Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2007. Том 48, № 1

УДК 512.5

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА И КООРДИНАТНЫЕ ГРУППЫ ДЛЯ СВОБОДНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЫ СТУПЕНИ 2

М. Г. Амаглобели

Аннотация: Дана полная классификация алгебраических множеств и координатных групп для систем уравнений от одной переменной для свободной нильпотентной группы.

Ключевые слова: алгебраическая геометрия над группой, алгебраическое множество, координатная группа.

1. Введение

В работе исследуется алгебраическая геометрия над свободной нильпотентной группой G ступени нильпотентности 2. Более точно, мы изучаем алгебраические множества и координатные группы для систем уравнений от одной переменной над группой G. Отметим, что аналогичная проблема, когда G является свободной группой, изучалась в работах [1–4]. Окончательная формулировка теорем о структуре алгебраических множеств и координатных групп над свободной группой получена в работе [5]. Ситуация, когда G — свободная метабелева группа, изучалась в работах [6–8], а окончательные результаты были получены в работе В. Н. Ремесленникова и Н. С. Романовского [9].

2. Предварительные сведения

2.1. О нильпотентных группах ступени 2. Обозначим через $\mathfrak{N}_2$ многообразие 2-ступенно нильпотентных групп. Если G — группа из $\mathfrak{N}_2$, то ее коммутант G' содержится в $Z(G)$-центре группы G.

Пусть теперь G — свободная нильпотентная группа ранга $r > 1$, $G = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$, где $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ — система свободных порождающих для G. Обозначим через $c_{ij} = [a_j, a_i]$, где $j > i$, базисные коммутаторы веса 2, построенные на множестве A. Известно (см., например, [10, предложение 3.1]), что произвольный элемент $g \in G$ имеет запись вида

$$g = a_1^{\alpha_1} \dots a_r^{\alpha_r} \prod c_{ji}^{\beta_{ji}}, \tag{1}$$

где $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $\beta_{ji} \in \mathbb{Z}$, причем это представление единственно. Кроме того, известно, что $Z(G) = G'$. Отметим также другие известные факты о группе G:

— элемент g в виде (1) является примитивным для G (т. е. его можно включить в систему свободных порождающих для G) тогда и только тогда, когда строка $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ унимодулярна;

— если $g \notin Z(G)$, то его централизатор $C_G(g)$ является абелевой подгруппой, и если $g = a_1^{\alpha_1' d} \ldots a_r^{\alpha_r' d} b$, $d = \text{НОД}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, и строка $(\alpha_1', \ldots, \alpha_r')$ унимодулярна, то $C_G(g) = C_G(g')$, где $g' = a_1^{\alpha_1'} \ldots a_r^{\alpha_r'} \ldots$. Кроме того, если $h \in C_G(g)$, то $h \equiv g'^{\gamma} (\operatorname{mod} Z(G))$, $\gamma \in \mathbb{Z}$.

Напомним, что для любой конечно-порожденной нильпотентной группы G существует конечный ряд нормальных подгрупп с циклическими факторами. Число факторов, которые являются бесконечными циклическими, не зависит от выбора ряда и называется *числом Гирша* $h(G)$ для группы G.

2.2. Элементы алгебраической геометрии над группами. В работах Г. Баумслага, А. Г. Мясникова, В. Н. Ремесленникова [11] и А. Г. Мясникова, В. Н. Ремесленникова [12] изложены основные понятия и результаты алгебраической геометрии над группами. Для полноты изложения приведем некоторые из них, формулируя эти понятия и результаты специально для нильпотентных групп ступени 2. Пусть G — группа из $\mathfrak{N}_2$. Декартова степень $G^n = G \times \cdots \times G$ (n копий) называется *аффинным пространством над* G. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество букв, а $G[X]$ обозначает нильпотентное произведение $G \underset{\mathfrak{N}_2}{*} F(X)$, где $F(X)$ — свободная нильпотентная группа в $\mathfrak{N}_2$ с базой X. Система уравнений S над G есть подмножество из $G[X]$. Элемент $u \in S$ может рассматриваться как некоммутирующий полином от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из G: $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Элемент $p = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ назовем *корнем полинома* $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, если $u(g_1, \ldots, g_n) = 1$ в G. Пусть S — подмножество $G[X]$, тогда p называется *корнем* S, если p является корнем для каждого $u \in S$.

Определение 1. Подмножество V аффинного пространства G^n называется *алгебраическим множеством над* G, если V — множество всех решений системы уравнений $S \subseteq G[X]$.

