в $W^{1,p}$, $p>1$, так и в энергии, как утверждает лемма 4.6, сформулированная ниже.

Рассмотрим сначала многозначное отображение $V : x\to V(x)\subset(M_1,\rho)$, которое каждому $x\in\Omega$ ставит в соответствие множество однородных градиентных L-мер Янга, дающих инфимум (4.1) в случае $u=u_0(x)$, $A=Du_0(x)$. Замкнутость множества однородных градиентных L-мер Янга с равномерно ограниченными действиями на L относительно слабой* сходимости (см. замечание 4.4), позволяет утверждать, что отображение $x\to V(x)$ замкнуто. Более того, замечание 4.4 также влечет измеримость отображения $x\to V(x)$ (это вытекает из вспомогательного факта о полунепрерывности сверху отображения $V:\Omega'\to(M_1,\rho)$: сходимости $\nu_k\overset{*}{\rightharpoonup}\nu_0$, $x_k\to x_0$ влекут $\nu_0\in V(x_0)$ в случае $\nu_k\in V(x_k)$, если Ω' компактно и сужение L на $\Omega'\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n}$ непрерывно).

Таким образом, можно применить теоремы 2.6 и 2.3 для нахождения меры Янга $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ со свойством $\nu_x \in V(x)$ п. в. в Ω.

Для построения последовательности u_k со свойствами: Du_k порождает меру Янга $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ и

$$J(u_k) \to \int\limits_\Omega \langle L(x, u_0(x), \cdot); \nu_x\rangle\, dx = J^{qc}(u_0),$$

мы можем использовать лемму 2.4 и теорему 2.5 для сведения ситуации к частному случаю u_0 и $(\nu_x)_{x\in\Omega}$, когда существует разбиение Ω на множество нулевой меры и объединение липшицевых подобластей Ω_j, $j \in \mathbb{N}$, на которых функция u_0 является аффинной и $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ равна $\mathrm{Av}(Du_0 + D\phi)$ для некоторой $\phi \in C_0^\infty(\Omega_j; \mathbb{R}^m)$. Этот случай может быть легко получен на основе леммы 4.2.

Далее мы можем использовать стандартные диагональные аргументы для получения желаемого свойства для изначальных u_0 и $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ в случае, если это может быть сделано для кусочно-постоянной $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ и кусочно-аффинной u_0. $\square$

Свойства градиентных L-мер Янга, описанные в замечаниях 4.4, 4.5, установлены в работах [21, 22] в случае интеграндов L со стандартным ростом. В [22] авторы также обратили внимание на возможность применения этих свойств для изучения поведения интегральных функционалов на слабо сходящихся последовательностях.

Для завершения доказательства теоремы 1.2 осталось привести доказательство леммы 4.6.

Лемма 4.6. *Пусть $L = G(|\cdot|)$ имеет быстрый рост на бесконечности* (*см.* (1.3)), *и пусть $J(u) < \infty$. Для любых $\lambda \in]0,1[$, $\varepsilon > 0$ и достаточно малых $\delta > 0$ найдется функция $w \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $p > 1$, аффинная в каждом шаре $B(x_i, \tilde r_i)$, $1 \le i \le j$, принадлежащем конечному семейству взаимно не пересекающихся шаров, при этом*

$$\operatorname{meas}\widetilde\Omega / \operatorname{meas}\Omega \ge (1-\delta)^n,$$

$$\|Dw - \lambda Du\|_{L^1(\widetilde\Omega; \mathbb{R}^{mn})} \le \varepsilon \operatorname{meas}\widetilde\Omega, \tag{4.2}$$

$$J(w) \le J(u) + 2\varepsilon \operatorname{meas}\Omega \tag{4.3}$$

с $\widetilde\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{j} B(x_i, \tilde r_i)$.

