Сибирский математический журнал
Июль—август, 2006. Том 47, № 4

УДК 512.46

n–ЛИЕВО СВОЙСТВО ЯКОБИАНА КАК УСЛОВИЕ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

А. Джумадильдаев

Аннотация: Доказано, что ассоциативная коммутативная алгебра U с дифференцированиями $D_1, \dots, D_n \in \operatorname{Der} U$ относительно n-умножения $D_1 \wedge \dots \wedge D_n$ превращается в n-лиеву алгебру, если система $\{D_1, \dots, D_n\}$ находится в инволюции. В случае, когда дифференцирования попарно коммутируют, этот факт установлен В. Т. Филипповым. Получена еще одна формулировка условия Фробениуса о вполне интегрируемости в терминах n-лиевых умножений. Дифференциальная система $\{D_1, \dots, D_n\}$ ранга n на многообразии M^m находится в инволюции тогда и только тогда, когда пространство гладких функции на M относительно якобиана $\operatorname{Det}(D_i u_j)$ превращается в n-лиеву алгебру.

Ключевые слова: n-лиева алгебра, якобиан, вполне интегрируемость, дифференциальная система, теорема Фробениуса.

1. Введение

Пусть U и V — векторные пространства. Обозначим через $T^k(U,V)$ пространство полилинейных отображении с k аргументами $\psi : U \times \dots \times U \to V$. Пусть $C^k(U,V)$ — подпространство пространства $T^k(U,V)$, состоящее из полилинейных отображении с кососимметрическими аргументами.

Говорят, что U обладает *n-арным умножением* ω, если $\omega \in T^n(U,U)$. Пространство U с n-арным умножением ω называют *n-алгеброй.* Обозначим такую алгебру через (U,ω). Определим n-арный полином $\mathrm{nlie}_1 = \mathrm{nlie}_1(\omega, t_1, \dots, t_{2n-1})$ по правилу

$$\mathrm{nlie}_1(\omega, t_1, \dots, t_{2n-1}) = \omega(t_1, \dots, t_{n-1}, \omega(t_n, \dots, t_{2n-1})) - \sum_{i=n}^{2n-1} (-1)^{i+n} \omega(\omega(t_1, \dots, t_{n-1}, t_i), t_n, \dots, \hat{t_i}, \dots, t_{2n-1}).$$

Назовем n-алгебру (U,ω) *n-лиевой*, если $\omega \in C^n(U,U)$ и $\mathrm{nlie}_1 = 0$ — тождество в U, т. е.

$$\omega(u_1, \dots, u_{n-1}, \omega(u_n, \dots, u_{2n-1})) = \sum_{i=n}^{2n-1} (-1)^{i+n} \omega(\omega(u_1, \dots, u_{n-1}, u_i), u_1, \dots, \hat{u_i}, \dots, u_{2n-1})$$

для всех $u_1, \dots, u_{2n-1} \in U$.

Понятие n-лиевых алгебр является относительно новым. Намбу [1] заметил важность изучения свойств якобиана как n-умножения. Тождество n-лиевости впервые было выписано В. Т. Филипповым. В статьях [2, 3] он установил, что якобиан

$$\operatorname{Jac}(u_1, \dots, u_n) = \operatorname{Det}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

задает n-лиево умножение в пространстве многочленов. При этом он воспользовался условием коммутативности дифференцирований $\partial_1, \dots, \partial_n$.

Мы показываем, что для n-лиевости алгебры $(U, D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$, где $D_i \in \operatorname{Der} U$ — дифференцирования, условие коммутативности дифференцировании $D_1, \dots, D_n$ можно ослабить. Достаточно потребовать, чтобы система дифференцирований находилась в инволюции, другими словами — чтобы для любых D_i, D_j было выполнено условие

$$[D_i, D_j] = \sum_{s=1}^{n} u_{i,j}^s D_s$$

для некоторых $u_{i,j}^s \in U$.

Иногда n-лиевы алгебры называются *алгебрами Намбу, Намбу — Тахтаджяна*. В настоящий момент они часто называются *алгебрами Филиппова*. Отметим также работу [4], близкую к нашей теме.