Для данного S через $V_G(S)$ обозначим алгебраическое множество всех решений системы S. Кроме того, для V и S таких, что $V = V_G(S)$, определим

$$\operatorname{Rad}(V) = \{u \in G[X] \mid u(p) = 1 \text{ для всех } p \in V_G(S)\}.$$

Очевидно, что $\operatorname{Rad}(V)$ всегда является нормальной подгруппой в $G[X]$.

Определение 2. Группа $\Gamma(V) = G[X]/\operatorname{Rad}(V)$ называется *координатной группой* алгебраического множества V.

Далее, беря в качестве предбазы замкнутых множеств все алгебраические множества из G^n, мы превратим G^n в топологическое пространство (топология Зарисского). Стандартным способом определяется в G^n понятие неприводимого алгебраического множества. Координатную группу неприводимого алгебраического множества будем называть *неприводимой координатной группой.* Известно [11], что координатная группа алгебраического множества над G является G-подгруппой декартова произведения $G^I = \overline{\prod\limits_{i \in I}} G^{(i)}$, $G^{(i)} \cong G$, $i \in I$, причем сама группа G отождествляется с диагональю группы G^I, $\Delta : G \to G^I$, $\Delta(g) = (\ldots, g, \ldots)$. В дальнейшем мы будем рассматривать только системы уравнений от одной переменной и, следовательно, только алгебраические множества из G.

3. Описание координатных групп

В этом пункте будет дана полная классификация координатных групп для систем уравнений от одной переменной для свободной нильпотентной группы ступени 2.

Лемма 1. *Пусть G — конечно-порожденная нильпотентная группа и H — координатная группа алгебраического множества над G. Тогда существует такое натуральное число k, что H является G-подгруппой $G^k = \underbrace{G \times \cdots \times G}_{k \text{ раз}}$, причем G вкладывается в G^k диагональным способом.*

Доказательство. Как отмечено в п. 2, H является G-подгруппой группы $G^I == \prod_{i \in I} G^{(i)}$, где $G^{(i)} \cong G$, $i \in I$, и G диагональным способом вложено в G^I. В общей ситуации множество I является бесконечным множеством. Далее, учитывая, что группа G является полициклической, нужно применить лемму 32.31 из [13]: если A и B — конечно-порожденные полициклические группы и если A вкладывается в декартову степень группы B, то A вкладывается в конечную прямую степень группы B. Способ доказательства леммы 32.31 таков, что бесконечное множество I просто заменяется конечным подмножеством индексов. Отсюда сразу следуют все утверждения леммы 1. $\square$

Пусть G — свободная 2-ступенно нильпотентная группа ранга $r > 1$, $G = \langle a_1, a_2, \ldots, a_r \rangle$, где $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ — система свободных порождающих для G. По лемме 1 если H — координатная группа, то H лежит в прямом произведении $G^k = \underbrace{G \times \cdots \times G}_{k\text{раз}}$, где k — подходящее натуральное число, причем $\Delta : G \to G^k$, $\Delta(g) = (g, \ldots, g)$ — каноническое вложение G в G^k. Пусть $H = \langle \Delta(G), x \rangle$, причем $x = (g_1, \ldots, g_k)$.

Теорема 1. *Пусть $H = \langle \Delta(G), x \rangle$, как и выше. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

1) *$x \in \Delta(G)$, и тогда $H \cong G$;*

2) *с точностью до сдвига на элемент $\Delta(g) = (g, \ldots, g)$ элемент x таков, что $g_i \in Z(G)$ и $x \notin \Delta(G)$; в этом случае $H = G \times \langle x \rangle$;*

3) *с точностью до сдвига на элемент $\Delta(g) = (g, \ldots, g)$ элемент x таков, что $fx \notin Z(G^k)$ для всех $f \in \Delta(G)$ и существует элемент $g \notin Z(G)$ такой, что $g_i \in C_G(g)$; в этом случае $H = \langle G, x \mid [x, g_0] = 1 \rangle_{\mathfrak{N}_2}$, где $g = g_0^l c$, $c \in Z(G)$, и из g_0 по модулю $Z(G)$ не извлекается корень (g_0 — корневой элемент);*

4) *если не выполнено ни одно из условий 1–3, то $H = G \underset{\mathfrak{N}_2}{*} \langle x \rangle$ — свободная нильпотентная группа ранга $r + 1$ в $\mathfrak{N}_2$.*