Доказательство. Пусть f обозначает λu. Пусть x_0 является лебеговой точкой функции Df. Тогда это также точка классической дифференцируемости функции, т. е. если $A = Df(x_0)$, то

$$f(x) - f(x_0) - \langle A, x - x_0\rangle = o(x - x_0),$$

где $o(x-x_0)/|x-x_0| \to 0$ при $|x - x_0| \to 0$ (см. предложение 3.1 и [44, с. 234]). Пусть также $\delta \in]0,1[$. Определим функцию w в $B(x_0, r)$ следующим образом:

$$w(x) = \begin{cases} f(x_0) + \langle A, x-x_0\rangle & \text{для } |x - x_0| \le r(1-\delta), \\ f(x_0) + \langle A, x-x_0\rangle + \phi(|x-x_0|)(f(x) - f(x_0) - \langle A, x - x_0\rangle) \\ \qquad\qquad \text{для} \quad r(1-\delta) \le |x - x_0| \le r, \end{cases}$$

где функция $\phi \in C^\infty : [0,1] \to [0,1]$ такова, что

$$\phi(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma \ge r, \\ 0, & \text{если } \sigma \le (1-\delta)r, \end{cases}$$

$|\phi'| \leq (2/r\delta)$. Таким образом, $w = f$ в $\partial B(x_0, r)$.

Существует $\varepsilon_0 \in]0, \varepsilon[$ такое, что $|G(|v|) - G(|A|)| \leq \varepsilon/2$, если $|A| - 2\varepsilon_0 \leq |v| \leq |A| + 2\varepsilon_0$. Заметим также, что

$$\frac{\operatorname{meas}\{x \in B(x_0, r) : |Df(x) - A| \geq \varepsilon_0/2\}}{\operatorname{meas} B(x_0, r)} \to 0, \quad r \to 0. \tag{4.4}$$

Таким образом, для всех достаточно малых $r > 0$ выполнено

$$\begin{aligned} \|Dw - Df\|_{L^1(B(x_0, r(1-\delta)); \mathbb{R}^{mn})} \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \operatorname{meas} B(x_0, r(1-\delta)) + o(\operatorname{meas} B(x_0, r(1-\delta))) \\ \leq \varepsilon \operatorname{meas} B(x_0, r(1-\delta)), \end{aligned} \tag{4.5}$$

а также

$$\begin{aligned} &J(w; B(x_0, r(1-\delta))) - J(f; B(x_0, r(1-\delta))) \\ &\qquad \leq \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{meas}\{x \in B(x_0, r(1-\delta)) : |A - Df(x)| \leq \varepsilon_0/2\} \\ &\qquad\quad + G(|A|) o(\operatorname{meas} B(x_0, r(1-\delta))) \leq \varepsilon \operatorname{meas} B(x_0, r(1-\delta)). \end{aligned} \tag{4.6}$$

В $B(x_0, r) \setminus B(x_0, r(1-\delta))$ справедливо равенство

$$Dw = [A + \phi(Df - A)] + o(x - x_0) \otimes D\phi. \tag{4.7}$$

Заметим также, что

$$|D\phi|\, |o(x - x_0)| \leq 2o(r)/r\delta \to 0, \quad r \to 0.$$

В случае $|Df| \leq |A| + \varepsilon_0$ первое слагаемое в (4.7) не превосходит $|A| + \varepsilon_0$ по модулю. Тогда для всех достаточно маленьких r все выражение не превосходит $(|A| + 2\varepsilon_0)$ по модулю. В противном случае, т. е. когда $|Df| \geq |A| + \varepsilon_0$, выполнено

$$|A + \phi(Df - A)| \leq |Df| \leq |\lambda Du|,$$

$$|D\phi|\, |o(|x - x_0|)| \leq 2o(r)/r\delta \leq (1/\lambda - 1)\varepsilon_0 \leq (1 - \lambda)|Du|,$$

если r достаточно мало. В таком случае получаем

$$|Dw| \leq |Du|.$$

Тогда всюду в рассматриваемом множестве

$$|Dw| \leq \max\{|Du|, |A| + \varepsilon\}, \quad \text{а также} \quad G(|Du|) \geq G(|A|) - \varepsilon,$$