Пусть $(U, \cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с умножением $\cdot$. Линейное отображение $D : U \to U$ называется *дифференцированием*, если

$$D(u \cdot v) = D(u) \cdot v + u \cdot D(v)$$

для всех $u, v \in U$. Пусть $\operatorname{Der} U$ — пространство дифференцирований алгебры U. Заметим, что

$$u \in U,\ D \in \operatorname{Der} U \Rightarrow u \cdot D \in \operatorname{Der} U,$$

где дифференцирование $u \cdot D$ определяется по правилу

$$(u \cdot D)(v) = u \cdot D(v).$$

Другими словами, $\operatorname{Der} U$ имеет структуру U-модуля. Говорят, что на U задана *дифференциальная система* $\mathscr{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$, если $D_i \in \operatorname{Der} U$ для всех $i = 1, \dots, n$. Дифференциальная система $\mathscr{D}$ имеет *ранг* n, если $D_1 \wedge \dots \wedge D_n \neq 0$. Будем говорить, что дифференциальная система $\mathscr{D}$ *находится в инволюции*, если для любых $1 \le i, j \le n$, существуют $u_{i,j}^s \in U$ такие, что

$$[D_i, D_j] = \sum_{s=1}^{n} u_{i,j}^s \cdot D_s.$$

Предположим, что U имеет два умножения: бинарное умножение $(u, v) \mapsto u \cdot v$, которое является ассоциативным и коммутативным, и n-арное умножение ω. Определим n-арные полиномы

$$\operatorname{nlie}_2 = \operatorname{nlie}_2(\omega, t_1, \dots, t_{2n}), \quad \operatorname{nlie}_3 = \operatorname{nlie}_3(\omega, t_1, t_2, \dots, t_{n+1})$$

по правилам

$$\operatorname{nlie}_2(\omega, t_1, t_2, \dots, t_{n+1}) \\ = \omega(t_1 \cdot t_2, t_3, \dots, t_{n+1}) - t_1 \cdot \omega(t_2, \dots, t_{n+1}) - \omega(t_1, t_3, \dots, t_{n+1}) \cdot t_2,$$

$$\operatorname{nlie}_3(\omega, t_1, \dots, t_{2n}) = \sum_{i=n}^{2n} (-1)^{i+n} \omega(t_1, \dots, t_{n-1}, t_i) \cdot \omega(t_n, \dots, \hat{t_i}, \dots, t_{2n}).$$

Назовем n-лиеву алгебру (U, ω) *n-ли-пуассоновой*, если она обладает двумя умножениями $\cdot$, ω и кроме тождества $\mathrm{nlie}_1 = 0$ выполнено тождество $\mathrm{nlie}_2 = 0$. Назовем n-ли-луассонову алгебру $(U, \cdot, \omega)$ *строго n-ли-пуассоновой*, если она удовлетворяет также тождеству $\mathrm{nlie}_3 = 0$.

В [5] тождества $\mathrm{nlie}_1 = 0$ и $\mathrm{nlie}_3 = 0$ названы *фундаментальными тождествами типа* I и *типа* II и установлено, что алгебра $(U, \cdot, D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ является n-ли-пуассоновой, а $(U, \mathrm{id} \wedge D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ — $(n+1)$-лиевой, если $\mathscr{D}$ образует коммутативную дифференциальную систему. Здесь $\mathrm{id} : U \to U$ — тождественное отображение.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть U — ассоциативная коммутативная алгебра с дифференцированиями $D_1, \dots, D_n \in \mathrm{Der}\, U$. Если дифференциальная система $\mathscr{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ находится в инволюции, то алгебра $(U, D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ является строго n-ли-пуассоновой.*

Следствие 2 [2, 3]. *Пусть U — ассоциативная коммутативная алгебра с дифференцированиями $D_1, \dots, D_n \in \mathrm{Der}\, U$ и $[D_i, D_j] = 0$ для всех $1 \leq i, j \leq n$. Тогда алгебра $(U, D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ n-лиева.*

Пусть M^m — C^∞-многообразие и $\mathscr{F}(M)$ — алгебра C^∞-функций на M. Дифференциальную систему на многообразии M^m можно задать с помощью векторных полей или с помощью дифференциальных форм (см., например, [6]). Соответственно имеются две формулировки теоремы Фробениуса вполне интегрируемости дифференциальных систем. В одной форме теорема утверждает, что система вполне интегрируема, если и только если она находится в инволюции, т. е. векторные поля порождают лиеву структуру в пространстве функции. В другой форме она утверждает, что идеал дифференциальных форм должен быть замкнутым относительно операции внешнего дифференцирования. Мы даем третью версию вполне интегрируемости в терминах n-лиевых умножений.

Локально понятия векторного поля на M и дифференцирования алгебры $\mathscr{F}(M)$ эквивалентны. Поэтому для таких U обычные определения дифференциальных систем (распределений) на M и условия их инволютивности (см., например, [7]) совместимы с нашими определениями.