Доказательство. Утверждения 1 и 2 теоремы ясны. Пусть выполнены условия утверждения 3. Докажем, что группа H имеет требуемый вид. Обозначим $H' = \langle G, y \mid [y, g_0] = 1 \rangle_{\mathfrak{N}_2}$. Ясно, что существует гомоморфизм $\varphi : H' \to H$ такой, что $\varphi(g) = g$, если $g \in G$ и $\varphi(y) = x$. Если $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq 1$, то число Гирша $h(H')$ строго больше числа Гирша $h(H)$. Покажем, что числа Гирша групп H и H' совпадают. Так как g_0 — корневой элемент, его можно включить в свободную систему порождающих для группы G; поэтому, не ограничивая общности рассуждений, можно полагать, что $g_0 = a_1$. Итак, $H' = \langle G, x \mid [x, a_1] = 1 \rangle_{\mathfrak{N}_2}$. Покажем,что $h(H') = h(G) + r = C_r^2 + 2r$.

Действительно, $h(H') = h(F_{r+1}) - 1 = C^2_{r+1} + r + 1 - 1 = C^2_{r+1} + r = \frac{(r+1)r}{2} + r = \frac{r(r-1)}{2} + 2r = C^2_r + 2r$.

Далее, так как $g \notin Z(G)$, то, не ограничивая общности рассуждений, можно полагать, что, во-первых, g является корневым элементом, а во-вторых, $g = a_1$. В этом случае $x = \left(a_1^{\alpha_1}c_1, \dots, a_1^{\alpha_r}c_r\right)$, $c_i \in Z(G)$, причем поскольку $fx \notin Z(G)$ для всех $f \in G$, то существуют индексы i_0, j_0 такие, что $\alpha_{i_0} \neq \alpha_{j_0}$. Покажем,что множество элементов $\{[\Delta(a_j), \Delta(a_i)],\ j > i,\ [x, \Delta(a_2)], \dots, [x, \Delta(a_r)]\}$ свободно порождает свободную абелеву группу. Отсюда будет следовать, что $h(H') = h(H)$ и $H \cong H'$. Выпишем подробнее систему элементов:

$$\begin{gathered}
[\Delta(a_j), \Delta(a_i)] = ([a_j, a_i], \dots, [a_j, a_i]), \quad j > i,\\
[x, \Delta(a_2)] = ([a_2, a_1]^{-\alpha_1}, \dots, [a_2, a_1]^{-\alpha_k}),\\
\dots\dots\\
[x, \Delta(a_r)] = ([a_r, a_1]^{-\alpha_1}, \dots, [a_r, a_1]^{-\alpha_k}).
\end{gathered} \tag{2}$$

Из сделанных выше предположений и из того, что G — свободная нильпотентная группа, следует, что система (2) свободно порождает свободную абелеву группу и

$$h(H) = C^2_r + r - 1 + r + 1 = C^2_r + 2r.$$

Обратимся к доказательству утверждения 4. Пусть не выполнено ни одно из условий 1–3. Надо доказать, что в этом случае $h(H) = h(F_{r+1})$; отсюда и будет следовать, что $H \cong F_{r+1}$. Заменяя x на $y = xg_1^{-1}$, мы можем предполагать, что $g_1 = 1$ и, кроме того, существуют такие компоненты i_0 и j_0, что $C_G(g_{i_0}) \neq C_G(g_{j_0})$. Как и в предыдущем пункте, достаточно показать, что система элементов $\{[\Delta(a_j), \Delta(a_i)],\ j > i,\ [x, \Delta(a_1)], \dots, [x, \Delta(a_r)]\}$ свободно порождает свободную абелеву группу. Выпишем подробнее систему элементов:

$$\begin{gathered}
\Delta(a_j), \Delta(a_i)] = ([a_j, a_i], \dots, [a_j, a_i]), \quad j > i,\\
[x, \Delta(a_1)] = (1, [g_2, a_1], \dots, [g_k, a_1]),\\
\dots\dots\\
[x, \Delta(a_r)] = (1, [g_2, a_r], \dots, [g_k, a_r]).
\end{gathered} \tag{3}$$

