Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2007. Том 48, № 2

УДК 512.54

АВТОМОРФИЗМЫ ГРУПП КОКСЕТЕРА ТИПА K_n

Дж. Риан

Аннотация: Говорят, что система Коксетера (W,S) *имеет тип* K_n, если ассоциированный граф Коксетера Γ_S полный на n вершинах и имеет только нечетные метки ребер. Если W удовлетворяет одному из условий: 1) $n=3$, 2) W жесткий, то группа автоморфизмов W порождается внутренними автоморфизмами W и какими-то автоморфизмами, индуцированными Γ_S. Действительно, $\mathrm{Aut}(W)$ — полупрямое произведение $\mathrm{Inn}(W)$ и группы автоморфизмов диаграмм, так что W сильно жесткий. Показано также, что если W — группа Коксетера типа K_n, то W имеет в точности один сопряженный класс инволюций и тем самым $\mathrm{Aut}(W)=\mathrm{Spec}(W)$.

Ключевые слова: группа Коксетера, граф, автоморфизм.

1. Системы Коксетера

Группой Коксетера называют группу W, представимую в виде

$$\langle S \mid (ab)^{m_{ab}};\ (a,b)\in S\times S\rangle,$$

где $m : S\times S\to\{1,2,\dots,\infty\}$ удовлетворяет условиям:

(i) $m_{ab}=m_{ba}$ для всех $(a,b)\in S\times S$;

(ii) $m_{ab}=1$ тогда и только тогда, когда $a=b$.

Пару (W,S) называют *системой Коксетера*, а множество S — *множеством порождающих* W. Известно, что система Коксетера обладает следующим свойством: для данных группы G и отображения $f : S\to G$ такого, что $(f(s)f(s'))^{m_{ss'}}=1$ для всех $(s,s')\in I$, существует гомоморфизм g из W в G, являющийся естественным расширением f (см., например, [1]).

Если $m_{ab}=\infty$ для некоторых $a,b\in S$, то элементы ab и ba имеют бесконечный порядок в W и знак отношения между $(ab)^{m_{ab}}$ и $(ba)^{m_{ba}}$ по договоренности опускается в записи. Из определения группы Коксетера вытекает, что каждый $s\in S$ должен иметь порядок два. Элементы порядка два будем называть *инволюциями*. В данной статье мы ограничимся конечными значениями m_{ab}.

2. Графы

Есть разные соглашения по сопоставлению графа системе Коксетера. Здесь мы используем одно из них. Для системы Коксетера (W,S) определим *граф Коксетера* как помеченный граф Γ_S, удовлетворяющий условиям:

1) существует биекция между S и множеством вершин графа Γ_S;

2) вершины $x,y\in S$ соединены ребром $\{x,y\}$ тогда и только тогда, когда $m_{xy}\ge 3$;

3) ребро $\{s,t\}$ помечено меткой m_{st} тогда и только тогда, когда $m_{st}\ge 4$.

Ниже мы будем отождествлять ребро $\{s,t\}$ графа Γ_S с подмножеством $\{s,t\}\subseteq S$.

Систему Коксетера (W, S) называют *неприводимой*, если Γ_S связный. Все неприводимые системы, для которых W конечно, классифицированы в соответствии с их графами Коксетера (см., например, [2, 3]). Далее в этой работе предполагается, что (W, S) — система Коксетера.

Говорят, что система Коксетера (W, S) *имеет тип* K_n, если

1) соответствующий граф Коксетера Γ_S — полный граф на $n = |S|$ вершинах;

2) функция m четна для всех $s, t \in S$.

Если группа Коксетера W имеет систему Коксетера типа K_n, то будем говорить, что W — *группа типа* K_n. Это определение подтверждается тем, что каждая система Коксетера типа K_n однозначно соответствует группе Коксетера типа K_n.