В случае $U = \mathscr{F}(M)$ теорема 1 обратима.

Теорема 3. *Пусть M^m — C^∞-многообразие, $1 < n \leq m$, и $\mathscr{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ — C^∞-дифференциальная система на M ранга n. Пусть $U = \mathscr{F}(M)$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *$\mathscr{D}$ находится в инволюции,*
2) *алгебра $(\mathscr{F}(M), D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ n-лиева,*
3) *алгебра $(\mathscr{F}(M), \mathrm{id} \wedge D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ $(n+1)$-лиева.*

2. n-Лиевы свойства якобиана

Пусть $(U, \cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра. Наделим пространство $T^*(U, U) = \bigoplus\limits_k T^k(U, U)$ двумя видами умножения. Пусть $\psi \in T^k(U, U)$, $\phi \in T^s(U, U)$. Тогда умножения $\psi \cdot \phi \in T^{k+s}(U, U)$ и $\psi \wedge \phi \in T^{k+s}(U, U)$ определяются так:

$$(\psi \cdot \phi)(u_1, \dots, u_{k+s}) = \psi(u_1, \dots, u_k) \cdot \phi(u_{k+1}, \dots, u_{k+s}),$$

$$\psi \wedge \phi(u_1, \dots, u_{k+s}) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}_{k,s}} \operatorname{sign} \sigma \, \psi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}) \cdot \phi(u_{\sigma(k+1)}, \dots, u_{\sigma(k+s)}),$$

где $\mathrm{Sym}_{k,s}$ — множество перестановок $\sigma \in \mathrm{Sym}_{k+s}$ таких, что $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$, $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+s)$. По линейности эти умножения продолжаются до умножений в $T^*(U,U) = \bigoplus_k T^k(U,U)$.

Пространство $T^*(U,U)$ имеет естественные структуры U-модулей:

$$(u \cdot \psi)(u_1, \dots, u_k) = u \cdot (\psi(u_1, \dots, u_k)).$$

Заметим, что $\operatorname{Der} U \subseteq T^1(U,U)$ является U-подмодулем. Алгебра $(T^*(U,U), \cdot)$ ассоциативна и коммутативна, и алгебра $(T^*(U,U), \wedge)$ ассоциативна и кососимметрична. Заметим, что

$$u \cdot (\psi \cdot \phi) = (u \cdot \psi) \cdot \phi = \psi \cdot (u \cdot \phi), \quad u \cdot (\psi \wedge \phi) = (u \cdot \psi) \wedge \phi = \psi \wedge (u \cdot \phi)$$

для всех $u \in U$, $\psi, \phi \in T^*(U,U)$.

Внешнее умножение $D_1, \dots, D_n \in \operatorname{Der} U$ можно определить так:

$$(D_1 \wedge \dots \wedge D_n)(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}_n} \operatorname{sign} \sigma (D_1(u_{\sigma(1)}) \dots D_n(u_{\sigma(n)}))$$

или

$$(D_1 \wedge \dots \wedge D_n)(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}_n} \operatorname{sign} \sigma (D_{\sigma(1)}(u_1) \dots D_{\sigma(n)}(u_n)).$$

Другими словами,

$$(D_1 \wedge \dots \wedge D_n)(u_1, \dots, u_n) = \operatorname{Det}(D_i(u_j))$$

является якобианом $u_1, \dots, u_n$ относительно дифференциальной системы $\mathscr{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$.

Наделим пространство $\wedge^n \operatorname{Der} U$ структурой присоединенного модуля над лиевой алгеброй $\operatorname{Der} U$:

$$[D, D_1 \wedge \dots \wedge D_n] = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+1} [D, D_s] \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_s \dots \wedge D_n$$

(здесь обозначение $\widehat{D}_s$ означает, что D_s опущен).

Определим линейный оператор $D_{u_1, \dots, u_{n-1}} : U \to U$ по правилу

$$D_{u_1, \dots, u_{n-1}}(v) = (D_1 \wedge \dots \wedge D_n)(u_1, \dots, u_{n-1}, v).$$

Легко видеть, что

$$D_{u_1, \dots, u_{n-1}} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n(u_1, \dots, u_{n-1}) \cdot D_i. \tag{1}$$

Для $D_1, \dots, D_n \in \operatorname{Der} U$ определим линейный оператор

$$R_n : \wedge^{n-1} U \to \wedge^n \operatorname{Der} U$$

по правилу

$$\begin{aligned} &R_n(u_1, \dots, u_{n-1}) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} ((D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n)(u_1, \dots, u_{n-1})) \cdot ([D_i, D_1 \wedge \dots \wedge D_n]) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (([D_i, D_j] \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n)(u_1, \dots, u_{n-1})) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n) \end{aligned}$$

