Сибирский математический журнал
Июль—август, 2006. Том 47, № 4

УДК 519.14

ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ И БЛОК–СХЕМЫ

А. Л. Гаврилюк, А. А. Махнев

Аннотация: Исследуются вполне регулярные графы Γ диаметра d, в которых для некоторой вершины a множество вершин, находящихся на расстоянии d от a, является множеством точек 2-схемы, множество блоков которой состоит из пересечений окрестностей точек с множеством вершин, находящихся на расстоянии $d-1$ от a. Доказано, что подграф, индуцированный множеством точек, является кликой, кокликой или сильно регулярным графом диаметра 2. Для графа диаметра 3 установлено, что указанная конструкция является 2-схемой для любой вершины a тогда и только тогда, когда граф дистанционно регулярен и для любой вершины a подграф $\Gamma_3(a)$ является кликой, кокликой или сильно регулярным графом. Получен список возможных параметров для схем и графов диаметра 3 при условии, что подграф, индуцированный множеством точек, является графом Зейделя. Показано, что некоторые из найденных параметров не могут отвечать дистанционно регулярным графам.

Ключевые слова: вполне регулярный граф, t-(v,k,λ)-схема, сильно регулярный граф.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a]=\Gamma_1(a)$, $a^\perp=\{a\}\cup[a]$.

Пусть Γ — граф, $a,b\in\Gamma$, число вершин в $[a]\cap[b]$ обозначается через $\mu(a,b)$ (через $\lambda(a,b)$), если a,b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a]\cap[b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Если Γ — граф диаметра d и $i\le d$, то через Γ_i обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины a из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v,k,λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами* (v,k,λ,μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a,b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф называется *сильно регулярным графом*, если он имеет диаметр 2. Если вершины u,w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ $(\Gamma_{i-1}(u))$ с $\Gamma(w)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00046) и РФФИ-ГФЕН Китая (проект 05–01–39000).

Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Дистанционно регулярный граф Γ диаметра d называется *антиподальным*, если отношение «совпадать или находиться на расстоянии d» является отношением эквивалентности на множестве вершин графа. Антиподальное частное — это фактор-граф $\overline{\Gamma}$, вершинами которого являются антиподальные классы и две вершины смежны, если некоторая вершина первого класса смежна с вершиной из второго класса. Если r — число вершин в каждом классе эквивалентности, то Γ называется *r-накрытием* $\overline{\Gamma}$. *Графом Тейлора* называется 2-накрытие клики, имеющее диаметр 3. Через $K_{m\times n}$ обозначим полный m-дольный граф с долями порядка n. Граф на множестве пар $X \times Y$ называется *$m \times n$ решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$, а пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. *Треугольным графом* $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$ и пары $\{a, b\}, \{c, d\}$ смежны, только если они имеют единственный общий элемент. *Графом Мура* называется сильно регулярный граф с $\lambda = 0$, $\mu = 1$. *Зейделевым графом* называется сильно регулярный граф с собственным значением -2. Хорошо известно, что класс зейделевых графов состоит из полных многодольных графов $K_{m\times 2}$, $n \times n$ решеток, треугольных графов $T(m)$, графов Петерсена, Клебша, Шлефли, Шрикханде и трех графов Чанга.

Система инцидентности $(X, \mathscr{B})$ с множеством точек X и множеством блоков $\mathscr{B}$ называется *t-(V, K, Λ)-схемой*, если $|X| = V$, каждый блок инцидентен ровно K точкам и любые t точек инцидентны ровно Λ блокам. Любая 2-схема является (V, B, R, K, Λ)-схемой, где B — число блоков, каждая точка инцидентна R блокам и имеют место равенства $VR = BK$, $(V-1)\Lambda = R(K-1)$.

Блок-схемы естественно возникают внутри сильно регулярных графов. Например, если для клики или коклики X графа Γ достигается равенство в границе Хоффмана (см. [1]), то пара $(X, \Gamma - X)$ является 2-схемой. В монографии [2, § 8] рассматривается возможность, когда в сильно регулярном графе Γ для некоторой вершины a пара $(\Gamma(a), \Gamma_2(a))$ является 2-схемой, в которой точка и блок инцидентны, только если они смежны в Γ. Например, если Γ — полный многодольный граф $K_{n\times m}$, то для любой вершины a пара $(\Gamma(a), \Gamma_2(a))$ является вырожденной 2-схемой, имеющей $m-1$ блоков, причем каждый блок инцидентен всем точкам. Второй класс примеров дают сильно регулярные графы без треугольников.

В данной работе исследуются вполне регулярные графы Γ диаметра d, в которых для некоторой вершины a пара $(\Gamma_d(a), \Gamma_{d-1}(a))$ является 2-схемой.

Предложение. *Пусть Γ — связный вполне регулярный граф диаметра d с параметрами (v, k, λ, μ), в котором пара $(\Gamma_d(a), \Gamma_{d-1}(a))$ для некоторой вершины a является 2-(V, B, R, K, Λ)-схемой. Тогда $R = c_d(a, x)$ для $x \in \Gamma_d(a)$, $K = b_{d-1}(a, y)$ для $y \in \Gamma_{d-1}(a)$ и подграф $\Gamma_d(a)$ является кликой, кокликой или сильно регулярным графом с параметрами ($v' = V$, $k' = k - R$, $\lambda' = \lambda - \Lambda$, $\mu' = \mu - \Lambda$).*

Класс дистанционно регулярных графов Γ, в которых для какой-то вершины a подграф $\Gamma_d(a)$ является кокликой, содержит антиподальные и двудольные графы, для которых Λ равно 0 (и 2-схема вырожденна) и μ соответственно.

Пример 1. Следующие дистанционно регулярные графы диаметра $d \geq 3$ являются двудольными, но не антиподальными:

(1) обобщенные n-угольники порядка $(1, q)$ для $n = 6, 8, 12$;

(2) удвоения графов Грассмана;

(3) графы типов (B0–B7) и типа (B14) из табл. 6.9 в [1].

Графы типа (B0) — это графы инцидентности симметричных 2-схем, графы типа (B1) возникают из кодов Казами, графы типов (B2–B7) — это графы инцидентности частичных μ-геометрий (см. [1, § 1.7]).

Дистанционно регулярный граф Γ, в котором для некоторой вершины a подграф $\Gamma_d(a)$ — клика, оказывается половинным графом дистанционно регулярного графа нечетного диаметра $2d + 1$, являющегося антиподальным 2-накрытием.

Пример 2. Следующие дистанционно регулярные графы диаметра $2d+1 \geq 7$ являются двудольными и антиподальными 2-накрытиями:

(1) удвоения нечетных графов на $2d + 1$ точках (половинные графы являются графами Джонсона $J(2d + 1, d)$);

(2) $(2d + 1)$-куб;

(3) графы диаметра 7 на 2048 вершинах (удвоение графа смежных классов усеченного бинарного кода Голея) и на 4096 вершинах (удвоение графа смежных классов бинарного кода Голея).

Примеры сильно регулярных графов Γ, в которых для некоторой вершины a пара $(\Gamma_2(a), [a])$ является 2-схемой, приведены в [2]. Пример дистанционно регулярного графа Γ диаметра, большего 2, в котором для некоторой вершины a подграф $\Gamma_d(a)$ является сильно регулярным графом, обеспечивает граф Джонсона $J(2d + 2, d)$. Для этого графа получим $\lambda = 2d, \mu = 4$, для любой вершины a имеем $\Gamma_d(a) = T(d + 2)$ — сильно регулярный граф с $\lambda' = d$, $\mu' = 4$. Но для этого графа не выполняется равенство $\lambda - \lambda' = \mu - \mu'$.

Теорема 1. *Пусть Γ — вполне регулярный граф диаметра 3, имеющий параметры (v, k, λ, μ). Тогда следующие утверждения равносильны:*

(1) *Γ является дистанционно регулярным графом, в котором для каждой вершины a подграф $\Gamma_3(a)$ является кликой, кокликой или сильно регулярным графом с параметрами (v', k', λ', μ'), где $\lambda - \lambda' = \mu - \mu'$;*

(2) *для любой вершины a пара $(\Gamma_3(a), \Gamma_2(a))$ является 2-схемой.*

Авторы не знают примеров дистанционно регулярных графов диаметра $d \geq 3$ с параметрами (v, k, λ, μ), в которых для некоторой вершины a подграф $\Gamma_d(a)$ был бы сильно регулярным диаметра 2 с параметрами (v', k', λ', μ') и $\lambda - \lambda' = \mu - \mu'$.

