Сибирский математический журнал
Июль—август, 2006. Том 47, № 4

УДК 517.55

ОБ ОБЛАСТЯХ СХОДИМОСТИ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. Ю. Семушева

Аннотация: Уточняется результат Горна об областях сходимости гипергеометрических рядов многих переменных.

Ключевые слова: область сходимости, гипергеометрический ряд, параметризация Горна — Капранова, носитель ряда, амеба.

§ 1. История вопроса и формулировка основного результата

Существует несколько определений гипергеометрических функций [1]. Видимо, самым простым и универсальным из них является определение гипергеометрического ряда, данное Горном в 1889 г. [2]: степенной ряд (ряд Лорана)

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}^n}\varphi(s)x^s=\sum_{s\in\mathbb{Z}^n}\varphi(s_1,\dots,s_n){x_1}^{s_1}\dots{x_n}^{s_n} \tag{1}$$

называется *гипергеометрическим*, если отношения соседних коэффициентов представляют собой рациональные функции переменных s:

$$\frac{\varphi(s+e_i)}{\varphi(s)}=R_i(s),\quad i=1,\dots,n, \tag{2}$$

здесь $e_i=(0,\dots,\overset{i}{\widehat{1}},\dots,0)$. Согласно теореме Оре — Сато [3] общий вид для коэффициентов гипергеометрического ряда следующий:

$$\varphi(s)=R(s)\cdot t^s\cdot\frac{\prod\limits_{i=1}^{p}\Gamma(\langle A_i,s\rangle+c_i)}{\prod\limits_{j=1}^{q}\Gamma(\langle B_j,s\rangle+d_j)}, \tag{3}$$

где $R(s)$ — рациональная функция, $t\in(\mathbb{C}\setminus\{0\})^n$, Γ — гамма-функция Эйлера, $A_i,B_j\in\mathbb{Z}^n$, $c_i,d_j\in\mathbb{C}$, $\langle\ ,\ \rangle$ — знак скалярного произведения.

Отметим одно важное обстоятельство. Ряд (1) с коэффициентами вида (3) далеко не всегда сходится, если суммирование брать по всей решетке $\mathbb{Z}^n$. Сам

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–1212.2003.1).

ряд (1) следует считать формальным, из которого можно строить неформальные (т. е. с непустой областью сходимости) каким-либо естественным выбором массива суммирования $S \in \mathbb{Z}^n$ (см. ниже).

В работе [2] Горн указал способ описания области сходимости гипергеометрических рядов двух и трех переменных, рассматривая в качестве массива суммирования положительные октанты $\mathbb{Z}_+^2$ и $\mathbb{Z}_+^3$. Приведем результат Горна для случая двукратных рядов

$$H(x_1, x_2) = \sum_{s_1, s_2 \geqslant 0} \varphi(s_1, s_2) {x_1}^{s_1} {x_2}^{s_2},$$

где по определению гипергеометричности

$$R_1(s_1, s_2) := \frac{\varphi(s_1 + 1, s_2)}{\varphi(s_1, s_2)}, \quad R_2(s_1, s_2) := \frac{\varphi(s_1, s_2 + 1)}{\varphi(s_1, s_2)}$$

являются рациональными функциями от s_1 и s_2. В [2] вводятся пределы

$$\Phi_1(q_1, q_2) = \lim_{t \to \infty} R_1(q_1 t, q_2 t), \quad \Phi_2(q_1, q_2) = \lim_{t \to \infty} R_2(q_1 t, q_2 t)$$

и отмечается, что функции Φ_i рациональны и однородны степени нуль, т. е. фактически зависят от отношения $q_1 : q_2$. С помощью этих функций и вычисляется область сходимости G ряда $H(x_1, x_2)$. А именно, хорошо известно, что области сходимости степенных рядов являются областями Рейнхардта [4], т. е. полностью определяются модулями $|x_1|, |x_2|$ переменных и согласно результату Горна если точка $(|x_1|, |x_2|)$ лежит на границе изображения Рейнхардта $|G|$ для области сходимости G, то она лежит или на прямой

$$\mathfrak{A} : |x_1| = \left| \frac{1}{\Phi_1(1, 0)} \right|,$$

или на прямой

$$\mathfrak{B} : |x_2| = \left| \frac{1}{\Phi_2(0, 1)} \right|,$$

или на кривой $\mathfrak{G}$, параметризованной в виде

$$|x_1| = \left| \frac{1}{\Phi_1(q_1, q_2)} \right|, \quad |x_2| = \left| \frac{1}{\Phi_2(q_1, q_2)} \right|, \quad q_1, q_2 \geqslant 0. \tag{4}$$

Более точная формулировка результата Горна заключена в следующих двух утверждениях.