или кратко

$$R_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot [D_i, D_1 \wedge \dots \wedge D_n]$$
$$+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j}([D_i, D_j] \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n).$$

Лемма 4. *Умножение $D_1 \wedge \dots \wedge D_n$ является n-лиевым, если и только если*

$$[D_{u_1,\dots,u_{n-1}}, D_1 \wedge \dots \wedge D_n] = 0.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathrm{nlie}_1(D_1 \wedge \dots \wedge D_n, u_1, \dots, u_{2n-1}) = D_{u_1,\dots,u_{n-1}}((D_1 \wedge \dots \wedge D_n)(u_n, \dots, u_{2n-1}))$$
$$- \sum_{i=n}^{2n-1}(D_1 \wedge \dots \wedge D_n)(u_n, \dots, u_{i-1}, D_{u_1,\dots,u_{n-1}}(u_i), u_{i+1}, \dots, u_{2n-1})$$
$$= [D_{u_1,\dots,u_{n-1}}, D_1 \wedge \dots \wedge D_n](u_n, \dots, u_{2n-1}). \quad \square$$

Лемма 5. *Пусть $(U, \cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с дифференцированиями $D_1, \dots, D_n \in \operatorname{Der} U$. Тогда $D_1 \wedge \dots \wedge D_n$ является n-лиевым умножением на U, если и только если $R_n = 0$.*

Доказательство. Согласно (1)

$$-[D_{u_1,\dots,u_{n-1}}, D_1 \wedge \dots \wedge D_n] = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i [D_{u_1,\dots,u_{n-1}}, D_i] \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{i+j+n}[D_1 \wedge \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n(u_1, \dots, u_{n-1}) \cdot D_j, D_i] \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{i+j+n}(D_1 \wedge \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n(u_1, \dots, u_{n-1})) \cdot ([D_j, D_i] \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n)$$
$$- \sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{i+j+n}(D_i(D_1 \wedge \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n(u_1, \dots, u_{n-1})) \cdot (D_j \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n)$$
$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+n}(D_1 \wedge \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n(u_1, \dots, u_{n-1}))$$
$$\cdot \left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^i [D_j, D_i] \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n\right)$$
$$- \sum_{i=1}^{n}(-1)^n D_i(D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n(u_1, \dots, u_{n-1})) \cdot (D_i \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) = Z_1 + Z_2,$$

где

$$Z_1 = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+n+1}(D_1 \wedge \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n(u_1, \dots, u_{n-1})) \cdot ([D_j, D_1 \wedge \dots \wedge D_n]),$$

$$Z_2 = Y_2 \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n),$$

$$Y_2 = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} D_i(D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n(u_1, \dots, u_{n-1})).$$

Заметим, что

$$(-1)^n Y_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} (-1)^{i+j} [D_i, D_j] \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n(u_1, \dots, u_{n-1}).$$

Итак,

$$\begin{aligned}
&[D_{u_1,\dots,u_{n-1}}, D_1 \wedge \dots \wedge D_n] = Z_1 + Z_2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+n+1} (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n(u_1, \dots, u_{n-1})) \cdot ([D_j, D_1 \wedge \dots \wedge D_n]) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} (-1)^{i+j+n} ([D_i, D_j] \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n(u_1, \dots, u_{n-1})) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n) \\
&= R_n(u_1, \dots, u_{n-1}).
\end{aligned}$$

Следовательно, по лемме 4 n-лиевость умножения $D_1 \wedge \dots \wedge D_n$ эквивалентна условию $R_n = 0$. $\square$

Лемма 6. *Пусть $(U, \cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с дифференцированиями $D_i \in \operatorname{Der} U$, $i = 1, \dots, n$. Тогда алгебра $(U, D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ удовлетворяет тождествам $\mathrm{nlie}_2 = 0$ и $\mathrm{nlie}_3 = 0$.*

Доказательство. Легко видеть, что $\mathrm{nlie}_2 = 0$ — тождество для $(U, \cdot, D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$, если $D_i \in \operatorname{Der} U$.