В работе для некоторых сильно регулярных графов Σ найдены возможные параметры вполне регулярных графов Γ диаметра 3, в которых найдется такая вершина a, что $\Gamma_3(a) = \Sigma$ и пара $(\Gamma_3(a), \Gamma_2(a))$ является 2-схемой.

Теорема 2. *Пусть Σ — сильно регулярный граф, Γ — вполне регулярный граф диаметра 3, имеющий параметры (v, k, λ, μ) и вершину a такую, что $\Gamma_3(a) = \Sigma$ и пара $(\Gamma_3(a), \Gamma_2(a))$ является 2-схемой. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если схема $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ симметрична, то граф Γ — семиугольник;*

(2) *если Σ является $n \times n$-решеткой, то возможна следующая бесконечная серия: схема $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ имеет параметры $(n^2, 4n^2, 2(n+1), (n+1)/2, 1)$, n нечетно и граф Γ имеет параметры $(5n^2 + 4n + 1, 4n, n - 1, 3)$;*

Таблица 1

N	граф точек схемы	параметры схемы	параметры графа
1	граф Петерсена	(10,30,12,4,4)	(56,15,4,5)
2	граф Хофмана — Синглтона	(50,1050,168,8,24)	(1276,175,24,25)
3	граф Шрикханде	(16,360,90,4,18)	(473,96,20,20)
4	решетка на 9 вершинах	(9,24,8,3,2)	(46,12,3,4)
5	решетка на 16 вершинах	(16,360,90,4,18)	(473,96,20,20)
6	решетка на 36 вершинах	(36,225,50,8,10)	(322,60,14,12)
7	решетка на 100 вершинах	(100,825,132,16,20)	(1076,150,28,22)
8	решетка на 441 вершинах	(441,2940,80,12,2)	(3502,120,21,4)
9	T(9)	(36,84,14,6,2)	(149,28,9,6)
10	T(11)	(55,264,48,10,8)	(386,66,17,12)
11	T(14)	(91,195,15,7,1)	(336,39,13,5)
12	T(14)	(91,546,60,10,6)	(722,84,18,10)
13	T(15)	(105,910,104,12,11)	(1146,130,24,15)
14	T(15)	(105,520,104,21,20)	(756,130,33,24)
15	T(17)	(136,8568,378,6,14)	(9113,408,29,18)
16	T(20)	(190,513,135,50,35)	(875,171,53,39)
17	T(25)	(300,4600,414,27,36)	(5361,460,59,40)
18	T(35)	(595,22440,1056,28,48)	(24158,1122,81,52)

(3) *если Σ — полный многодольный граф $K_{r\times 2}$, граф Мура, Клебша, Шрикханде, Шлефли или один из графов Чанга, $n\times n$-решетка, $n\leq 50$, или треугольный граф $T(n)$, $n\leq 50$, то полный список допустимых параметров, не вошедших в указанную бесконечную серию, содержится в табл.* 1.

Случай, когда граф Γ из заключения теоремы 2 является дистанционно регулярным, рассматривается в § 4. Доказано, что в этом случае Σ не может быть графом Петерсена или 3×3-решеткой. Интересным представляется вопрос о существовании дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{60,45,8;1,12,50\}$. Этот массив входит в список допустимых параметров из [1], спектр графа равен $\{60^1,14^{45},0^{207},-10^{69}\}$, граф Γ является Q-полиномиальным и граф Γ_2 сильно регулярен с параметрами $(322,225,160,150)$. В лемме 4.4 доказано, что такого графа не существует, если третья окрестность каждой вершины этого графа является 6×6-решеткой (в этом случае пара $(\Gamma_3(a),\Gamma_2(a))$ является 2-схемой для любой вершины a).

§ 1. Предварительные результаты

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные результаты и доказано предложение.

Лемма 1.1. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф, имеющий параметры* (v,k,λ,μ). *Тогда либо* $k=2\mu$, $\lambda=\mu-1$ (*так называемый половинный случай*), *либо неглавные собственные значения* $n-m$, $-m$ *графа* Γ — *целые числа, где* $n^2=(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)$, $n-\lambda+\mu=2m$ *и кратность* $-m$ *равна* $\frac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$. *Далее, если* m — *целое число, большее 1, то* $m-1$ *делит* $k-\lambda-1$ *и*

$$\mu=\lambda+2+(m-1)-\frac{k-\lambda-1}{m-1},\quad n=m-1+\frac{k-\lambda-1}{m-1}.$$

Доказательство. Это лемма 3.1 из [3].

Лемма 1.2. *Пусть* Γ — *вполне регулярный граф диаметра* d *с параметрами* (v,k,λ,μ), *в котором для некоторой вершины* a *пара* $(\Gamma_i(a),\Gamma_{i-1}(a))$ *является* 2-(V,B,R,K,Λ)-*схемой. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* $\Lambda>0$ *и для некоторой вершины* $b\in\Gamma_i(a)$ *пара* $(\Gamma_i(b),\Gamma_{i-1}(b))$ *также является 2-схемой, то* $\Gamma_i(b)\subset\{a\}\cup[a]\cup\Gamma_2(a)$ (*если еще вершина* b *принадлежит геодезическому* d-*пути с началом* a, *то* $d<2i$);

(2) *если* $d=i=3$, *то*

(i) $\mu\le R$ *и* $\Gamma_2(a)$ — *регулярный граф степени* $k-\mu-K$,

(ii) *для любой вершины* $b\in[a]$ *верно равенство* $(k-\lambda-1)K=|\Gamma_2(b)\cap\Gamma_3(a)|\mu$,

(iii) *для вершины* $c\in\Gamma_l(a)$ *имеем* $|\Gamma_n(a)\cap\Gamma_m(c)|=|\Gamma_m(a)\cap\Gamma_n(c)|$, *где* $l\in\{1,3\}$ *и* $m,n\in\{1,2,3\}$,

(iv) $K\le R-\Lambda$.

Доказательство. Пусть пара $(\Gamma_i(b),\Gamma_{i-1}(b))$ для некоторой вершины $b\in\Gamma_i(a)$ также является 2-схемой. Так как $\Lambda>0$, то $\Gamma_i(b)\subset\{a\}\cup[a]\cup\Gamma_2(a)$.

Если вершина b принадлежит геодезическому d-пути $a_0a_1\dots a_d$, где $a_0=a$, $a_i=b$, то $d(a_i,a_d)<i$, поэтому $d<2i$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $d=i=3$. Положим $\Sigma=\Gamma_3(a)$. Тогда вершина из $\Gamma_2(a)$ смежна с μ вершинами из $[a]$ и K вершинами из Σ. Поэтому $\Gamma_2(a)$ — регулярный граф степени $k-\mu-K$.

Если $abcd$ — геодезический 3-путь в Γ, то $[b]\cap[d]$ содержит μ вершин из $\Gamma_2(a)$ и $\mu\le R$. Утверждение (i) доказано.

Пусть $b\in[a]$. Число ребер между $[b]\cap\Gamma_2(a)$ и $\Sigma\cap\Gamma_2(b)$ равно $(k-\lambda-1)K$. С другой стороны, каждая вершина из $\Sigma\cap\Gamma_2(b)$ смежна точно с μ вершинами из $[b]\cap\Gamma_2(a)$, и указанное число ребер равно $|\Sigma\cap\Gamma_2(b)|\mu$. Утверждение (ii) доказано.

Пусть $b\in[a]$. По утверждению (ii) имеем

$$|\Gamma_2(b)\cap\Gamma_3(a)|=K(k-\lambda-1)/\mu=|\Gamma_3(b)\cap\Gamma_2(a)|.$$

Очевидно, $|\Gamma_2(b)\cap\Gamma_1(a)|=k-\lambda-1=|\Gamma_1(b)\cap\Gamma_2(a)|$.

Пусть $d\in\Sigma$. Тогда число ребер между $[a]\cap\Gamma_2(d)$ и $[d]\cap\Gamma_2(a)$ равно $R\mu=|[a]\cap\Gamma_2(d)|\mu$. Поэтому $R=|[a]\cap\Gamma_2(d)|$. Таким образом, $|[a]\cap\Gamma_2(d)|=|[d]\cap\Gamma_2(a)|$. Отсюда $[a]-\Gamma_2(d)\subset\Gamma_3(d)$ и $|[a]-\Gamma_2(d)|=k-R+1=k'+1$. С другой стороны, $|[d]-\Gamma_2(a)|=k'+1$. Итак, $|a^\perp\cap\Gamma_3(d)|=|d^\perp\cap\Gamma_3(a)|=k'+1$. Наконец,

$$|\Gamma_2(a)\cap\Gamma_3(d)|=V-k'-1=|\Gamma_2(d)\cap\Gamma_3(a)|.$$

Утверждение (iii) доказано.