Утверждение 1. *Если точка $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ лежит вне бицилиндра*

$$\Delta = \left\{ |x_1| < \left| \frac{1}{\Phi_1(1, 0)} \right|, |x_2| < \left| \frac{1}{\Phi_1(1, 0)} \right| \right\}$$

либо для некоторого положительного направления $q_1 : q_2$

$$\left|x_1^0\right| > \left| \frac{1}{\Phi_1(q_1, q_2)} \right|, \quad \left|x_2^0\right| > \left| \frac{1}{\Phi_2(q_1, q_2)} \right|,$$

то степенной ряд $H(x_1, x_2)$ расходится в точке $\left(x_1^0, x_2^0\right)$.

Утверждение 2. *Если точка $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ лежит в бицилиндре Δ и для всех положительных направлений $q_1 : q_2$ выполняется хотя бы одно из неравенств*

$$\left|x_1^0\right| < \left|\frac{1}{\Phi_1(q_1, q_2)}\right|, \quad \left|x_2^0\right| < \left|\frac{1}{\Phi_2(q_1, q_2)}\right|,$$

то ряд $H(x_1, x_2)$ сходится в точке $\left(x_1^0, x_2^0\right)$.

Существует класс гипергеометрических рядов, для которых граница области сходимости состоит лишь из куска параметризации (4), т. е. естественно определяется отображением $(1/\Phi_1, 1/\Phi_2)$, которое называют *параметризацией Горна — Капранова* [5, 6] (в статье [5] М. М. Капранов заметил, что указанное отображение является бирациональным и параметризует особое множество суммы степенного ряда (1), если в нем «правильно» выбрать подмножество суммирования в $\mathbb{Z}^n$).

Цель настоящей статьи — выделить класс гипергеометрических рядов, для которых параметризация Горна — Капранова в действительности задает границу их областей сходимости. Нетривиальные области сходимости имеют только неконфлуэнтные ряды, т. е. ряды вида

$$\sum_{s\in S} \frac{\Gamma(\langle A_1, s\rangle + a_1)\dots\Gamma(\langle A_p, s\rangle + a_p)}{\Gamma(\langle B_1, s\rangle + b_1)\dots\Gamma(\langle B_q, s\rangle + b_q)} \cdot \frac{{x_1}^{s_1}\dots{x_n}^{s_n}}{s_1!\dots s_n!}, \tag{5}$$

где

$$A_1 + \dots + A_p = B_1 + \dots + B_q + (1, \dots, 1) \quad \text{(условие неконфлуэнтности)},$$

а $S \subset \mathbb{Z}^n$ — так называемый *носитель ряда.* Носитель ряда представляет собой полиэдральное множество S в $\mathbb{Z}^n$, на котором коэффициенты ряда $\varphi(s)$ ненулевые, а в дополнение к S они продолжаются нулевым образом с сохранением разностных соотношений (2) (детали формирования носителя см. в [7]). Специально выбранные в знаменателе (5) множители $s_j! = \Gamma(s_j + 1)$ дают мотивацию к выбору положительного октанта $\mathbb{Z}^n_+$ в качестве носителя ряда, поскольку для отрицательных целых s_j функция $\frac{1}{\Gamma(s_j+1)}$ равна нулю. Интересующие нас ряды с «правильной» областью сходимости — это ряды вида (5), где $p = q = 1$ и $S = \mathbb{Z}^n_+$:

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}^n_+} \frac{\Gamma(\langle A, s\rangle + a)}{\Gamma(\langle B, s\rangle + b)} \cdot \frac{{x_1}^{s_1}\dots{x_n}^{s_n}}{s_1!\dots s_n!}, \tag{6}$$

причем мы не будем требовать целочисленности A и B, полагая $A, B \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что ряды вида (6) представляют интерес в математической физике [8], где они появляются в теории суперструн в качестве периодов на многообразиях Калаби — Яу.