за исключением множества меры $o(\operatorname{meas}[B(x_0, r) \setminus B(x_0, r(1-\delta))])$ (см. (4.4)). Тогда

$$\begin{aligned} &J(w; B(x_0, r) \setminus B(x_0, r(1-\delta))) \leq J(u; B(x_0, r) \setminus B(x_0, r(1-\delta))) \\ &\quad + 2\varepsilon \operatorname{meas}[B(x_0, r) \setminus B(x_0, r(1-\delta))] + o(\operatorname{meas}[B(x_0, r) \setminus B(x_0, r(1-\delta))]) \\ &\qquad \leq J(u; B(x_0, r) \setminus B(x_0, r(1-\delta))) + \varepsilon \operatorname{meas} B(x_0, r), \end{aligned} \tag{4.8}$$

если r достаточно мало и $\delta < \varepsilon/3$.

Для завершения доказательства леммы заметим только, что стандартные аргументы о покрытиях Витали (см., например, [41]) позволяют покрыть все Ω, за исключением множества нулевой меры, взаимно не пересекающимися шарами $B(x_i, r_i)$ с центрами в точках x_i, которые являются лебеговскими для Du, и с достаточно малыми радиусами $r_i > 0$. Тогда неравенство (4.5) влечет неравенство (4.2) с $\widetilde{\Omega} = \bigcup_i B(x_i, \tilde{r}_i)$, где $\tilde{r}_i = (1-\delta) r_i$, $i \in \mathbb{N}$. Неравенства (4.6), (4.8) влекут неравенство (4.3). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ball J. M.* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Rational Mech. Anal. 1978. V. 63. P. 337–403.
2. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости для отображений с ограниченным искажением // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 3. С. 667–684.
3. *Решетняк Ю. Г.* Общие теоремы о полунепрерывности и сходимости с функционалом // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 5. С. 1051–1069.
4. *Сычёв М. А.* Необходимые и достаточные условия в теоремах о полунепрерывности снизу и сходимости с функционалом // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 6. С. 77–108.
5. *Ciarlet P.* Mathematical elasticity. V. 1. Three-dimensional elasticity. Amsterdam: North-Holland, 1988.
6. *Ball J. M., James R. D.* Fine mixtures as minimizers of energy // Arch. Rational Mech. Anal. 1987. V. 100. P. 13–52.
7. *Morrey C.* Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals // Pacific J. Math. 1952. V. 2. P. 25–53.
8. *Kristensen J.* On the nonlocality of quasiconvexity // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 1999. V. 16, N 1. P. 1–13.
9. *Ball J. M., Murat F.* $W^{1,p}$-quasiconvexity and variational problems for multiple integrals // J. Funct. Anal. 1984. V. 58. P. 225–253.
10. *Maly J.* Weak lower semicontinuity of polyconvex integrals // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1993. V. 123A. P. 681–691.
11. *Ball J. M.* Review of "Nonlinear problems of elasticity" by Stuart Antman // Bull. Amer. Math. Soc. 1996. V. 2. P. 269–276.
12. *Ball J. M.* Some open problems in elasticity // Geometry, Mechanics, and Dynamics. New York: Springer-Verl., 2002. P. 3–59.
13. *Bouchitte G., Fonseca I., Maly J.* The effective bulk energy of the relaxed energy of multiple integrals below the growth exponent // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1998. V. 128. P. 463–497.
14. *Dacorogna B.* Direct methods in the calculus of variations. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1989.
15. *Bogolubov N. N.* Sur quelques methods novelles dans le calculus des variations // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1930. V. 7, N 4. P. 149–271.
16. *Гусейнов Ф. В.* К вопросу о расширении многомерных вариационных задач // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. Т. 50, № 1. С. 3–21.
17. *Acerbi E., Fusco N.* Semicontinuity problems in the calculus of variations // Arch. Rational Mech. Anal. 1984. V. 86. P. 125–145.
18. *Sychev M.* A new approach to Young measure theory, relaxation and convergence in energy // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 1999. V. 16, N 6. P. 773–812.
19. *Pedregal P.* Parametrized measures and variational principles. Basel: Birkhäuser, 1997. (Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.; 30).
20. *Kinderlehrer D., Pedregal P.* Characterization of Young measures generated by gradients // Arch. Rational Mech. Anal. 1991. V. 115. P. 329–365.
21. *Kinderlehrer D., Pedregal P.* Weak convergence of sequences and the Young measure representation // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 1–19.
22. *Kinderlehrer D., Pedregal P.* Gradient Young measures generated by sequences in Sobolev spaces // J. Geom. Anal. 1994. V. 4, N 1. P. 59–90.
23. *Iwaniec T.* Nonlinear analysis and quasiconformal mappings from the perspective of PDEs // Quasiconformal geometry and dynamics, Lublin, 1996. Warsawa: Polish Acad. Sci., 1999. P. 119–140. (Banach Center Publ.; 48).
24. *Iwaniec T., Sbordone C.* Quasiharmonic fields // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 2001. V. 18, N 5. P. 519–572.
25. *Iwaniec T., Verchota G., Vogel A.* The failure of rank-one connections // Arch. Rational Mech. Anal. 2002. V. 163, N 2. P. 125–169.
26. *Cardaliaquet P., Tahraoui R.* Sur l'equivalence de la 1-rang convexité et de la polyconvexité des ensembles isotropiques de $R^{2\times 2}$ // C. R. Acad. Sci. Paris Sér I. 2000. V. 331. P. 851–856.
27. *Šilhavý M.* Rotationally invariant rank 1 convex functions // Appl. Math. Optim. 2001. V. 44. P. 1–15.
28. *Šilhavý M.* Monotonicity of rotationally invariant convex and rank 1 convex functions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 2002. V. 132. P. 419–435.