Если $c \in \Sigma$, $d \in \Sigma - c^{\perp}$, то для любой вершины $x \in \Sigma(c)$ пара d, x инцидентна Λ блокам, причем эти блоки принадлежат либо $[c] \cap \Gamma_2(a)$, либо $\Gamma_2(c) \cap \Gamma_2(a)$. Так как число ребер между $\Sigma \cap \Gamma_2(c)$ и $\Gamma_3(c) \cap \Gamma_2(a)$ равно $|\Gamma_3(c) \cap \Gamma_2(a)|K$, а $|\Sigma \cap \Gamma_2(c)| = |\Gamma_3(c) \cap \Gamma_2(a)|$, то некоторая вершина d инцидентна по крайней мере K блокам из $\Gamma_3(c) \cap \Gamma_2(a)$. Отсюда $K + \Lambda \leq R$. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть Σ — сильно регулярный граф с $\mu = 1$. Тогда окрестность любой вершины a состоит из r изолированных s-клик, где $s+1 < r$, и $s+1$ делит $r(r-1)^2$. Если $s = c^2 f$, где f свободно от квадратов, то $r - 1 = (t+c)tf$ и $2t + c$ делит многочлен $R(s)$, где $R(s) = cs(s-4)(s^2 - 2s - 4)$, если s не делится на 4, $R(s) = cs(s-4)(s^2 + 2s + 4)/16$, если s делится на 4.*

Доказательство. Заметим, что число $s+1$-клик в Σ равно $r^2(r-1)(s+1) - r^2(2r-3) + r(r-1)^2/(s+1)$. Поэтому $s+1$ делит $r(r-1)^2$. Далее, $s+1 \leq r$, а остальные утверждения леммы 1 доказаны в теореме 4 из [4]. Покажем, что $s + 1 \neq r$. В противном случае $t(t+c) = c^2$, но это уравнение не имеет целочисленных решений. Лемма доказана.

Доказательство предложения. Пусть Γ — вполне регулярный граф диаметра d с параметрами (v, k, λ, μ) и для некоторой вершины $a \in \Gamma$ пара $(\Gamma_d(a), \Gamma_{d-1}(a))$ является 2-(V, B, R, K, Λ)-схемой. Положим $\Sigma = \Gamma_d(a)$, $k_i = |\Gamma_i(a)|$.

В 2-схеме $(\Sigma, \Gamma_{d-1}(a))$ каждая точка u инцидентна $R = c_d(a, u) = k - k'$ блокам, где k' — степень графа Σ. Каждый блок B инцидентен $K = b_{d-1}(a, B)$ точкам. Для любых двух смежных вершин b, c графа Σ получим равенство $|\Sigma(b) \cap \Sigma(c)| = \lambda - \Lambda$, а для несмежных — равенство $|\Sigma(b) \cap \Sigma(c)| = \mu - \Lambda$. Таким образом, подграф Σ либо является кликой или кокликой, либо сильно регулярен с $\lambda' = \lambda - \Lambda$, $\mu' = \mu - \Lambda$. Предложение доказано.

§ 2. Блок-схемы в графах диаметра 3

В этом параграфе доказана теорема 1, а также более подробно рассмотрены схемы во вполне регулярных графах диаметра 3.

Лемма 2.1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d и для некоторой вершины $a \in \Gamma$ подграф $\Gamma_d(a)$ является кликой, кокликой или сильно регулярным графом с параметрами (v', k', λ', μ'), где $\lambda - \lambda' = \mu - \mu'$. Тогда пара $(\Gamma_d(a), \Gamma_{d-1}(a))$ является 2-схемой.*

Доказательство. По условию любая точка $x \in \Gamma_d(a)$ инцидентна c_d блокам, а любой блок инцидентен b_{d-1} точкам. Положим $k_i = |\Gamma_i(a)|$.

Пусть x, y — две точки из $\Gamma_d(a)$. Если $\Gamma_d(a)$ является кликой, то x, y инцидентны $\lambda - (k_d - 2)$ блокам. Если $\Gamma_d(a)$ является кокликой, то x, y инцидентны 0 (в антиподальном случае) или μ блокам. Если же $\Gamma_d(a)$ является сильно регулярным графом с параметрами (v', k', λ', μ'), где $\lambda - \lambda' = \mu - \mu'$, то x, y инцидентны $\mu - \mu'$ общим блокам. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Ввиду леммы 2.1 достаточно доказать, что из (2) следует (1). Заметим, что $b_0 = k$, $a_1 = \lambda$, $c_2 = \mu$ в любом вполне регулярном графе. Далее, $c_3 = R$ и $b_2 = K$. Теорема доказана.

До конца параграфа будем предполагать, что Γ — вполне регулярный граф диаметра 3 с параметрами (v, k, λ, μ) и для некоторой вершины $a \in \Gamma$ пара $(\Gamma_3(a), \Gamma_2(a))$ является 2-схемой. Положим $\Sigma = \Gamma_3(a)$, $k_i = |\Gamma_i(a)|$.

Лемма 2.2. *Пусть пара* $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ *является симметричной* 2-(V, K, Λ)-*схемой. Тогда* $k = k_2$ *и* Γ *является семиугольником.*

Доказательство. По условию $R = K$, и по предложению $R = c_3(a, x)$ для $x \in \Gamma_3(a)$, $K = b_2(a, y)$ для $y \in \Gamma_2(a)$. Напомним, что в графе диаметра 3 имеем $k_2 \geq k$, причем в случае равенства по теореме 1.5.5 из [1] Γ является многоугольником или графом Тейлора. Однако в случае графа Тейлора $k = k_2 = k_3 = 1$; противоречие. Если Γ является n-угольником, то с учетом равенства $k_2 = k_3$ получим $n = 7$. Пусть $k_2 > k$.

Докажем, что $V = k(k-\lambda-1)/\mu$, $\Lambda = K(K-1)\mu/(k^2-k\lambda-k-\mu)$ и подграф Σ является сильно регулярным с параметрами $v' = V$, $k' = k - K$, $\lambda' = \lambda - \Lambda$, $\mu' = \mu - \Lambda$.

Ввиду прямоугольного соотношения имеем $V = k(k - \lambda - 1)/\mu$. Далее,

$$\Lambda = \frac{R(K-1)}{V-1} = \frac{K(K-1)\mu}{k^2 - k\lambda - k - \mu}.$$

Если подграф $\Gamma_3(a)$ является кокликой, то $K = R = k$ и вершина из $\Gamma_2(a)$ не смежна с вершинами из $[a]$; противоречие. Если подграф $\Gamma_3(a)$ является кликой, то $k_3 = k + 1$ и между $\Gamma_2(a)$ и $\Gamma_3(a)$ нет ребер; противоречие.

Итак, $\Gamma_3(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами $v' = V$, $k' = k - K$, $\lambda' = \lambda - \Lambda$, $\mu' = \mu - \Lambda$.

Из прямоугольного соотношения для графа Σ следует, что

$$V = 1 + (k-K) + \frac{(k-K)(k-K-\lambda+\Lambda-1)}{\mu-\Lambda} = 1 + \frac{(k-K)(k-K-\lambda+\mu-1)}{\mu-\Lambda}.$$

Подставляя в это равенство выражения для V и для Λ, получим

$$(k-K)(k-K-\lambda+\mu-1) = k(k-\lambda-1) - \mu - K(K-1)$$

и $2K^2 - K(2k + \mu - \lambda) + \mu(k+1) = 0$.

Допустим, что $\Lambda = 0$. Тогда $R = K = 1$ и ввиду леммы 1.2 имеем $\mu = 1$. Если в равенстве из предыдущего абзаца $K = \mu = 1$, то $k = \lambda + 2$ и по следствию 1.1.6 из [1] граф Γ является многоугольником или графом Тейлора; противоречие с тем, что $k < k_2$. Значит, $\Lambda > 0$. Противоречие с тем, что по утверждению (iv) леммы 1.2 имеем $K \leq R - \Lambda$.