Основной результат настоящей статьи составляет следующая

Теорема. *Если в ряде (6) каждый из векторов*

$$A = (a_1, \dots, a_n), \quad B = (b_1, \dots, b_n)$$

имеет координаты одного знака, то граница области сходимости этого ряда задается параметризацией Горна — Капранова:

$$(|x_1|, \dots, |x_n|) = \left(\left|\frac{1}{\Phi_1(q)}\right|, \dots, \left|\frac{1}{\Phi_n(q)}\right|\right), \quad q \in \mathbb{R}^n_+,$$

где

$$\Phi_i(q) = {q_i}^{-1}\langle A, q\rangle^{a_i}\langle B, q\rangle^{-b_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Эта теорема обобщает результаты о сходимости рядов для общих алгебраических функций [9, 6].

§ 2. Некоторые примеры

Пример 1. Основное решение (следуя Меллину [10]) общего алгебраического уравнения

$$y^n + x_1 y^{n_1} + \dots + x_p y^{n_p} - 1 = 0, \tag{7}$$

т. е. ветвь алгебраической функции $y(x)$ с условием $y(0) = 1$, выписывается в виде ряда

$$y(x) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{s \geqslant 1} A_s {x_1}^{s_1} \dots {x_p}^{s_p} \tag{8}$$

с коэффициентами

$$A_s = \frac{(-1)^{|s|}}{s_1! \dots s_p!} \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{|s|-1} (1 + n_1 s_1 + \dots + n_p s_p - kn)}{n^{|s|-1}}$$
$$= \frac{(-1)^s}{s_1! \dots s_p!} \cdot \frac{\Gamma\bigl(\frac{1}{n} + \frac{n_1}{n} s_1 + \dots + \frac{n_p}{n} s_p\bigr)}{\Gamma\bigl(\frac{1}{n} - \frac{n_1{}'}{n} s_1 - \dots - \frac{n_p{}'}{n} s_p + 1\bigr)},$$

где $n'_k = n - n_k$, $|s| = s_1 + \dots + s_p$, причем в случае $|s| = 1$ произведение $\prod\limits_{k=1}^{0}$ полагается равным 1. По сформулированной теореме граница области сходимости ряда (8) задается параметризацией

$$|x_1| = {q_1}^{-1} (a_1 q_1 + \dots + a_p q_p)^{a_1} (b_1 q_1 + \dots + b_p q_p)^{b_1}, \dots,$$
$$|x_p| = {q_2}^{-1} (a_1 q_1 + \dots + a_p q_p)^{a_p} (b_1 q_1 + \dots + b_p q_p)^{b_p}$$

(здесь $a_j = \frac{n_j}{n}$, $b_j = \frac{n - n_j}{n}$). Этот результат был доказан в [9] для $p = 2$ и в [10] для любого $p \geqslant 2$.

Пример 2. Этот пример взят из статьи Горна [2]:

$$H(x_1, x_2) = \sum_{s_1, s_2 \geqslant 0} \Gamma(s_1 + s_2 + a_1) \Gamma(s_1 - 2s_2 + a_2) \Gamma(s_2 - 2s_1 + a_3) x_1^{s_1} x_2^{s_2}, \tag{9}$$

где a_1, a_2, a_3 — произвольные комплексные, но не целые числа (что обеспечивает конечность значений гамма-функций). Согласно результату Горна область сходимости указанного ряда ограничена тремя линиями:

$$\mathfrak{A}: \ |x_1| = 4, \quad \mathfrak{B}: \ |x_2| = 4,$$

$$\mathfrak{G}: \ |x_1| = \frac{(2q_1 - q_2)^2}{(2q_2 - q_1)(q_1 + q_2)}, \quad |x_2| = \frac{(q_1 - 2q_2)^2}{(2q_1 - q_2)(q_1 + q_2)},$$

где q_1, q_2 неотрицательные и изменяются в секторе $\frac{1}{2} q_1 \leqslant q_2 \leqslant 2q_1$.