Заметим, что $X = \mathrm{nlie}_3(D_1 \wedge \dots \wedge D_n, u_1, \dots, u_{2n})$ кососимметричен относительно $n+1$ аргументов $(u_n, \dots, u_{2n})$. Более того, X — кососимметрическая сумма элементов вида $a \cdot D_{i_1}(u_n) \dots D_{i_{n+1}}(u_{2n})$, где $a = a(u_1, \dots, u_{n-1}) \in U$ и $i_1, \dots, i_{n+1}$ пробегает n-элементное множество $\{1, \dots, n\}$. Значит, $\mathrm{nlie}_3(D_1 \wedge \dots \wedge D_n, u_1, \dots, u_{2n}) = 0$ для всех $D_1, \dots, D_n \in \operatorname{Der} U$, $u_1, \dots, u_{2n} \in U$. $\square$

Лемма 7. *Пусть $(U, \cdot, \omega)$ — строго n-ли-пуассонова алгебра и $a \in U$. Определим новое умножение $a \cdot \omega : \wedge^n U \to U$ по правилу*

$$(a \cdot \omega)(u_1, \dots, u_n) = a \cdot (\omega(u_1, \dots, u_n)).$$

Тогда $(U, \cdot, a \cdot \omega)$ строго n-ли-пуассонова.

Доказательство. Поскольку

$$\mathrm{nlie}_2(a \cdot \omega, u_1, \dots, u_{n+1}) = a \cdot \mathrm{nlie}_2(\omega, u_1, \dots, u_{n+1}),$$

тождество $\mathrm{nlie}_2 = 0$ для умножения $a \cdot \omega$ очевидно.

Согласно тождеству $\mathrm{nlie}_2 = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
\mathrm{nlie}_1(a \cdot \omega, u_1, \dots, u_{2n-1}) &= a \cdot \omega(u_1, \dots, u_{n-1}, a \cdot \omega(u_n, \dots, u_{2n-1})) \\
&- \sum_{i=n}^{2n-1} (-1)^{i+n} a \cdot \omega(a \cdot \omega(u_1, \dots, u_{n-1}, u_i), u_n, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_{2n-1}) \\
&= (a \cdot a) \cdot \Bigg(\omega(u_1, \dots, u_{n-1}, \omega(u_n, \dots, u_{2n-1}))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{i=n}^{2n-1} (-1)^{i+n} (a\cdot a)\cdot \omega(\omega(u_1,\dots,u_{n-1},u_i),u_n,\dots,\hat u_i,\dots,u_{2n-1}))\\
&\qquad + a\cdot\omega(u_1,\dots,u_{n-1},a)\cdot\omega(u_n,\dots,u_{2n-1})\Big)\\
&- \sum_{i=n}^{2n-1} (-1)^{i+n} a\cdot\omega(u_1,\dots,u_{n-1},u_i)\cdot\omega(a,u_n,\dots,\hat u_i,\dots,u_{2n-1})\\
&= (a\cdot a)\cdot \mathrm{nlie}_1(\omega,u_1,\dots,u_{2n-1}) + a\cdot \mathrm{nlie}_3(\omega,u_1,\dots,u_{n-1},a,u_n,\dots,u_{2n-1}).
\end{aligned}
$$

Значит,

$$\mathrm{nlie}_1(a\cdot\omega,u_1,\dots,u_{2n-1})=0$$

для всех $a,u_1,\dots,u_{2n-1}\in U$. Итак, $(U,a\cdot\omega)$ является n-лиевой для любого $a\in U$, если $(U,\cdot,\omega)$ строго n-ли-пуассонова.

Далее,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{nlie}_3(a\cdot\omega,u_1,\dots,u_{2n}) &= (a\cdot a)\cdot\sum_{i=n}^{2n}(-1)^{i+n}\omega(u_1,\dots,u_{n-1},u_i)\\
&\cdot\omega(u_n,\dots,\hat u_i,\dots,u_{2n}) = (a\cdot a)\cdot\mathrm{nlie}_3(\omega,u_1,\dots,u_{2n}).
\end{aligned}
$$

Итак,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{nlie}_3(a\cdot\omega,u_1,\dots,u_{n+1})\\
&= a\cdot\omega(u_1\cdot u_2,u_3,\dots,u_{n+1}) - u_1\cdot(a\cdot\omega(u_2,\dots,u_{n+1})) - a\cdot(\omega(u_1,u_3,\dots,u_{n+1})\cdot u_2)\\
&= (a\cdot\omega)(u_1\cdot u_2,u_3,\dots,u_{n+1}) - u_1\cdot(a\cdot\omega(u_2,\dots,u_{n+1})) - (a\cdot\omega)(u_1,u_3,\dots,u_{n+1})\cdot u_2\\
&= a\cdot\mathrm{nlie}_3(\omega,u_1,u_2,\dots,u_{n+1}).
\end{aligned}
$$