Лемма 2.3. *Если* $\lambda = 0$, *то выполняется одно из утверждений:*

(1) Σ *является кликой и* Γ — *семиугольник или граф Тейлора, полученный удалением из* $K_{2\times(k+1)}$ *максимального паросочетания;*

(2) Σ *является кокликой,* $k = R$, $|\Sigma| = (k-1)/\mu > 1$ *и* $\Lambda = 0$.

Доказательство. Пусть $\lambda = 0$. Тогда $B = k_2 = k(k-1)/\mu$.

Если Σ не является кокликой, то $\Lambda = 0$, $K = 1$ и либо $|\Sigma| \leq 2$, либо Σ — сильно регулярный граф без треугольников. Если $|\Sigma| = 1$, то Γ — граф Тейлора. В случае $\Sigma = \{u, w\}$ ввиду равенства $k_2 = k(k-1)/\mu$ получим $k = 2\mu$. Если $k = 2$, то Γ — семиугольник. Если же $k \geq 4$ (и $\mu > 2$), то для $b \in \Gamma_2(a)$ и различных $c, d \in \Gamma_2(a) \cap [b]$ подграф $[c] \cap [d]$ содержит b и μ вершин из $[a] - [b]$; противоречие. Утверждение (1) доказано.

Пусть Σ является кокликой. Тогда $k = R$, $\Lambda = 0$, Γ является антиподальным графом и $K = 1$. Случай $|\Sigma| = 1$ рассмотрен выше. Так как $VR = BK$, то $|\Sigma| = (k-1)/\mu$.

Лемма 2.4. *Пусть $V > 1$ и $\lambda > 0$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(a) *если Σ является кликой, то $R = (V-1)(\lambda-V+2)/(K-1)$, $k = R+V-1$ и $\Lambda = \lambda - V + 2$;*

(b) *если Σ является кокликой, то $R = k, \Lambda = \mu$, $K = (k-\mu)/(\lambda+1)$ и $V = (k-\lambda-1)/\mu \cdot (k-\mu)/(\lambda+1)$;*

(c) *если Σ является сильно регулярным графом с параметрами (v', k', λ', μ'), то $V = v'$, $R = k - k'$, $\Lambda = \mu - \mu' = \lambda - \lambda'$ и k делит VR.*

Доказательство. Пусть Σ — клика. Тогда $R = V(\lambda - V + 1)/(K-1)$, $k = R + V - 1$ и $\Lambda = \lambda - V + 2$.

Пусть Σ — коклика. Тогда $R = k$, $\Lambda = \mu$ и равенства $VR = BK$ и $(V-1)\Lambda = R(K-1)$ принимают вид $V\mu = (k-\lambda-1)K$ и $(V-1)\mu = k(K-1)$. Подставляя $V\mu = (k-\lambda-1)K$ в последнее равенство, получим $K(k-\lambda-1)-\mu = k(K-1)$, $K = (k-\mu)/(\lambda+1)$ и $V = (k-\lambda-1)/\mu \cdot (k-\mu)/(\lambda+1)$.

Пусть Σ — сильно регулярный граф с параметрами (v', k', λ', μ'). Тогда $V = v'$, $R = k - k'$, $\Lambda = \mu - \mu' = \lambda - \lambda'$.

Подсчитав B двумя способами, получим $V(k-k')/K = k(k-\lambda-1)/\mu$. По лемме 1.2 параметр μ делит $K(k-\lambda-1)$, поэтому число $VR/k = (k-\lambda+1)K/\mu$ является целым.

Лемма 2.5. *Пусть $R = K + \Lambda$. Тогда либо Γ — семиугольник, либо $\lambda = 0$ и $\Gamma_3(a)$ — коклика.*

Доказательство. Положим $\Sigma = \Gamma_3(a)$. Если Σ — коклика, то по лемме 2.4 имеем $k = R$, $K = (k-\mu)/(\lambda+1)$ и $\Lambda = \mu$. Поэтому $k-\mu = (k-\mu)/(\lambda+1)$ и $\lambda = 0$.

Если Σ — клика, то по лемме 2.4 получим $R = (V-1)(\lambda-V+2)/(K-1)$, $k = R + V - 1$ и $\Lambda = \lambda - V + 2$. Отсюда $K = \Lambda((V-1)/(K-1)-1)$ и $K(K-1) = (V-K)\Lambda$. С другой стороны, $R = k - V + 1 = K + (\lambda - V + 2)$ и $K = k-\lambda-1$. Поэтому для $c \in \Gamma_2(a)$ и $b \in [a]\cap[c]$ подграф $\Gamma_2(a)\cap[c]$ содержится в $[b]$.

Допустим, что $\Gamma_2(a)$ содержит ребро $\{c, d\}$. Содержащая c связная компонента Φ графа $\Gamma_2(a)$ содержится в $[b]$ для любой вершины $b \in [a]\cap[c]$. Поэтому Φ является кликой, иначе для геодезического 2-пути cde графа Φ подграф $[c]\cap[e]$ содержит d и μ вершин из $[a]$. Так как граф $\Gamma_2(a)$ является регулярным степени $k-\mu-K$, то $|\Phi| = \lambda + 2 - \mu$ и $c^\perp \cap d^\perp$ содержит μ вершин из $[a]$, $\lambda + 2 - \mu$ вершин из Φ и не пересекает Σ.

Если для $c \in \Gamma_2(a)$ найдется вершина $e \notin \Sigma\cap[c]$, то подграф $[c]\cap[e]$ содержит K вершин из Σ и $\mu \geq K$. Отсюда $k \leq \lambda + \mu + 1$ и по теореме 1.5.5 из [1] Γ является многоугольником или графом Тейлора; противоречие. Значит, $\Sigma \subset [c]$ для любой вершины $c \in \Gamma_2(a)$; противоречие с доказанным в предыдущем абзаце. Итак, $\Gamma_2(a)$ является кокликой.

Пусть $c \in \Gamma_2(a)$, $e \in \Sigma\cap[c]$. Тогда $[e]\cap[c]$ содержит только $K-1$ вершин из Σ. Отсюда $\lambda = K - 1 = k - \lambda - 2$ и $k = 2\lambda + 2 = 2K$. По лемме 1.2 граф $\Gamma_2(a)$ является регулярным степени $k - \mu - K$, поэтому $\mu = K = \lambda + 1$ и $k_2 = k$. По теореме 1.5.5 из [1] Γ является многоугольником или графом Тейлора. Однако в случае графа Тейлора получим $V = K = 1, \Lambda = 0$, поэтому $R = 1$; противоречие с леммой 2.2. Итак, если Σ — клика, то Γ — семиугольник.

Пусть Σ — сильно регулярный граф, $c \in \Sigma$, $d \in \Sigma_2(c)$. По лемме 1.2 вершина d смежна точно с K вершинами из $\Gamma_2(a)\cap\Gamma_3(c)$. Поэтому d смежна точно с Λ

вершинами из $\Gamma_2(a)-\Gamma_3(c)$ и указанные Λ вершин смежны с каждой вершиной из $\{c\}\cup\Sigma(c)$ по определению схемы.

Положим $\sigma_2=|\Sigma_2(c)|$. По лемме 1.2 имеем $\sigma_2=|\Gamma_2(a)\cap\Gamma_3(c)|$. Поэтому число ребер между $\Gamma_2(a)-\Gamma_3(c)$ и $\{c\}\cup\Sigma(c)$ равно $(B-\sigma_2)(V-\sigma_2)=(V-\sigma_2)R$. Отсюда $B-\sigma_2=R$.

Далее, число ребер между $\Gamma_2(a)-\Gamma_3(c)$ и $\Sigma_2(c)$ равно $(B-\sigma_2)(K-V+\sigma_2)=\sigma_2\Lambda$. Напомним, что $\Lambda=R(K-1)/(V-1)$, поэтому $(K-V+\sigma_2)=\sigma_2(K-1)/(V-1)$ и $K-V=\sigma_2(K-V)/(V-1)$. Отсюда $\sigma_2=V-1$ и Σ — коклика; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Если Σ — сильно регулярный граф, то $\Lambda>0$.*

Доказательство. Пусть $\Lambda=0$ и Σ — сильно регулярный граф с параметрами (V,k',λ,μ). Тогда $K=1$ и

$$B=\frac{(k'+R)(k'+R-\lambda-1)}{\mu}=\frac{1+k'+k'(k'-\lambda-1)}{\mu}R.$$

Получаем квадратное уравнение относительно R:

$$R^2-R(k'(k'-\lambda-1)+\mu(k'+1)-k'-(k'-\lambda-1))+k'(k'-\lambda-1)=0.$$

Пусть R и R' — корни этого квадратного уравнения. Тогда

$$R+R'=k'(k'-\lambda-1)+\mu(k'+1)-k'-(k'-\lambda-1),\quad RR'=k'(k'-\lambda-1).$$

Отсюда

$$(R+R')-RR'=\mu(k'+1)-k'-(k'-\lambda-1).$$

Если $R>2$, то $\mu(k'+1)-k'-(k'-\lambda-1)<0$ и $\mu<2$, откуда $\mu=1$.