На самом деле область под кривой $\mathfrak{G}$ — это область сходимости «подряда» ряда (9) с массивом суммируемости

$$S = \bigl\{(s_1, s_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : s_1/2 \leqslant s_2 \leqslant 2s_1\bigr\},$$

а не с полным положительным октантом $\mathbb{Z}_+^2$, который Горн взял «насильно».

Для того чтобы лучше понять ситуацию, удобнее рассматривать не схему Рейнхардта, а ее логарифмический образ. Иными словами, рассмотрим отображение

$$(z_1, \dots, z_n) \to (\log |z_1|, \dots, \log |z_n|)$$

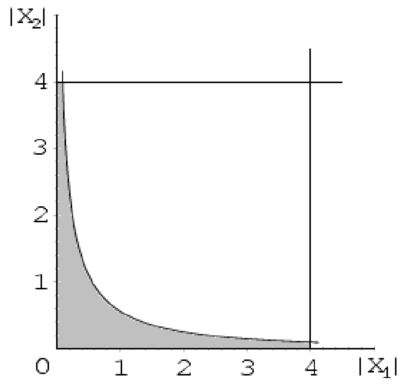

Рис. 1.

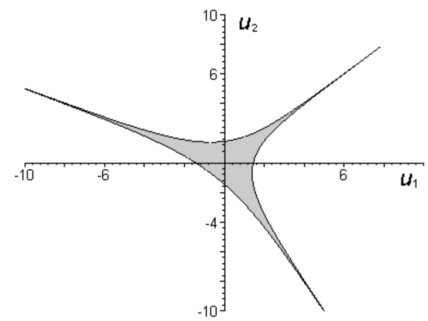

Рис. 2.

из $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$ в $\mathbb{R}^n$. Сингулярное множество суммы степенного ряда (1) (которое, как правило, является алгебраической гиперповерхностью (см. [7])) при указанном отображении переходит в так называемую *амебу* этой гиперповерхности. Известно, что дополнение к амебе состоит из выпуклых связных компонент, в прообразах которых сходятся степенные ряды, представляющие данную функцию [7].

На рис. 1 изображена область сходимости ряда (9), а на рис. 2 в системе координат $u_1 = \log|x_1|, u_2 = \log|x_2|$ — амеба для сингулярного множества суммы «подряда»

$$\sum_{\frac{1}{2}s_1\leqslant s_2\leqslant 2s_1}\Gamma(s_1+s_2+a_1)\Gamma(s_1-2s_2+a_2)\Gamma(s_2-2s_1+a_3)x_1^{s_1}x_2^{s_2}$$

ряда (9). Область сходимости «подряда» проектируется в связную компоненту дополнения к амебе, затемненную на рис. 3, а область сходимости ряда (9) — лишь в часть этой компоненты (рис. 4), выделенную условием

$$u_1 < \log 4, \quad u_2 < \log 4.$$

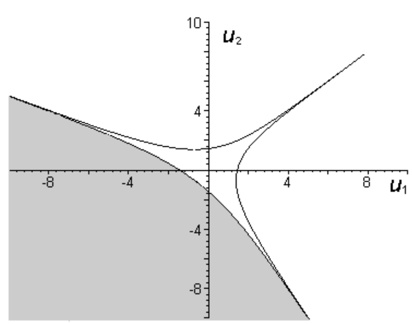

Рис. 3.

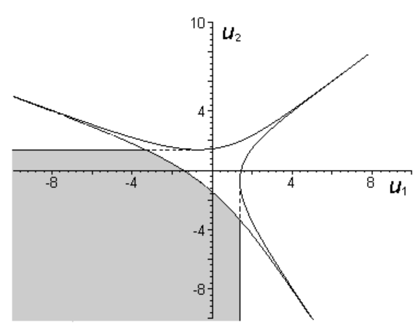

Рис. 4.

§ 3. Доказательство основного результата

В множестве параметров $s=(s_1,\dots,s_p)\in\mathbb{Z}^n_+$ зафиксируем точку (направление) $q=(q_1,\dots,q_n)\neq 0$ и рассмотрим «q-диагональную» подпоследовательность

$$C_l=\varphi(lq)=\frac{\Gamma(\langle A,lq\rangle+a)}{\Gamma(\langle B,lq\rangle+b)(q_1l)!\dots(q_nl)!},\quad l\in\mathbb{Z}_+,$$

последовательности коэффициентов $\varphi(s)$ ряда (6).