3. Автоморфизмы

Группа $\mathrm{Aut}(W)$ определяет действие группы на множестве классов сопряженности инволюций W следующим образом. Пусть α — элемент из $\mathrm{Aut}(W)$, и пусть $[x]$ — класс сопряженности x. Положим $\alpha([x]) = [\alpha(x)]$. Ядро этого действия будем называть *группой специальных автоморфизмов* и обозначать через $\mathrm{Spec}(W)$; оно содержит группу внутренних автоморфизмов, так как сопряжение любого $w \in W$ сохраняет весь класс сопряженности. Тем самым есть ряд нормальных подгрупп в $\mathrm{Aut}(W)$:

$$\{\mathrm{id}_W\} \le \mathrm{Inn}(W) \le \mathrm{Spec}(W) \le \mathrm{Aut}(W).$$

Автоморфизм диаграмм (W, S) — это автоморфизм $\alpha : W \to W$ такой, что $\alpha(S) = S$. Если ϕ — ограничение α на S, то $\phi : S \to S$ — биекция и $m(\phi(s), \phi(t)) = m(s, t)$ для любых $s, t \in S \times S$. Обратно, так как W имеет представление, указанное в определении группы Коксетера, любое такое ϕ распространяется до автоморфизма диаграмм. Множество автоморфизмов диаграмм, очевидно, образует группу относительно операции композиции функций; обозначим эту группу через $\mathrm{Diag}(W, S)$. Будем отождествлять $\mathrm{Diag}(W, S)$ с группой подстановок S.

4. Случай ранга 3

Для конечнопорожденной системы Коксетера (W, S) результат из [4] показывает, что есть лишь конечный набор классов сопряженности инволюций в W. Действительно, покажем, что если W типа K_n, то существует только один такой класс сопряженности (т. е. все инволюции в W сопряженны).

Если $T \subseteq S$, то через W_T обозначаем подгруппу в W, порожденную T. В случае $T = \varnothing$ имеем $W_\varnothing = \{\mathrm{id}_W\}$. Пусть

$$\mathscr{S}(S) = \{T \subseteq S \mid |W_T| < \infty\}.$$

Иначе говоря, $\mathscr{S}$ — совокупность подмножеств в S, которые порождают конечные подгруппы в W. Если $w \in W$ и $T \in \mathscr{S}(S)$, то подгруппа сопряженности wW_Tw^{-1} называется *S-параболической подгруппой* (или просто *параболической подгруппой*, если не возникает недоразумений) и подгруппа W_T — *стандартной параболической подгруппой* в W. Пусть

$$\mathscr{P}(S) = \{wW_Tw^{-1} \mid w \in W,\ T \in \mathscr{S}(S)\}$$

есть совокупность параболических подгрупп в W. Если $G = wW_Tw^{-1}$, то *параболический ранг* G, обозначаемый символом $rk(G)$, равен мощности T. Собственная конечная подгруппа $H \leq W$ называется *максимальной* подгруппой W, если для любой подгруппы J из соотношения $H < J \leq W$ вытекает, что либо J бесконечна, либо $J = W$.

Лемма 1 [5]. *Пусть (W, S) — система Коксетера, где W — бесконечная неприводимая группа Коксетера. Если G — максимальная конечная подгруппа в W, то $G \in \mathscr{P}(S)$.*

Лемма 2 [6]. *Если W — бесконечная группа Коксетера, то все максимальные конечные стандартные параболические подгруппы в W являются максимальными конечными подгруппами в W.*

Исследуем структуру классов сопряженности инволюций в W.

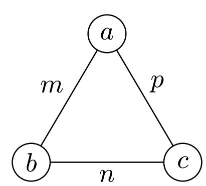
Теорема 3. *Если W — группа Коксетера типа K_n, то все инволюции в W лежат в одном классе сопряженности.*

Доказательство. Пусть W — группа Коксетера типа K_n, и пусть x — какая-либо инволюция в W. Тогда $W_{\{x\}}$ конечна и $W_{\{x\}} \subseteq K$, где K — максимальная конечная подгруппа в W. По лемме 1 имеем $wKw^{-1} = W_T$ для некоторых $T \in \mathscr{S}(S)$ и $w \in W$. Отсюда $x = wyw^{-1}$ при некоторых $w \in W$ и $y \in W_T$, так что $y^2 = 1$. Поскольку W_T — диэдральная группа, можно считать не уменьшая общности, что $y \in T$. Так как генераторы группы Коксетера K_n, очевидно, лежат в простом классе сопряженности, мы приходит к результату теоремы.

Следствие 4. *Если W — группа Коксетера типа K_n, то* $\mathrm{Spec}(W) = \mathrm{Aut}(W)$.

Доказательство. Так как все инволюции в W лежат в одном классе сопряженности $\mathscr{C}$, группа автоморфизмов сохраняет $\mathscr{C}$, поэтому $\mathrm{Spec}(W) = \mathrm{Aut}(W)$.