Покажем, что в графе с $\mu=1$ имеем $\Lambda>0$. По лемме 1.3 найдутся такие натуральные числа r,s, что для любой вершины $b\in\Sigma$ подграф $\Sigma(b)$ является объединением r изолированных s-клик, $r>s+1$. Отсюда $k'=rs$ и $\lambda=s-1$.

Положим $R=\alpha rs$. Тогда $k=(\alpha+1)rs$. Подсчитав B как VR/K и как $k(k-\lambda-1)/\mu$, получим уравнение

$$\alpha^2-\alpha(rs+s+1-(s-1)/(rs))-1/r=0. \qquad (*)$$

Если α и α' — корни этого уравнения, то $\alpha\alpha'=-1/r$ и $\alpha+\alpha'=rs+s+1-(s-1)/(rs)$. Случай графов Мура ($s=1$) рассмотрен в следующем параграфе, и в этом случае $\Lambda>0$. Пусть $s>1$. Тогда для $\alpha=ys$ имеем $\alpha'=rs-ys+s+1-(s-1)/(rs)$. Перемножив эти равенства, получим $y^2-y(r+1+(rs-s+1)/(rs^2))+1/(rs^2)=0$ и $y-1=zs$. Если y и y' — корни этого квадратного уравнения, то $yy'=1/(rs^2)$ и $y+y'=r+1+(rs-s+1)/(rs^2)$. Отсюда $rs-s=0$ и $zs+1=1$; противоречие с тем, что $r>s+1$.

Значит, $R=2$ и $2-R'=\mu(k'+1)-k'-(k'-\lambda-1)$. Если $R'>2$, то снова $\mu=1$. Поэтому R' равно 1 или 2.

Пусть $R'=1$. Тогда $\mu(k'+1)-k'-(k'-\lambda-1)=1$ и $(\mu-2)k'+\mu+\lambda=0$. Опять $\mu=1$; противоречие.

Итак, $R'=2$ и $\mu(k'+1)-k'-(k'-\lambda-1)=0$. Отсюда $\mu=1$. Лемма доказана.

§ 3. Графы Зейделя и блок-схемы

Рассматривается вполне регулярный граф Γ диаметра 3, в котором для некоторой вершины a подграф $\Sigma = \Gamma_3(a)$ сильно регулярен и пара $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ является 2-схемой.

В этом параграфе изучен случай, когда Σ — спорадический граф Зейделя, т. е. граф Петерсена, Шрикханде, Клебша, Шлефли или один из трех графов Чанга. В случае графа Петерсена удалось рассмотреть более общую ситуацию.

Лемма 3.1. *Пусть Σ является графом Мура. Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) Σ — *граф Петерсена,* Γ *имеет параметры* $(56, 15, 4, 5)$ *и схема* $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ *имеет параметры* $(10, 30, 12, 4, 4)$*;*

(2) Σ — *граф Хофмана — Синглтона,* Γ *имеет параметры* $(1276, 175, 24, 25)$ *и схема* $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ *имеет параметры* $(50, 1050, 168, 8, 24)$.

Доказательство. Пусть Σ является графом Мура. Тогда Σ имеет параметры $(v', k', 0, 1)$, где k' равно 2, 3, 7 или 57.

Положим $R = \alpha k'$, $K = \beta k' + 1$. Тогда $\lambda = \Lambda = \alpha\beta$, $\mu = \alpha\beta + 1$, $k = (\alpha+1)k'$ и $B = \alpha k'(k'^2 + 1)/(\beta k' + 1)$.

Из неравенства $K < R$ следует $\beta + 1/k' < \alpha$. Так как $k - \lambda - 1 \le \mu$, то $k' \ge 2(\alpha\beta+1)/(\alpha+1)$. Отсюда $\beta \le k'/2 + (k'-2)/(2\alpha)$, причем в случае равенства Γ — граф Тейлора (и $\Lambda = 0$). По лемме 2.4 число $k = (\alpha+1)k'$ делит $V\alpha k'$.

Подсчитав B как VR/K и как $k(k-\lambda-1)/\mu$, получим уравнение

$$\alpha^2(\beta^2 k' + 2\beta - k') + \alpha(\beta^2 k' - \beta(2k'^2 - k' - 1) + k'^2 - 2k' + 2) - (k'-1)(\beta k' + 1) = 0. \quad (*)$$

Пусть $k' = 2$. Тогда $\beta \le 1$, причем в случае равенства будет $\alpha = 0$; противоречие.

Если $\beta = 0$, то $\lambda = 0$; противоречие с леммой 2.6. Если $\beta = 1/2$, то $B = 5\alpha = 4(\alpha+1)^2/(\alpha/2+1) - 2(\alpha+1)$; противоречие с тем, что тогда $\alpha^2 + 4 = 0$.

Пусть $k' = 3$. Тогда $\beta \le 3/2 + 1/(2\alpha)$. Так как минимальное значение α равно $2/3$, то $0 < \beta < 9/4$.

Из уравнения $(*)$ при $k' = 3$ получим $\alpha^2(3\beta^2 + 2\beta - 3) + \alpha(3\beta^2 - 14\beta + 5) - 6\beta - 2 = 0$. Для $\beta \in \{1/3, 2/3, 1, 4/3, 5/3, 6/3\}$ это уравнение имеет единственное решение $\alpha = 4, \beta = 1$. При этом граф Γ имеет параметры $(56, 15, 4, 5)$, а схема $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ — параметры $(10, 30, 12, 4, 4)$.

Пусть $k' = 7$. Тогда $\beta \le 1/7 + 5/(2\alpha)$. Так как $\alpha > \beta > 1/7$, то $0 < \beta < 21$.

Из уравнения $(*)$ при $k' = 7$ получим

$$\alpha^2(7\beta^2 + 2\beta - 7) + \alpha(7\beta^2 - 90\beta + 37) - 42\beta - 6 = 0.$$

Для $0 < \beta < 21$ это уравнение имеет единственное решение $\alpha = 24$, $\beta = 1$. При этом граф Γ имеет параметры $(1276, 175, 24, 25)$ и схема $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ — параметры $(50, 1050, 168, 8, 24)$.

Пусть $k' = 57$. Тогда $2(\alpha\beta + 1) \le 57\alpha + 57$, поэтому $\beta \le 1/57 + 55/(2\alpha)$. Так как $\alpha > \beta - 1 > 1/57$, то $0 < \beta < 55/2$.

Подставив $k' = 57$ в уравнение $(*)$, получим

$$\alpha^2(57\beta^2 + 2\beta - 57) + \alpha(57\beta^2 - 6440\beta + 3137) - 3192\beta - 56 = 0.$$

Для $0 < \beta < 55/2$ это уравнение не имеет решений.

Лемма 3.2. *Если* Σ *является графом Клебша, Шрикханде, Шлефли или одним из графов Чанга, то* Σ — *граф Шрикханде, схема* $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ *имеет параметры* $(16, 360, 90, 4, 18)$, *а граф* Γ — *параметры* $(473, 96, 20, 20)$.

Доказательство. Так как $R = k - k'$ и k делит VR, то Vk' делится на k.

Если Γ — граф Клебша, то $V = 16$, $k' = 10$ и k делит 160. Если Γ — граф Шрикханде, то $V = 16$, $k' = 6$ и k делит 96. Если Γ — граф Шлефли, то $V = 27$, $k' = 16$ и k делит $2^4 3^3$. Если Γ — граф Чанга, то $V = 28$, $k' = 12$ и k делит $2^4 3 \cdot 7$.

Подставив $K = 1 + \Lambda(V-1)/R$, $\lambda = \lambda' + \Lambda$, $\mu = \mu' + \Lambda$ и $k = k' + R$ в равенство $k(k - \lambda - 1)/\mu = VR/K$, получим квадратное уравнение относительно Λ:

$$\Lambda^2(V-1)k + \Lambda(VR^2 + Rk - (V-1)(k - \lambda' - 1)k) + VR^2\mu' - Rk(k - \lambda' - 1) = 0.$$

Решая это уравнение для заданного R, находим Λ и остальные параметры схемы. Для примера подробно рассмотрим графы Шрикханде и Чанга.