Лемма 1. *Для почти всех направлений $q\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant}$ радиус сходимости ряда*

$$\sum_{l=0}^{\infty}C_lt^l,\tag{10}$$

являющегося производящей функцией «q-диагональной» подпоследовательности C_l, выражается формулой

$$\rho_q={q_1}^{q_1}\dots{q_n}^{q_n}\frac{|\langle B,q\rangle|^{\langle B,q\rangle}}{|\langle A,q\rangle|^{\langle A,q\rangle}}.\tag{11}$$

Доказательство. Для вычисления радиуса сходимости ρ_q воспользуемся формулой Коши — Адамара и асимптотической формулой Стирлинга

$$\Gamma(z+1)\sim\sqrt{2\pi}z^{z+\frac12}e^{-z}$$

при $\operatorname{Re}z\to+\infty$. Например, если A и B имеют положительные координаты, то по формуле Стирлинга при $l\to\infty$

$$C_l\sim\frac{(2\pi)^{\frac{-n}{2}}(\langle A,lq\rangle+a-1)^{\langle A,lq\rangle+a-\frac12}e^{\langle B,lq\rangle+b-\langle A,lq\rangle-a+lq_1+\dots+lq_n}}{(\langle B,lq\rangle+b-1)^{\langle B,lq\rangle+b-\frac12}(lq_1)^{lq_1+\frac12}\dots(lq_n)^{lq_n+\frac12}}$$
$$=\frac{(\langle A,lq\rangle+a-1)^{\langle A,lq\rangle+a-\frac12}e^{b-a}}{(\langle B,lq\rangle+b-1)^{\langle B,lq\rangle+b-\frac12}(lq_1)^{lq_1+\frac12}\dots(lq_n)^{lq_n+\frac12}}.$$

Значит, по формуле Коши — Адамара и условию неконфлуэнтности получаем

$$\frac{1}{\rho_q}=\varlimsup_{l\to\infty}\sqrt[l]{|C_l|}=\lim_{l\to\infty}\sqrt[l]{\frac{\langle A,lq\rangle^{\langle A,lq\rangle}e^{b-a}}{\langle B,lq\rangle^{\langle B,lq\rangle}(lq_1)^{lq_1}\dots(lq_n)^{lq_n}}}=\frac{\langle A,q\rangle^{\langle A,q\rangle}}{\langle B,q\rangle^{\langle B,q\rangle}{q_1}^{q_1}\dots{q_n}^{q_n}},$$

т. е. требуемую формулу (11).

В случае $A\in\mathbb{Z}^n_+$, $B\in\mathbb{Z}^n_-$ воспользуемся формулой дополнения

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},$$

согласно которой

$$C_l=\frac{\Gamma(\langle A,lq\rangle+a)\Gamma(|\langle B,lq\rangle|-b+1)\sin\pi(|\langle B,lq\rangle|-b+1)}{\Gamma(q_1l+1)\dots\Gamma(q_nl+1)\pi}.$$

Эта последовательность не стабилизируется нулем для почти всех направлений q, так как для любого направления q можно выбрать сколь угодно близкое к нему рациональное направление q' такое, что $\langle B, lq\rangle(q') - b + 1 \notin \mathbb{Z}$ для бесконечного числа значений $l \in \mathbb{Z}_{\geqslant}$. Таким образом,

$$|C_l| \sim \frac{(\langle A, lq\rangle + a - 1)^{\langle A,lq\rangle + a - \frac{1}{2}}(|\langle B, lq\rangle| - b)^{|\langle B,lq\rangle| - b + \frac{1}{2}} e^{b-a+1}}{(q_1 l)^{q_1 l + \frac{1}{2}} \dots (q_n l)^{q_n l + \frac{1}{2}}} \cdot |\alpha(l)|,$$

где величина

$$\alpha(l) = \frac{2}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \sin \pi(|\langle B, lq\rangle| - b + 1)$$