Другими словами, $(U,\cdot,a\cdot\omega)$ строго n-ли-пуассонова, если $(U,\cdot,\omega)$ строго n-ли-пуассонова. $\square$

Лемма 8. *Пусть $(U,\cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с дифференцированиями $D_1,\dots,D_n$. Предположим, что $(U,\cdot,D_1\wedge\dots\wedge D_n)$ является n-лиевой. Для любого $u_{i,j}\in U$ построим новые дифференцирования D'_i по правилу*

$$D'_i=\sum_{j=1}^{n}u_{i,j}D_j.$$

Тогда алгебра $(U,\cdot,D'_1\wedge\dots\wedge D'_n)$ является строго n-ли-пуассоновой.

Доказательство. По лемме 6 достаточно проверить, что $\mathrm{nlie}_1=0$ — тождество для умножения $D'_1\wedge\dots\wedge D'_n$.

Заметим, что

$$D'_1\wedge\dots\wedge D'_n=a\cdot D_1\wedge\dots\wedge D_n$$

для $a=\mathrm{Det}(u_{i,j})\in U$. По лемме 6 $(U,\cdot,D_1\wedge\dots\wedge D_n)$ строго n-ли-пуассонова. Поэтому по лемме 7 алгебра $(U,\cdot,D'_1\wedge\dots\wedge D'_n)$ n-ли-пуассонова. $\square$

Пусть $S_{k,m}$ — множество упорядоченных индексов $\tau=(i_1,\dots,i_k)$ таких, что $1\le i_1<\dots<i_k\le m$. Положим в таких случаях $\tau(1)=i_1,\dots,\tau(k)=i_k$. Для любого $\tau=(i_1,\dots,i_k)\in S_{k,m}$ пусть $\tau^*=(j_1,\dots,j_{m-k})\in S_{m-k,m}$, где $\{i_1,\dots,i_k\}\cup\{j_1,\dots,j_{m-k}\}=\{1,\dots,m\}$. Заметим, что $S_{m,m}$ состоит из одного элемента $(1,2,\dots,m)$.

Лемма 9. *Пусть* $(U, \cdot)$ — *ассоциативная коммутативная алгебра без делителей нуля. Предположим, что* $D_i \in \operatorname{Der} U$, $1 \le i \le m$, *и* $D_1 \wedge \dots \wedge D_m \ne 0$. *Тогда внешние формы* $D_\tau = D_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge D_{\tau(k)}$ *такие, что* $\tau \in S_{k,m}$, *являются* U*-линейно независимыми для любого* $k \le m$.

Доказательство. Ясно, что

$$D_\tau \wedge D_\sigma = 0, \text{ если } \tau^* \ne \sigma; \quad D_\tau \wedge D_\sigma = \pm D_1 \wedge \dots \wedge D_n, \text{ если } \tau^* = \sigma.$$

Допустим, что

$$\sum_{\tau \in S_{k,m}} u_\tau D_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge D_{\tau(k)} = 0.$$

Для любого $\tau_0 \in S_{k,m}$ умножим обе части этого соотношения на $D_{\tau_0^*}$. Получаем, что

$$u_\tau D_1 \wedge \dots \wedge D_n = 0.$$

Итак, $u_\tau = 0$ для любого $\tau \in S_{k,m}$.

Лемма 10. *Пусть* U — *ассоциативная коммутативная алгебра без делителей нуля и* $D_1, \dots, D_m$ — *дифференцирования алгебры* U *такие, что* $D_1 \wedge \dots \wedge D_m \ne 0$. *Пусть* $n \le m$. *Предположим, что для любого* $1 \le i, j \le n$ *существует* $u_{i,j}^s \in U$, $1 \le s \le m$, *такое, что*

$$[D_i, D_j] = \sum_{s=1}^m u_{i,j}^s D_s$$

и $D_1 \wedge \dots \wedge D_n$ *является* n*-лиевым умножением на* U. *Тогда система* $\mathscr{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ *находится в инволюции.*

Доказательство. Имеем

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot ([D_i, D_1 \wedge \dots \wedge D_n])$$
$$= \sum_{i,j=1}^n (-1)^{i+j} (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot ([D_i, D_j] \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n)$$
$$= \sum_{i,j=1}^n \sum_{s=1}^m (-1)^{i+j} u_{i,j}^s \cdot (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot (D_s \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n) Z_1 + Z_2,$$