Если Γ — граф Шрикханде, то $k \in \{8, 16, 32, 12, 24, 48, 96\}$. Поэтому $R \in \{2, 6, 10, 18, 26, 42, 90\}$. При $R = 2$ имеем $15\Lambda^2 - 65\Lambda + 6 = 0$ и $65^2 - 4 \cdot 15 \cdot 6$ не является квадратом. Аналогично указанное квадратное уравнение не имеет целочисленных решений при $R < 90$. При $R = 90$ будет $\Lambda^2 + 3\Lambda - 378 = 0$ и $\Lambda = 18$. В этом случае выполняется заключение леммы.

Если Γ — граф Чанга, то $k \in \{16, 24, 48, 14, 28, 56, 112, 21, 42, 84, 168, 336\}$. Поэтому $R \in \{2, 4, 9, 12, 16, 30, 36, 44, 72, 100, 156, 324\}$. Например, при $R = 30$ получим $27 \cdot 42\Lambda^2 - 126 \cdot 105\Lambda + 450 \cdot 126 = 0$ и дискриминант этого уравнения отрицателен.

Лемма 3.3. *Если* Σ *является полным многодольным графом* $K_{r\times 2}$, *то пара* $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ *не является* 2*-схемой.*

Доказательство. Для $c \in \Sigma$ по лемме 1.2 найдется вершина из $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_3(c)$, смежная с K вершинами из $\Sigma_2(c)$. Поэтому $K \le V - 1 - k'$.

Если Σ является полным многодольным графом $K_{r\times 2}$, то $V - 1 - k' = 1$, $K = 1$ и $\Lambda = 0$; противоречие с леммой 2.6.

Лемма 3.4. *Пусть* Σ *является* $n \times n$*-решеткой. Тогда* $\Lambda > 0$ *и* $K > 1$. *Если* $n \le 6$, *то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $n = 3$ *и либо схема* $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ *имеет параметры* $(9, 36, 8, 2, 1)$, *а граф* Γ — *параметры* $(58, 12, 2, 3)$, *либо схема* $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ *имеет параметры* $(9, 24, 8, 3, 2)$, *а граф* Γ — *параметры* $(46, 12, 3, 4)$;

(2) $n = 4$, *схема* $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ *имеет параметры* $(16, 360, 90, 4, 18)$, *а граф* Γ — *параметры* $(473, 96, 20, 20)$;

(3) $n = 5$, *схема* $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ *является* 2*-схемой Штейнера с параметрами* $(25, 100, 12, 3, 1)$, *а граф* Γ *имеет параметры* $(146, 20, 4, 3)$;

(4) $n = 6$, *схема* $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ *имеет параметры* $(36, 225, 50, 8, 10)$ *и граф* Γ — *параметры* $(322, 60, 14, 12)$.

Доказательство. Пусть Σ является $n \times n$-решеткой. Тогда $V = n^2$, $k' = 2(n-1)$, $\lambda' = n - 2$ и $\mu' = 2$. По лемме 2.3 число $k = R + 2(n-1)$ делит VR.

Подсчитав B двумя способами, получим равенство

$$\frac{n^2 R}{R + 2(n-1)} = \frac{((n^2-1)\Lambda/R + 1))(R + n - 1 - \Lambda)}{\Lambda + 2}. \qquad (*)$$

Если $n = 2$, то $VR/k = 4R/(R+2)$. Так как $R \ge 3$, то $R = 6$, $k = 8$, $\Lambda = 2(K-1)$ и $K(9 - 2K)/(2K) = 3$; противоречие. Пусть $n = 3$. Тогда

$VR/k = 9R/(R+4)$ и k равно $9, 12, 18$ или 36. Соответственно R равно $5, 8, 14$ или 32. Далее, $8\Lambda = R(K-1)$, и если $R = 8$, то $\Lambda = K-1$ и $K(11-K)/(K+1) = 6$. Если $K = 2$, то схема $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ имеет параметры $(9, 36, 8, 2, 1)$, а граф Γ — параметры $(58, 12, 2, 3)$. Если же $K = 3$, то схема $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ имеет параметры $(9, 24, 8, 3, 2)$, а граф Γ — параметры $(46, 12, 3, 4)$.

Если $R = 14$, то $4\Lambda = 7(K-1)$, $\Lambda = 7$ и $K = 5$; противоречие с тем, что $K(k-\lambda-1)/\mu = 7 = 5 \cdot 9/9$. Если $R = 32$, то $\Lambda = 4(K-1)$, $K(38-4K)/(4K-2) = 8$ и $2K^2 - 3K - 8 = 0$; противоречие. Итак, в случае $n = 3$ выполняется утверждение (1).

Пусть $n = 4$. Тогда $VR/k = 16R/(R+6)$ и k равно $12, 16, 24, 32, 48$ или 96. Соответственно R равно $6, 10, 18, 26, 42$ или 90. Далее, $15\Lambda = R(K-1)$, и если R не делится на 5, то $K-1$ делится на 5 и $R \neq 6$. Если $R = 18$, то K равно 6 или 11, Λ равно 6 или 12 соответственно. Но в последнем случае имеем $K + \Lambda > R$; противоречие с леммой 1.2. Поэтому схема $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ имеет параметры $(16, 48, 18, 6, 6)$, а Γ — параметры $(89, 24, 8, 8)$; противоречие с тем, что тогда $|\Gamma_2(a)| = 45$. Если $R = 26$, то $K = 16$ и $\Lambda = R$; противоречие. Если $R = 42$, то $5\Lambda = 14(K-1)$, $K = 6$ или 11, $\Lambda = 14$ или 28 соответственно. В первом случае схема $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ имеет параметры $(16, 112, 42, 6, 14)$, а Γ — параметры $k = 48$, $\lambda = \mu = 8$; противоречие с тем, что тогда $|\Gamma_2(a)| = 234$. Во втором случае $VR/K = 16 \cdot 42/11$; противоречие.

Пусть $R = 10$. Тогда $3\Lambda = 2(K-1)$ и равенство $(*)$ принимает вид $20(\Lambda + 2) = (3\Lambda+2)(13-\Lambda)$. Если $3\Lambda+2$ делится на 10, то $\Lambda = 6$ и $K = 10$; противоречие. Значит, $(13-\Lambda)$ делится на 5, $\Lambda = 8$ и $K = 13$; противоречие.

Пусть $R = 90$. Тогда $\Lambda = 6(K-1)$ и равенство $(*)$ принимает вид $90(\Lambda+2) = (\Lambda+6)(93-\Lambda)$. Отсюда $\Lambda = 18$ и выполняется утверждение (2) из заключения леммы.

Аналогично рассматриваются случаи $n = 5$ и $n = 6$. Лемма доказана.

Замечание 1. Пусть Σ является $n \times n$-решеткой. Положим $R = \alpha(n+1)$ и $K = \beta(n-1)+1$. Тогда $\Lambda = \alpha\beta$, $\lambda = n-2+\alpha\beta$, $\mu = 2+\alpha\beta$ и $k = \alpha(n+1) + 2(n-1)$. Так как $R \geq \mu$, то $\beta \leq n+1-2/\alpha$. Поскольку $k-\lambda-1 \geq \mu$, то $\beta \leq (n+1)/2 + (n-2)/(2\alpha)$. В новых обозначениях равенство $(*)$ принимает вид

$$\alpha^2 \left((n+1)^2 - \beta(n-1) - \frac{\beta(n+1)n^2}{\beta(n-1)+1}\right) + \alpha\left(3(n^2-1) - 2\beta(n-1) - \frac{2(n+1)n^2}{\beta(n-1)+1}\right) 2(n-1)^2 = 0.$$

Это равенство становится линейным относительно α, если

$$((n+1)^2 - \beta(n-1))(\beta(n-1)+1) = \beta(n+1)n^2.$$

Указанное квадратное уравнение относительно β имеет два корня $\beta' = -(n+1)/(n-1)$ и $\beta = 1$. Подставляя $\beta = 1$ в равенство $(*)$, получим $\alpha = -2(n-1)^2/(n^2-4n-1)$. Отсюда $n = 4$ и возникает схема с полученными выше параметрами $(16, 360, 90, 4, 18)$.