ограниченная и при почти любом выборе направления $q \in \mathbb{Z}_{\geqslant}$ отделена от нуля для некоторой подпоследовательности l_j, т. е. $|\alpha(l_j)| \geqslant \alpha_0 > 0$ для всех $j = 1, 2, \dots$. Это означает, что для почти всех q

$$\overline{\lim_{l\to\infty}} \sqrt[l]{|\alpha(l)|} = 1,$$

поэтому

$$\frac{1}{\rho_q} = \lim_{l\to\infty} \sqrt[l]{\frac{\langle A, lq\rangle^{\langle A,lq\rangle} |\langle B, lq\rangle|^{|\langle B,lq\rangle|} e^{b-a+1}}{q_1{}^{q_1} \dots q_n{}^{q_n}}} = \frac{\langle A, q\rangle^{\langle A,q\rangle}}{|\langle B, q\rangle|^{\langle B,q\rangle} q_1{}^{q_1} \dots q_n{}^{q_n}}.$$

Аналогично поступаем для случая $A \in \mathbb{Z}^n_-$, $B \in \mathbb{Z}^n_+$. Лемма доказана.

Теперь составим вектор $\Psi(q) = (\Psi_1(q), \dots, \Psi_n(q))$ с компонентами

$$\Psi_i(q_1 : \dots : q_n) = q_i |\langle A, q\rangle|^{-a_i} |\langle B, q\rangle|^{b_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

и перейдем к доказательству теоремы. Согласно лемме 1 для радиуса сходимости диагонального ряда (10) имеем $\rho_q = \Psi_1{}^{q_1} \dots \Psi_n{}^{q_n}$ или после логарифмирования

$$\log \rho_q = q_1 \log \Psi_1 + \dots + q_n \log \Psi_n.$$

Таким образом, диагональный ряд $\sum C_l (x^q)^l$ сходится тогда и только тогда, когда $|x^q| < \rho_q = \Psi_1{}^{q_1} \dots \Psi_n{}^{q_n}$, т. е. когда $\log|x| = (\log|x_1|, \dots, \log|x_n|)$ находится в полупространстве

$$\langle q, \log|x|\rangle < \langle q, \log \Psi(q)\rangle. \tag{12}$$

Тем самым в пространстве переменных $\log|x|$ область сходимости ряда (6) будет внутренностью пересечения полупространств (12) по всем $q \in \mathbb{R}^n_+$.

Предложение 1. *При $q \in \mathbb{R}^n_+$ вектор $\log \Psi(q)$ параметризует выпуклую поверхность.*

Доказательство. Достаточно доказать, что характеристические корни матрицы Якоби $J = \frac{\partial(\log \Phi)}{\partial q}$ для параметризации $\log \Phi(q)$ неотрицательные. Доказательство проводится вычислением характеристического многочлена $P(\lambda) = \det(J - \lambda I)$ в точке $q = \bar{1} = (1, \dots, 1)$.

Лемма 2. *Характеристический многочлен матрицы Якоби $\frac{\partial(\log \Phi)}{\partial q}$ в точке $q = \bar{1}$ равен*

$$P(\lambda) = (-1)^n \lambda(\lambda - 1)^{n-2} \left(\lambda - n \frac{\sum\limits_{j=1}^n a_j b_j}{\left(\sum\limits_{j=1}^n a_j\right)\left(\sum\limits_{j=1}^n b_j\right)} \right),$$

откуда видно, что при условии знакопостоянства координат $\{a_j\}$ и $\{b_j\}$ все корни $P(\lambda)$ неотрицательные.

Доказательство. Непосредственным вычислением матрицы Якоби $J = \frac{\partial(\log\Phi)}{\partial q}$ получаем