Если не оговорено иное, далее в этом разделе пусть W — группа Коксетера типа K_3 с диаграммой



Теорема 5. *Если W — группа Коксетера типа K_3, то каждый $\alpha \in \mathrm{Aut}(W)$ может быть представлен в виде $\alpha = \beta \circ \gamma$, где $\beta \in \mathrm{Inn}(W)$ и $\gamma \in \mathrm{Diag}(W)$.*

Доказательство. Из леммы 1 известно, что если G — максимальная конечная подгруппа в W, то $G = wW_Tw^{-1}$, где $T \in \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ и $w \in W$.

Пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}(W)$. Параболическая подгруппа $W_{\{a,b\}}$ является максимальной конечной подгруппой в W, и так как α — автоморфизм, то $\alpha(W_{\{a,b\}})$ также максимальная конечная подгруппа. Отсюда следует, что $\alpha(W_{\{a,b\}})$ сопряженный к стандартной параболической подгруппе, символически $\alpha(W_{\{a,b\}}) = wW_{\{x,y\}}w^{-1}$. Тем самым с точностью до внутреннего автоморфизма (сопряжение посредством w^{-1}) $\alpha(W_{\{a,b\}}) = W_{\{x,y\}}$ для некоторых $x, y \in S$.

Если $\{x, y\} = \{a, c\}$, то $m = p$ и мы имеем автоморфизм диаграмм γ, сохраняющий a и переставляющий b и c. Следовательно, с точностью до внутреннего автоморфизма $\alpha(W_{\{a,c\}}) = \gamma(W_{\{a,c\}})$ для некоторого $\gamma \in \mathrm{Diag}(W)$. Поэтому с точностью до внутреннего автоморфизма и автоморфизма диаграмм α сохраняет $W_{\{a,b\}}$. Аналогично если $\{x, y\} = \{b, c\}$, то можно использовать модификацию предыдущих рассуждений.

Итак, будем считать, что $\alpha(W_{\{a,b\}}) = W_{\{a,b\}}$. Известно, что $\alpha(a)$ — инволюция в $W_{\{a,b\}}$. Так как автоморфизмы отображают инволюции в инволюции, с точностью до внутреннего автоморфизма и автоморфизма диаграмм $\alpha(a)$ равно tat^{-1} или tbt^{-1} для некоторого $t \in W_{\{a,b\}}$. Следовательно, с точностью до внутреннего автоморфизма и автоморфизма диаграмм $\alpha(W_{\{a,b\}}) = tW_{\{a,b\}}t^{-1}$. Отметим, что сопряжение $W_{\{a,b\}}$ посредством t сохраняет $W_{\{a,b\}}$. Поэтому с точностью до внутреннего автоморфизма и автоморфизма диаграмм можно считать, что $\alpha(W_{\{a,b\}}) = W_{\{a,b\}}$ и $\alpha(a)$ равно a или b.

Если $\alpha(a) = a$, то все доказано. Допустим тем самым, что $\alpha(a) = b$. Поскольку W типа K_n, то m_{ab} должно быть нечетным и мы имеем $(ab)^{m_{ab}} = \{\mathrm{id}_W\}$. Отсюда

$$b = (ab)^{\frac{m_{ab}-1}{2}} a (ba)^{\frac{m_{ab}-1}{2}}$$

и поэтому a и b сопряжены в $W_{\{a,b\}}$. Следовательно,

$$\alpha(a) = b = (ab)^{\frac{m_{ab}-1}{2}} a (ba)^{\frac{m_{ab}-1}{2}},$$

и тем самым можно сделать сопряжение посредством $(ba)^{\frac{m_{ab}-1}{2}}$ так, что α сохраняет a. Итак, с точностью до внутреннего автоморфизма и графового автоморфизма α сохраняет a, b, и c. Теорема доказана.

Нам потребуются следующие леммы [5].

Лемма 6. *Пусть (W, S) — система Коксетера типа K_n. Если (W, S', m') — другая система для W, то $|S| = |S'|$.*

Следующую лемму можно найти в [6, лемма 37].

Лемма 7. *Если W — бесконечная группа Коксетера, то тождествен только автоморфизм диаграмм, являющийся внутренним.*

Аналоги двух следующих теорем появляются как основная теорема и следствие в [7] при различных предположениях относительно W.