Заметим, что квадратное уравнение $(*)$ имеет целочисленные решения для $R = \alpha(n+1)$ при $\beta = 1/2$ и при $\beta = (n+1)/(n-1)$.

Пусть $\beta = 1/2$. Тогда равенство $(*)$ принимает вид

$$(3n+1)\alpha^2 - 2(n^2+n+2)\alpha + 4(n-1)^2 = 0.$$

Если α и α' — корни этого уравнения, то $\alpha = 2$ и $\alpha' = 2(n-1)^2/(3n+1)$. В последнем случае $3n+1$ делит 32, $3n+1 = 16$, $n = 5$ и $\alpha' = 2$. При $\alpha = 2$ возникает бесконечная серия 2-схем Штейнера с параметрами $(n^2, 4n^2, 2(n+1), (n+1)/2, 1)$, где n нечетно. Этим схемам соответствуют графы с параметрами $(5n^2+4n+1, 4n, n-1, 3)$.

Пусть $\beta = (n+1)/(n-1)$. Тогда равенство $(*)$ превращается в следующее равенство относительно $R = \alpha(n+1)$:

$$4R^2 - R(n-1)(n^2+n-10) - 2(n-1)^3(n+2) = 0.$$

Отсюда $R = (n-1)^2(n+2)/4$ и $k = 2(n-1)+(n+2)(n-1)^2/4$. Так как k делит VR, то n^2+n+6 делит $n^2(n+2)(n-1)$ и n^2+n+6 делит $2^5 3^2$. Отсюда либо $n = 5$ и схема $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ имеет параметры $(25, 100, 28, 7, 7)$, либо $n = 6$ и схема $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ имеет параметры $(36, 225, 50, 8, 10)$.

С помощью компьютерных вычислений для $n \leq 50$ найдены все возможные значения параметров схем $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ и графов Γ (не входящих в указанную бесконечную серию): $n = 10$, схема имеет параметры $(100, 825, 132, 16, 20)$, а граф — параметры $(1076, 150, 28, 22)$; $n = 21$, схема имеет параметры $(441, 2940, 80, 12, 2)$, а граф — параметры $(3502, 120, 21, 4)$.

Лемма 3.5. *Если Σ — треугольный граф $T(n)$, $n \leq 8$, то пара $(\Sigma, \Gamma_2(a))$ не является 2-схемой.*

Доказательство. Пусть Σ — треугольный граф $T(n)$, $n \geq 5$. Тогда Σ имеет параметры $k' = 2(n-2)$, $\lambda' = n-2$, $\mu' = 4$. Рассмотрим подробно случай $T(n)$ при $n = 8$ (при $5 \leq n \leq 7$ легко показать, что схемы не возникают). Тогда $V = 28$, $k' = 12$, $\lambda' = 6$, $\mu' = 4$ и $|\Sigma_2(c)| = 15$ для $c \in \Sigma$. Значит, $K < 15$.

Ввиду утверждения (c) леммы 2.4 имеем сравнение $28 \cdot 12 \equiv 0 (\operatorname{mod} k)$. Отсюда $k \in \{14, 16, 21, 24, 28, 42, 48, 56, 84, 112, 168, 336\}$ и $R \in \{2, 4, 9, 12, 16, 30, 36, 44, 72, 100, 156, 324\}$.

Равенство $\Lambda(V-1) = R(K-1)$ влечет $27\Lambda = R(K-1)$, и если $R < 30$, то либо $R = 9$ и K равно 4 или 7, либо $R = 12$ и $K = 10$. В случае $R = 9$, $K = 7$ имеем $K + \Lambda = R$; противоречие с леммой 2.5. Если $R = 9$, $K = 4$, то $\Lambda = 1$ и $B = VR/K = 28 \cdot 9/4 = 63$. С другой стороны, $B = 21(21-7-1)/5$; противоречие. Если $R = 12$, $K = 10$, то $\Lambda = 4$ и $B = VR/K = 28 \cdot 12/10$; противоречие.

Если $R = 30$, то $9\Lambda = 10(K-1)$. Так как $K + \Lambda < R$, то $\Lambda = 10 = K$. С одной стороны, $B = VR/K = 28 \cdot 30/10 = 84$, а с другой — $B = k(k-\lambda-1)/\mu = 42(42-17)/14 = 75$; противоречие.

Если $R = 36$, то $3\Lambda = 4(K-1)$ и $K = 3/4\Lambda + 1$. Так как $K + \Lambda < R$, то $\Lambda = 4, 8, 12, 16$ и $K = 4, 7, 10, 13$ соответственно. Напомним, что VR делится на K, поэтому два последних случая невозможны. В случае $K = \Lambda = 4$ имеем $B = VR/K = 28 \cdot 36/4 = 252$, а с другой стороны, $B = 48(48-11)/8 = 222$; противоречие. В случае $\Lambda = 8$, $K = 7$ будет $B = VR/K = 144$, а с другой стороны, $B = 48(48-15)/12 = 132$; противоречие.

Если $R = 44$, то $27\Lambda = 44(K-1)$ и Λ делится на 44; противоречие с тем, что $K + \Lambda < R$.

Если $R = 72$, то $3\Lambda = 8(K-1)$ и $K = 3/8\Lambda + 1$. Так как $K + \Lambda < R$, то $\Lambda < 51$. Отсюда $\Lambda = 8, 16, 24, 32, 40, 48$ и $K = 4, 7, 10, 13, 16, 19$ соответственно. Напомним, что $K < 15$ и VR делится на K, поэтому возможны лишь два первых случая. Если $\Lambda = 8$, то $B = VR/K = 504$, а с другой стороны, $B = 84(84 -$

$15)/12 = 483$. Если же $\Lambda = 16, K = 7$, то $B = VR/K = 288$, а с другой стороны, $B = 84(84 - 23)/20$; противоречие.

Если $R = 100$, то $27\Lambda = 100(K-1)$ и Λ делится на 100; противоречие. Если $R = 156$, то $9\Lambda = 52(K-1)$ и либо $\Lambda = 52, K = 10$ и VR не делится на K, либо $\Lambda = 104$ и $K = 19$; снова противоречие.

Если $R = 324$, то $\Lambda = 12(K-1)$. В этом случае, подсчитав B двумя способами, получим $28 \cdot 324/K = (324+12)(324+12-6-12(K-1)-1)/(4+12(K-1))$ и $12K^2 - 17K - 216 = 0$; противоречие с тем, что это квадратное уравнение не имеет целых корней. Лемма доказана.

Замечание 2. Пусть Σ является треугольным графом $T(n)$. Положим $R = \alpha(n-2)$, $K = \beta(n+1)+1$. Тогда $\Lambda = 2\alpha\beta$, $k = 2(n-2)+\alpha(n-2)$, $\lambda = 2\alpha\beta+n-2, \mu = 4+2\alpha\beta$. Подсчитав двумя способами B, получим уравнение

$$\alpha^2((n-2-2\beta)(\beta n+\beta+1)-\beta n(n-1))+\alpha((3n-7-4\beta)(\beta n+\beta+1) \\ -2n(n-1))+2(n-3)(\beta n+\beta+1)=0. \quad (*)$$

Это уравнение становится линейным при $\beta = (-1+\sqrt{n(n-1)/2})/(n+1)$. В таком случае $K = \sqrt{n(n-1)/2}$ и $\alpha = 2(3-n)K/((3n-7-4\beta)K - 2n(n-1))$. Первые значения n, при которых K является целым, это 9 и 50. Но при $n > 48$ параметр α отрицателен. В случае $n = 9$ получим $\beta = 1/2$, $\alpha = 2$, $R = 14$, $K = 6$ и $\Lambda = 2$. Далее, $k = 28$, $\lambda = 9$, $\mu = 6$.

С помощью компьютерных вычислений найдены все возможные параметры 2-схем и графов при $\Sigma = T(n)$ и $n \le 50$:
$n = 9$: 2-(36,84,14,6,2)-схема и граф с параметрами (149,28,9,6);
$n = 11$: 2-(55,264,48,10,8)-схема и граф с параметрами (386,66,17,12);
$n = 14$: 2-(91,195,15,7,1)-схема и граф с параметрами (336,39,13,5);
$n = 14$: 2-(91,546,60,10,6)-схема и граф с параметрами (722,84,18,10);
$n = 15$: 2-(105,910,104,12,11)-схема и граф с параметрами (1146,130,24,15);
$n = 15$: 2-(105,520,104,21,20)-схема и граф с параметрами (756,130,33,24);
$n = 17$: 2-(136,8568,378,6,14)-схема и граф с параметрами (9113,408,29,18);
$n = 20$: 2-(190,513,135,50,35)-схема и граф с параметрами (875,171,53,39);
$n = 25$: 2-(300,4600,414,27,36)-схема и граф с параметрами (5361,460,59,40);
$n = 35$: 2-(595,22440,1056,28,48)-схема и граф с параметрами (24158,1122,81,52).