где

$$Z_1 = \sum_{i,j=1}^n (-1)^{i+1} u_{i,j}^j \cdot (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n),$$

$$Z_2 = \sum_{i,j=1}^n \sum_{s=n+1}^m (-1)^{i+1} u_{i,j}^s \cdot (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_{j-1} \wedge D_s \wedge D_{j+1} \wedge \dots \wedge D_n).$$

Аналогично

$$\sum_{i<j} (-1)^{i+j} ([D_i, D_j] \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$$
$$= \sum_{i<j} \sum_{s=1}^m (-1)^{i+j} u_{i,j}^s \cdot (D_s \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n) T_1 + T_2,$$

где

$$T_1 = \sum_i (-1)^i \sum_j u_{i,j}^j (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n),$$

$$T_2 = \sum_{i<j} \sum_{s=n+1}^{m} (-1)^{i+j} u_{i,j}^s \cdot (D_s \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n).$$

Тогда $Z_1 + T_1 = 0$ и $R_n = Z_2 + T_2$. По лемме 5 $R_n = 0$, если умножение $D_1 \wedge \dots \wedge D_n$ n-лиево. В частности, для любых $v_1, \dots, v_{n-1} \in U$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{s=n+1}^{m} a_{j,s} \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_{j-1} \wedge D_s \wedge D_{j+1} \wedge \dots \wedge D_n) + b_1 \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n) = 0,$$

где

$$a_{j,s} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u_{i,j}^s \cdot (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n)(v_1, \dots, v_{n-1}) \in U, \quad n < s \le m,$$

$$b_1 = \sum_{i<j} \sum_{s=n+1}^{m} (-1)^{i+j} u_{i,j}^s \cdot (D_s \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n)(v_1, \dots, v_{n-1}) \in U.$$

Поэтому по лемме 9 для любых (j, s) таких, что $j \le n < s \le m$, имеем $a_{j,s} = 0$, иначе говоря,

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u_{i,j}^s \cdot (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) = 0.$$

Воспользуемся снова леммой 9. Получаем, что $u_{i,j}^s = 0$ для любых (i, j, s) таких, что $i \le n$, $j \le n$, $n < s \le m$. Другими словами,

$$[D_i, D_j] = \sum_{s=1}^{n} u_{i,j}^s D_s, \quad 1 \le i, j \le n. \quad \square$$

3. Доказательство теоремы 1

По лемме 6 достаточно проверить, что n-лиево условие для умножения $D_1 \wedge \dots \wedge D_n$ выполнено. Свойство инволютивности понадобится при проверке условия $\mathrm{nlie}_1 = 0$.

Имеем

$$[D_i, D_1 \wedge \dots \wedge D_n] = \sum_{j=1}^{n} D_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{[D_i, D_j]}_{j} \wedge \dots \wedge D_n$$

$$= \sum_{j,s=1}^{n} u_{i,j}^s D_1 \wedge \dots \wedge D_{j-1} \wedge D_s \wedge D_{j+1} \wedge \dots \wedge D_n = \sum_{j=1}^{n} u_{i,j}^j D_1 \wedge \dots \wedge D_n.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot [D_i, D_1 \wedge \dots \wedge D_n]$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+1} u_{i,j}^j (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n).$$

Далее, для $i < j$

$$[D_i, D_j] \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n = \sum_{s=1}^{n} u^s_{i,j} D_s \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n$$
$$= u^i_{i,j} D_i \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n + u^j_{i,j} D_j \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n$$
$$= (-1)^{i+1} u^i_{i,j} D_1 \wedge \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n + (-1)^j u^j_{i,j} D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n.$$

Следовательно,

$$\sum_{i<j} (-1)^{i+j} ([D_i, D_j] \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$$
$$= \sum_{i<j} (-1)^{j+1} u^i_{i,j} (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^i u^j_{i,j} (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$$
$$= \sum_{i>j} (-1)^{i+1} u^j_{j,i} (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^i u^j_{i,j} (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$$
$$(\text{поскольку } u^s_{i,j} = -u^s_{j,i})$$
$$= \sum_{i>j} (-1)^i u^j_{i,j} (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^i u^j_{i,j} (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$$
$$= \sum_{i} (-1)^i \sum_{j} u^j_{i,j} (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n).$$

Итак,

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot [D_i, D_1 \wedge \dots \wedge D_n]$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} ([D_i, D_j] \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n) \cdot D_1 \wedge \dots \wedge D_n = 0.$$

Поэтому по лемме 5 $D_1 \wedge \dots \wedge D_n$ является n-лиевой. □

4. Доказательство теоремы 3

Наши рассмотрения являются локальными. Известно, что локально понятия векторного поля на M и дифференцирования на $U = \mathscr{F}(M)$ эквивалентны.