29. *Šilhavý M.* An $O(n)$ invariant rank 1 convex function that is not polyconvex // Theory Appl. Mech. Belgrade. 2002. V. 28–29. P. 325–336.
30. *Sychev M.* Characterization of homogeneous gradient Young measures in the case of arbitrary integrands // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 2000. V. 29, N 3. P. 531–548.
31. *Sychev M.* Attainment and relaxation results in special classes of deformations // Calc. Var. Partial Differential Equations. 2004. V. 19, N 2. P. 183–210.
32. *Sychev M.* Young measures as measurable functions. Новосибирск, 2003. (Препринт / ИМ СО РАН; 119).
33. *Sychev M.* A new approach to Young measure theory, relaxation and convergence in energy. Triest, March 1997. (Preprint / SISSA; N 43).
34. *Young L. C.* Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the calculus of variations // C. R. Soc. Sci. Varsovie. 1937. V. 30. P. 212–234.
35. *Ball J. M.* A version of the fundamental theorem for Young measures // PDE's and Continuum Models of Phase Transitions. London: Springer-Verl., 1989. P. 207–215. (Lecture Notes in Physics; 344).
36. *Berliocchi H., Lasry J. M.* Intégrandes normales et mesures paramétrées en calcul des variations // Bull. Soc. Math. France. 1973. V. 101. P. 129–184.
37. *Tartar L.* Compensated compactness and applications to partial differential equations // Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Sympos. V. IV. London: Pitman, 1979. P. 136–212. (Pitman Res. Notes Math.; Ser. 39).
38. *Kuratowski K., Ryll-Nardzewski C.* A general theorem of selectors // Bull. Acad. Polon. Sci. 1966. V. 13, N 6. P. 397–403.
39. *Castaing C., Valadier M.* Convex analysis and measurable multifunctions. Berlin; New York: Springer-Verl., 1977. (Lecture Notes in Math; 580).
40. *Balder E. J* A general approach to lower semicontinuity and lower closure in optimal control theory // SIAM J. Control Optim. 1984. V. 22. P. 570–598.
41. *Saks S.* Theory of the integral. New York: Hafner, 1937.
42. *Ball J. M., Murat F.* Remarks on Chacon's biting lemma // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 107. P. 655–663.
43. *MacShane E. J.* Integration. Princeton NJ: Princeton Univ. Press, 1947.
44. *Evans L. C., Gariepy L. F.* Measure theory and fine properties of functions. Boca Raton: CRC Press, 1992.

Статья поступила 11 мая 2004 г.

Сычёв Михаил Андреевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`masychev@math.nsc.ru`