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{q_1} - \frac{a_1^2}{\langle A,q\rangle} + \frac{b_1^2}{\langle B,q\rangle} & -\frac{a_1a_2}{\langle A,q\rangle} + \frac{b_1b_2}{\langle B,q\rangle} & \dots & -\frac{a_1a_n}{\langle A,q\rangle} + \frac{b_1b_n}{\langle B,q\rangle} \\ -\frac{a_1a_2}{\langle A,q\rangle} + \frac{b_1b_2}{\langle B,q\rangle} & \frac{1}{q_2} - \frac{a_2^2}{\langle A,q\rangle} + \frac{b_2^2}{\langle B,q\rangle} & \dots & -\frac{a_2a_n}{\langle A,q\rangle} + \frac{b_2b_n}{\langle B,q\rangle} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -\frac{a_1a_n}{\langle A,q\rangle} + \frac{b_1b_n}{\langle B,q\rangle} & -\frac{a_2a_n}{\langle A,q\rangle} + \frac{b_2b_n}{\langle B,q\rangle} & \dots & \frac{1}{q_n} - \frac{a_n^2}{\langle A,q\rangle} + \frac{b_n^2}{\langle B,q\rangle} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что поскольку Φ_i зависят лишь от отношений $q_1/q_n, \dots, q_{n-1}/q_n$, т. е. от $n-1$ переменных, то $\det J = 0$, откуда следует, что $\lambda = 0$ — собственное значение для $J(q)$ при любом q. Далее, при $q = \bar{1}$ матрица Якоби следующая:

$$J(\bar{1}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a_1^2}{|A|} + \frac{b_1^2}{|B|} & -\frac{a_1a_2}{|A|} + \frac{b_1b_2}{|B|} & \dots & -\frac{a_1a_n}{|A|} + \frac{b_1b_n}{|B|} \\ -\frac{a_1a_2}{|A|} + \frac{b_1b_2}{|B|} & 1 - \frac{a_2^2}{|A|} + \frac{b_2^2}{|B|} & \dots & -\frac{a_2a_n}{|A|} + \frac{b_2b_n}{|B|} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -\frac{a_1a_n}{|A|} + \frac{b_1b_n}{|B|} & -\frac{a_2a_n}{|A|} + \frac{b_2b_n}{|B|} & \dots & 1 - \frac{a_n^2}{|A|} + \frac{b_n^2}{|B|} \end{pmatrix},$$

где $|A| = a_1 + \dots + a_n$, $|B| = b + 1 + \dots + b_n$. Заметим, что $\lambda = 1$ является характеристическим корнем для $J(\bar{1})$ по крайней мере кратности $n-2$. В самом деле, столбцы матрицы $J(\bar{1}) - 1 \cdot I$ являются линейными комбинациями двух вектор-столбцов

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{|A|} \\ \vdots \\ \frac{a_n}{|A|} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{b_1}{|B|} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{|B|} \end{pmatrix},$$

и поэтому ранг этой матрицы не больше двух. Таким образом, кратность корня $\lambda = 1$ не меньше $n-2$, тем самым характеристический многочлен имеет вид

$$P(\lambda) = \det(J(\bar{1}) - \lambda I) = (-1)^n \lambda(\lambda - 1)^{n-2}(\lambda + m).$$

Но коэффициент при λ равен

$$m = \left(\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right)|_{\lambda=0} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_1a_2}{|A|} + \frac{b_1b_2}{|B|} & 1 - \frac{a_2^2}{|A|} + \frac{b_2^2}{|B|} & \dots & -\frac{a_2a_n}{|A|} + \frac{b_2b_n}{|B|} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -\frac{a_1a_n}{|A|} + \frac{b_1b_n}{|B|} & -\frac{a_2a_n}{|A|} + \frac{b_2b_n}{|B|} & \dots & 1 - \frac{a_n^2}{|A|} + \frac{b_n^2}{|B|} \end{vmatrix}$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} 1 - \frac{a_1^2}{|A|} + \frac{b_1^2}{|B|} & -\frac{a_1a_2}{|A|} + \frac{b_1b_2}{|B|} & \dots & -\frac{a_1a_n}{|A|} + \frac{b_1b_n}{|B|} \\ -\frac{a_1a_2}{|A|} + \frac{b_1b_2}{|B|} & 1 - \frac{a_2^2}{|A|} + \frac{b_2^2}{|B|} & \dots & -\frac{a_2a_n}{|A|} + \frac{b_2b_n}{|B|} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}.$$