Если $\mathscr{D}$ находится в инволюции, то согласно теореме 1 алгебра $(U, D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ является n-лиевой.

Обратно, предположим, что алгебра $(U, D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ n-лиева. Докажем, что система $\mathscr{D}$ находится в инволюции.

Будем следовать рассуждениям, приведенным в доказательстве теоремы Фробениуса [6, гл. VII, теорема 2.1]. Пусть x_0 — любая точка в M. Возьмем локальные координаты $x^1, \dots, x^m$, равные нулю в x_0, такие, что векторные поля $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n$ порождают слой V_{x_0} — n-мерное подпространство в $T_{x_0}M$. Мы можем взять открытую окрестность точки x_0 такую, что C^∞-векторные поля $D_1,\dots,D_n$ имеют вид

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^m \alpha_j^k(x)\frac{\partial}{\partial x^k}, \quad j=1,\dots,n,$$

где $\alpha_j^k(x_0)=0$ для всех j,k. Тогда $n\times n$-матрица $I_n + \big(\alpha_j^k(x)\big)_{1\le j,k\le n}$ обратима при всех $x\in W$ для бесконечно малого W. Пусть $\big(\beta_j^k(x)\big)_{1\le j,k\le n}$ — ее обратная матрица. Тогда векторные поля $D'_j = \sum\limits_{k=1}^n \beta_j^k D_k$ имеют вид

$$D'_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{k=n+1}^m \lambda_{i,j}^k(x)\frac{\partial}{\partial x^k}, \quad 1\le j\le n.$$

Положим

$$D'_j = \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad n<j\le m.$$

Заметим, что $(D'_1\wedge\dots\wedge D'_m)(x^1,\dots,x^m)=1$. Следовательно, $D'_1\wedge\dots\wedge D'_m\neq 0$. Далее, для всех $1\le i,j\le n$ коммутатор $[D'_i,D'_j]$ является U-линейной комбинацией дифференцирований $D'_1,\dots,D'_m$. По лемме 10 $(U, D'_1\wedge\dots\wedge D'_n)$ n-лиева, поскольку $(U, D_1\wedge\dots\wedge D_n)$ n-лиева. По лемме 10 $[D'_i,D'_j]$ является U-линейной комбинацией дифференцирований $D'_1,\dots,D'_n$.

Отметим, что выражение для D_i начинается с $\partial/\partial x^i$, но $[D'_i,D'_j]$ не имеет $\partial/\partial x^s$-компоненты, если $s\le n$. Следовательно, $[D'_i,D'_j]=0$, $1\le i,j\le n$. Итак, система $D_i, 1\le i\le n$, как U-линейная комбинация коммутативных векторных полей $D'_j, 1\le j\le n$, находится в инволюции.

Пусть алгебра (U,ω) $(n+1)$-лиева для $\omega = \mathrm{id}\wedge D_1\wedge\dots\wedge D_n$. Тогда $i(1)\omega = D_1\wedge\dots\wedge D_n$ и согласно результатам [2] алгебра $(U, D_1\wedge\dots\wedge D_n)$ является n-лиевой. Обратно, если $(U, D_1\wedge\dots\wedge D_n)$ — n-лиева алгебра, то по теореме 6.3 работы [5] алгебра $(U, \mathrm{id}\wedge D_1\wedge\dots\wedge D_n)$ также является $(n+1)$-лиевой. $\square$

В заключение хотел бы выразить благодарность рецензенту за тщательное изучение моего скромного труда и за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nambu Y.* Generalized Hamiltonian mechanics // Phys. Rev. 1973. V. 7. P. 2405–2412.
2. *Филиппов В. Т.* n-Лиевы алгебры // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 6. С. 126–140.
3. *Филиппов В. Т.* Об n-лиевой алгебре якобианов // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 660–669.
4. *Пожидаев А. П.* Мономиальные n-лиевы алгебры // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 5. С. 542–567.
5. *Dzhumadil'daev A. S.* Identities and derivations for jacobian algebras // Contemp. Math. 2002. V. 315. P. 245–278.
6. *Flanders H.* Differential forms with applications to the physical sciences. New York; London: Acad. Press, 1963.
7. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов. М.: Мир, 1984.

Статья поступила 4 февраля 2005 г., окончательный вариант — 12 января 2006 г.

Аскар Джумадильдаев
Институт математики Академии наук Республики Казахстан, Алматы, Казахстан
Казахско-Британский Университет, Алматы, Казахстан
askar@math.kz