В силу сделанных предположений все векторы системы (3) не являются единичными. Кроме того, из вида элементов (3) для доказательства результата достаточно доказать, что система элементов $[x, \Delta(a_1)], \dots, [x, \Delta(a_r)]$ линейно независима. Ввиду наших предположений можно считать, что $i_0 = 2$, $j_0 = 3$ и $g_2 = a_1^{\alpha}c_1$, $\alpha \neq 0$, и что a_2 входит в разложение g_3 в степени $\beta \neq 0$. Тогда

$$\begin{array}{llllll}
[x, \Delta(a_1)] = (1, & 1, & [a_2, a_1]^{\beta} & \dots, & \dots), \\
[x, \Delta(a_2)] = (1, & [a_2, a_1]^{-\alpha}, & \dots & \dots, & \dots), \\
\multicolumn{6}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
[x, \Delta(a_r)] = (1, & [a_r, a_1]^{-\alpha}, & \dots & \dots, & \dots).
\end{array}$$

Отсюда сразу следует требуемый результат. $\square$

4. Описание алгебраических множеств и приводимость

Используя результаты предыдущего пункта, получим полную классификацию алгебраических множеств и координатных групп для свободной нильпотентной группы G из $\mathfrak{N}_2$.

Теорема 2. *Любая координатная группа H для системы уравнений от одной переменной является неприводимой координатной группой.*

Доказательство. По теореме E1 и следствию B3 из [12] достаточно доказать, что H G-аппроксимируется группой G. По теореме 1 для H существуют четыре возможности. То, что H G-дискриминируется G в случае 1 и 2, очевидно. Если H является свободной 2-ступенно нильпотентной группой, то утверждение, что H G-дискриминируется группой G, доказано в [14, теорема 4.1] даже в более общей ситуации.

Остается рассмотреть случай 3. Как и при доказательстве теоремы 1, можно считать, что $H = \langle G, x \mid [x, a_1] = 1\rangle_{\mathfrak{N}_2}$.

Следовательно, если $h \in H$, то

$$h = gx^{\alpha}[x, a_2]^{\beta_2} \dots [x, a_r]^{\beta_r} = gf, \tag{1}$$

где $\alpha, \beta_i \in \mathbb{Z}$, и эта запись единственна.

Итак, пусть $h_1 = g_1 f_1, \dots, h_m = g_m f_m$ — система неединичных попарно различных элементов из H. Для доказательства того факта, что H G-дискриминируется группой G, достаточно найти такой G-гомоморфизм из H в G, что если $i \neq j$, то $\varphi(h_i) \neq \varphi(h_j)$. Обозначим через $\Phi = \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ следующее множество G-гомоморфизмов из H в G: $\varphi_n(g) = g$ для всех $g \in G$, $\varphi_n(x) = a_1^n$. Докажем, что требуемый выше G-гомоморфизм можно найти уже среди G-гомоморфизмов из Φ. Пусть $g_i = a_1^{\gamma_{i_1}} \dots a_r^{\gamma_{i_r}} \prod [a_k, a_j]^{\beta_{i,k,j}}$ — каноническая запись элемента g_i в свободной группе G. Тогда при вычислении образа g_i при гомоморфизме φ_n в записи $\varphi_n(g_i)$ изменяются только коэффициенты γ_{i_1} и $\beta_{i,1,j}$, поэтому если другие коэффициенты в элементах g_i и g_j, $i \neq j$, различны, то $\varphi_n(g_i) \neq \varphi_n(g_j)$ для всех n. Тем самым, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что

$$g_i = a_1^{\gamma_i} \prod_{j=2}^{r} [a_1, a_j]^{\beta_{ij}}, \quad h_i = g_i x^{\alpha_i} [x, a_2]^{\delta_{2i}} \dots [x, a_r]^{\delta_{ri}}.$$

Далее, если $\gamma_i \neq \gamma_j$ или $\alpha_i \neq \alpha_j$, то нетрудно найти бесконечное множество $\Phi' \subseteq \Phi$ такое, что $\varphi_n(g_i) \neq \varphi_n(g_j)$ для любого $\varphi_n \in \Phi'$. Значит, не ограничивая общности, можно считать $\alpha_i = \alpha_j$, $\gamma_i = \gamma_j$ для всех h_i, $i = 1, \dots, m$, т. е.

$$h_i = a_1^{\gamma} x^{\alpha} [x, a_2]^{\delta_{2i}} \dots [x, a_r]^{\delta_{ri}}.$$

Перейдем к другой системе элементов:

$$h_i' = x^{-\alpha} a_1^{-\gamma} h_i, \ i = 1, \dots, m, \quad h_i' = [x, a_2]^{\delta_{2i}} \dots [x, a_r]^{\delta_{ri}}.$$