§ 4. Проверка на дистанционную регулярность

В этом параграфе мы покажем, что графы Γ из заключения теоремы 2 с небольшими параметрами не являются дистанционно регулярными.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 с массивом пересечений $\{b_0, b_1, b_2; c_1, c_2, c_3\}$. В [1, § 4.1] показано, что собственные значения графа Γ, отличные от $k = b_0$, являются собственными значениями матрицы

$$T = \begin{pmatrix} -c_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & k-b_1-c_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & k-b_2-c_3 \end{pmatrix}.$$

Кратность собственного значения θ равна

$$f(\theta) = v / \sum_{i=0}^{3} k_i u_i(\theta)^2,$$

где $u_i(\theta) = w_i(\theta)/(b_0 \dots b_{i-1})$, $w_0(x) = 1$, $w_1(x) = x$, $w_{i+1}(x) = (x-a_i)w_i(x) - c_i b_{i-1} w_{i-1}(x)$ и $u_0(\theta) = 1$.

Лемма 4.1. *Граф* Γ *из заключения теоремы 2, в котором для некоторой вершины* a *подграф* $\Gamma_3(a)$ *является графом Петерсена, не может быть дистанционно регулярным.*

Доказательство. Если Γ является дистанционно регулярным, то он имеет массив пересечений $\{15, 5, 4; 1, 5, 12\}$ и характеристический многочлен матрицы T равен $(\lambda+1)(\lambda^2-4\lambda-30)$. Далее, находим многочлены $w_0(x)=1$, $w_1(x)=x$, $w_2(x)=x^2-9x-15$ и $w_3(x)=(x-6)w_2(x)-25x$.

Для $\theta=-1$ получим $u_1(\theta)=u_2(\theta)=-1/15$ и $u_3(\theta)=1/5$, поэтому $f(-1)=56/(1+15(1/15)^2+30(1/15)^2+10(1/5)^2)=35$.

Для $\theta=2+\sqrt{34}$ имеем $u_1(\theta)=(2+\sqrt{34})/15$, $u_2(\theta)=(1-\sqrt{34})/15$ и $u_3(\theta)=-1/5$, тем самым $f(2+\sqrt{34})=56\cdot 5/43$; противоречие.

Лемма 4.2. *Граф* Γ *с параметрами* $(58, 12, 2, 3)$ *из заключения теоремы* 2, *в котором для какой-то вершины* a *подграф* $\Gamma_3(a)$ *является* 3×3*-решеткой, не может быть дистанционно регулярным.*

Доказательство. Если Γ дистанционно регулярен, то он имеет массив пересечений $\{12, 9, 2; 1, 3, 8\}$ и характеристический многочлен матрицы T равен $(\lambda+4)(\lambda^2-5\lambda+3)$. Далее, находим многочлены $w_0(x)=1$, $w_1(x)=x$, $w_2(x)=x^2-7x-12$ и $w_3(x)=(x-5)w_2(x)-16x$.

Для $\theta=-4$ получим $u_1(\theta)=-1/3$, $u_2(\theta)=2/3$ и $u_3(\theta)=-14/9$, поэтому $f(-4)=58\cdot 9/361$; противоречие.

Лемма 4.3. *Граф* Γ *с параметрами* $(46, 12, 3, 4)$ *из заключения теоремы* 2, *в котором для какой-то вершины* a *подграф* $\Gamma_3(a)$ *является* 3×3*-решеткой, не может быть дистанционно регулярным.*

Доказательство. Если Γ дистанционно регулярен, то он имеет массив пересечений $\{12, 4, 3; 1, 4, 8\}$. В этом случае воспользуемся целочисленностью параметров p^k_{ij}, определенных в [1, § 4.1].

Из леммы 4.1.7 в [1] следуют равенства

$$p^1_{ii-1}=c_ik_i/k,\quad p^1_{ii}=a_ik_i/k,\quad p^1_{ii+1}=b_ik_i/k,$$

$$p^i_{i-22}=c_{i-1}c_i/\mu,\quad p^{i-1}_{i+12}=b_{i-1}b_i/\mu,\quad p^2_{i-1i+1}=k_ic_ib_i/(kb_1),$$

$$p^{i-1}_{i2}=b_{i-1}(a_i+a_{i-1}-a_1)/\mu,\quad p^{i+1}_{i2}=c_{i+1}(a_i+a_{i-1}-a_1)/\mu.$$

При $i=3$ предпоследнее равенство дает $p^2_{32}=3(4+5-7)/4$; противоречие.

Лемма 4.4. *Граф* Γ *с параметрами* $(322, 60, 14, 12)$ *из заключения теоремы* 2 *не является дистанционно регулярным.*

Доказательство. Если Γ дистанционно регулярен, то он имеет массив пересечений $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$, входящий в список допустимых параметров из [1]. Кроме того, он имеет спектр $\{60^1, 14^{45}, 0^{207}, -10^{69}\}$, является Q-полиномиальным, а граф Γ_2 — сильно регулярным. По лемме 4.1.7 из [1] получим $p^1_{33}=6$ и $p^2_{22}=1/c_2(p^2_{11}b_1+p^2_{12}(a_2-a_1)+p^2_{13}c_3-p^2_{02}b_0)=160$, поэтому граф Γ_2 имеет параметры $(322, 225, 160, 150)$ и собственные значения 5 и -15 кратностей 252 и 69.

Пусть Δ — дополнительный граф к Γ_2 (т. е. $\Delta=\Gamma_{1,3}$). Тогда Δ является сильно регулярным графом с параметрами $(322, 96, 20, 32)$, имеет собственные значения $4, -16$ кратностей $252, 69$ соответственно и для клики L графа Δ будет $|L|\le 7$, причем в случае равенства каждая вершина вне L смежна в Δ точно с двумя вершинами из L.

Зафиксируем вершину $a \in \Delta$. Тогда $\Sigma = \Gamma_3(a)$ является 6×6-решеткой из $\Delta(a)$. Пусть $b \in \Sigma$, $c \in [a] \cap [b] - \Sigma$. Тогда $\Delta(c) \cap \Sigma$ — 6-коклика (иначе для смежных вершин $d, e \in \Delta(c) \cap \Sigma$ подграф $d^\perp \cap e^\perp$ содержит a, c и 6 вершин из Σ; противоречие с тем, что $\Delta(c)$ содержит 3 вершины из 7-клики $\{a, d, e\} \cup \Sigma(d) \cap \Sigma(e)$). Положим $\{b = b_1, \dots, b_6\} = \Delta(c) \cap \Sigma$. Так как подграф $\Gamma_3(b) \cap a^\perp \cap c^\perp$ является 6-кликой, то $|\Delta(a) \cap \Delta(c) - (b^\perp \cup \Sigma)| = 10$.

Положим $\Omega = \Delta(a) \cap \Delta(c) - (b^\perp \cup \Sigma)$. Тогда $\Gamma_3(b_i) \cap \Omega$ будет 4-кликой для $i = 2, \dots, 6$. Так как число ребер между Ω и $\{b_2, \dots, b_5\}$ равно 20, то некоторая вершина $d \in \Omega$ смежна по крайней мере с двумя вершинами из $\{b_2, \dots, b_5\}$, скажем с b_i, b_j. Противоречие с тем, что b_j смежна с тремя вершинами a, c, d из 7-клики $\{b_i\} \cup (\Gamma_3(b_i) \cap a^\perp \cap c^\perp)$. Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1989.
2. *Cameron P. J., van Lint J.* Graphs, codes and designs. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980. (London Math. Soc. Lecture Notes; 43).
3. *Махнев А. А.* О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 3. С. 71–83.
4. *Bous R. C., Dowling T. A.* A generalization of Moore graphs of diameter 2 // J. Combin. Theory. Ser. B. 1971. V. 11, N 3. P. 213–226.

Статья поступила 12 мая 2004 г., окончательный вариант — 30 декабря 2005 г.

Гаврилюк Александр Львович, Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620219
makhnev@imm.uran.ru