В силу симметрии все n определителей последней суммы равны между собой, поэтому достаточно вычислить, например, минор $J_{n,n}(\bar{1}) = -\frac{m}{n}$. Нам удобнее вычислить $J_{n,1} = (-1)^{n-2} J_{n,n}$, который является коэффициентом при $dq_1 \wedge \dots \wedge dq_{n-1}$ в форме $d\log\Phi_2 \wedge \dots \wedge d\log\Phi_n$. Имеем

$$d\log\Phi_2 \wedge \dots \wedge d\log\Phi_n = \left(\frac{dq_2}{q_2} - a_2\frac{d\langle A,q\rangle}{\langle A,q\rangle} + b_2\frac{d\langle B,q\rangle}{\langle B,q\rangle}\right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{dq_n}{q_n} - a_n\frac{d\langle A,q\rangle}{\langle A,q\rangle} + b_n\frac{d\langle B,q\rangle}{\langle B,q\rangle}\right).$$

Теперь нетрудно видеть, что коэффициент при $dq_1 \wedge \dots \wedge dq_{n-1}$, вычисленный в точке $\bar{1}$, равен

$$\frac{(-1)^{n-1}}{q_2 \dots q_{n-1}}\left(\frac{a_1 a_n}{|A|} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{q_j \delta_{j,1}\delta_{j,n}}{|A||B|} + \frac{b_1 b_n}{|B|}\right),$$

где $\delta_{\mu,\nu}$ обозначает определитель $a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu$. Используя условие неконфлуэнтности ($a_j = b_j + 1$), получаем, что коэффициент при $dq_1 \wedge \dots \wedge dq_{n-1}$ равен

$$J_{n,1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_2 \dots q_{n-1}|A||B|}\left(a_1 b_1 q_1 + \sum_{j=2}^{n-1} a_j b_j q_j + a_n b_n q_n\right) = \frac{(-1)^{n-1}\sum\limits_{j=2}^{n-1} a_j b_j q_j}{q_2 \dots q_{n-1}|A||B|}.$$

Таким образом,

$$-\frac{m}{n} = J_{n,n}(\bar{1}) = (-1)^{n-2} J_{n,1}(\bar{1}) = -\frac{\sum a_j b_j}{|A||B|},$$

т. е.

$$m = n\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j b_j}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j\right)}.$$

Тем самым лемма 2 и предложение доказаны.

Для доказательства теоремы осталось заметить, что в условиях выпуклости поверхности $\log\Psi(q)$ гиперплоскость $\langle q, \log|x|\rangle = \langle q, \log\Psi(q)\rangle$, граничная к полупространству (12), является опорной к поверхности $\log\Psi(q)$ в направлении q. Поэтому $\Psi(q)$ параметризует границу области сходимости ряда (6) в логарифмических координатах. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С.* Обобщенные гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // Успехи мат. наук. 1992. Т. 47, № 4. С. 1–88.
2. *Horn J.* Über die Convergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen // Math. Ann. 1889. Bd 34. S. 544–600.
3. *Sato M.* Theory of prehomogeneous vector spaces (algebraic part) // Nagoya Math. J. 1990. V. 120. P. 1–34.
4. *Владимиров В. С.* Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.
5. *Kapranov M.* A characterization of A-discriminantal hypersurfaces in terms of the logarithmic Gauss map // Math. Ann. 1991. V. 290, N 2. P. 275–285.
6. *Passare M., Tsikh A.* Algebraic equations and hypergeometric series // The legacy of Niels Henrik Abel. Berlin: Springer-Verl., 2004. P. 653–672.
7. *Passare M., Sadykov T., Tsikh A.* Singularities of hypergeometric functions in several variables // Compositio Math. 2005. V. 141. N 3. P. 787–810.

8. *Пассаре М., Цих А. К., Чешель А. А.* Кратные интегралы Меллина — Барнса как периоды многообразий Калаби — Яу с несколькими модулями // Теорет. мат. физика. 1996. Т. 109, № 3. С. 381–394.

9. *Семушева А. Ю., Цих А. К.* Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений // Комплексный анализ и дифференциальные операторы. Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 2000. С. 122–134.

10. *Mellin H.* Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 1921. V. 172. P. 658–661.

Статья поступила 28 января 2005 г.

Семушева Анастасия Юрьевна
Красноярский гос. университет, пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
densemushev@yandex.ru