Если $\varphi_n(h_i) \neq \varphi_n(h_j)$, то $\varphi_n(h_i') \neq \varphi_n(h_j')$. Поэтому требуемое утверждение достаточно доказать для системы $\{h_i'\}$. Если $h_i' \neq h_j'$, то существует индекс k такой, что $\delta_{ki} \neq \delta_{k,j}$. Так как $\varphi_n(h_i') = [a_1, a_2]^{n\delta_{2i}} \dots [a_1, a_r]^{n\delta_{ri}}$, существует бесконечное множество $\Phi'' \subseteq \Phi'$ такое, что если $\varphi_n \in \Phi''$ и $i \neq j$, то $\varphi_n(h_i') \neq \varphi_n(h_j')$. $\square$

Результаты теоремы 3 мы формулируем по модулю понятия изоморфизма алгебраических множеств (определения см. в [11]).

Теорема 3. *Любое алгебраическое множество над свободной нильпотентной группой G ранга $r > 1$ из $\mathfrak{N}_2$ с точностью до изоморфизма является одним из следующих:*

1) *точка;*
2) *центр $Z(G)$ группы G;*
3) *централизатор элемента $g \in G$, $g \notin Z(G)$;*
4) *вся группа G.*

Доказательство. По теореме 1 для координатной группы H алгебраического множества Y есть четыре возможности.

1. $H \cong G$. В этом случае $Y = \{g\}$ и каноническое уравнение, определяющее Y, есть $xg^{-1} = 1$.

2. $H \cong G \times \langle x \rangle$. Ясно, что в этом случае если $S(x) = 1$ — система уравнений, определяющая Y, и $x = g$ — ее решение, то g — центральный элемент. С другой стороны, любой центральный элемент из G является решением этой системы, т. е. $Y = Z(G)$, и каноническая система S в этом случае может быть такой: $[x, a_1] = \dots = [x, a_r] = 1$.

3. $H = \langle G, x | [x, g_0] = 1 \rangle_{\mathfrak{N}_2}$, где g_0 — корневой элемент. В этом случае каноническое уравнение есть $[x, g_0] = 1$ и $Y = C_G(g_0)$.

4. H — 2-ступенно нильпотентная группа. Каноническое уравнение в этом случае $x = x$ и вся группа является решением этого уравнения, т. е. $Y = G$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Appel K. I.* One-variable equations in free groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1968. V. 19. P. 912–918.
2. *Лоренц А. А.* Решение систем уравнений с одним неизвестным в свободных группах // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148, № 6. С. 1253–1256.
3. *Лоренц А. А.* Бескоэффициентные уравнения в свободных группах // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160, № 3. С. 538–540.
4. *Lyndon R. C.* Equations in free groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 96. P. 445–457.
5. *Chiswell I. M., Remeslennkov V. N.* Equation in free groups with one variable 1 // J. Group Theory. 2000. V. 3, N 4. P. 445–466.
6. *Chapuis O.* ∀-free metabelian groups // J. Symbolic Logic. 1997. V. 62, N 1. P. 159–174.
7. *Remeslennikov V., Stöhr R.* On the quasivariety generated by a non-cyclic free metabelian groups // Algebra Colloq. 2004. V. 11, N 2. P. 191–214.
8. *Ремесленников В. Н., Романовский Н. С.* О метабелевых произведениях групп // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 3. С. 341–352.
9. *Ремесленников В. Н., Романовский Н. С.* Неприводимые алгебраические множества в метабелевой группе // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 5. С. 601–621.
10. *Амаглобели М. Г.* G-тождества нильпотентных групп. I // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 1. С. 3–21.
11. *Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V.* Algebraic geometry over groups. I. Algebraic sets and ideal theory // J. Algebra. 1999. V. 219, N 1. P. 16–79.
12. *Myasnikov A., Remeslennikov V.* Algebraic geometry over groups. II. Logical foundations // J. Algebra. 2000. V. 234, N 1. P. 225–276.
13. *Нейман Х.* Многообразия групп. М.: Мир, 1969.
14. *Амаглобели М. Г., Ремесленников В. Н.* G-Тождества и G-многообразия // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 3. С. 249–272.

Статья поступила 3 октября 2005 г., окончательный вариант — 28 марта 2006 г.

Амаглобели Михаил Георгиевич
Тбилисский гос. университет им. И. Джавахишвили,
факультет точных и естественных наук,
пр. Чавчавадзе, 1, Тбилиси 0128, Грузия
mereb@hepi.edu.ge