Теорема 8. *Пусть S и S' — два множества порождающих для W, где W — группа Коксетера типа K_n, и пусть $\mathrm{Aut}(W)$ порождена внутренними автоморфизмами и автоморфизмами диаграмм в W. Тогда существует единственный элемент $w \in W$ такой, что*

$$S' = wSw^{-1}.$$

Доказательство. Пусть S и S' — два (различных) фундаментальных множества порождающих для W, и предположим, что нет требуемого $w \in W$. Тогда, так как по лемме 6 должно быть $|S| = |S'|$, существует взаимно однозначное отображение $\phi : S \to S'$, не являющееся подстановкой в S, ибо $S \neq S'$. Из предположений вытекает, что отображение ϕ не является сопряжением в S и тем самым ϕ не будет произведением сопряжений или подстановок. Так как ϕ определяется его действием на S, это противоречит нашему предположению о том, что $\mathrm{Aut}(W)$ порождается внутренними автоморфизмами и автоморфизмами диаграмм. Следовательно, искомый w всегда есть.

Покажем теперь, что w единствен. Пусть существуют различные нетривиальные $v, w \in W$ такие, что $vSv^{-1} = wSw^{-1}$, и определим отображение $\phi : S \to S$,

$$\phi(S) = w^{-1}vSv^{-1}w.$$

Очевидно, $\phi(S) = S$, так что ϕ определено корректно. Следовательно, ϕ — подстановка в S, откуда ϕ — автоморфизм диаграмм. Но ясно, что ϕ определяется также и как внутренний автоморфизм. Из леммы 7 известно, что только тот автоморфизм диаграмм, который является внутренним, будет тождественным автоморфизмом, поэтому должно быть $v = w = \{\mathrm{id}_W\}$; противоречие.

Говорят, что группа Коксетера *сильно жесткая*, если она обладает тем свойством, что любые два порождающие множества сопряжены. Говорят, что группа Коксетера просто *жесткая*, если любые две диаграммы Коксетера Γ и Γ' изоморфны. Очевидно, сильно жесткая группа будет жесткой.

Пусть G — группа, и пусть H, N — подгруппы в G, причем N нормальна. Группа G называется *полупрямым произведением* H и N, если $G = NH$ и $H \cap N = \{\mathrm{id}_G\}$, при этом пишут $G = N \rtimes H$.

Теорема 9. *Если W — группа Коксетера типа K_n и $\mathrm{Aut}(W)$ порождается внутренним автоморфизмами и автоморфизмами диаграмм W, то*

$$\mathrm{Aut}(W) = \mathrm{Inn}(W) \rtimes \mathrm{Diag}(W, S).$$

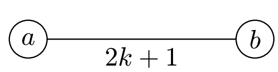
Доказательство. Если два автоморфизма совпадают на S, они равны. Если $\alpha \in \mathrm{Aut}(W)$, то $\alpha(S)$ — другое фундаментальное множество порождающих. Значит, по теореме 8 $\alpha(S) = wSw^{-1}$. Следовательно, α можно записать в виде $\alpha = \beta \circ \gamma$, где $\beta \in \mathrm{Inn}(W)$ и $\gamma \in \mathrm{Diag}(W, S)$. Ввиду единственности в теореме 8 это разложение единственно, так что $\mathrm{Aut}(W)$ — полупрямое произведение.

Следствие 10. *Если W типа K_3, то* $\mathrm{Aut}(W) = \mathrm{Inn}(W) \rtimes \mathrm{Diag}(W, S)$.

Доказательство вытекает из предыдущих теорем.

5. Общий случай

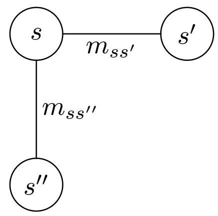
Вначале дадим описание автоморфизмов групп Коксетера типа K_2, которые, как указано в [5], являются просто диэдральными группами нечетного порядка D_{2k+1}. Эти группы можно реализовать как группы симметрий регулярного $(2k+1)$-угольника. Очевидно, каждая такая группа имеет в точности $2k+1$ элементов порядка два, и они представляют собой отражения $(2k+1)$-угольника относительно прямых симметрии, проходящих через каждую вершину и середину противоположной стороны. Группа D_{2k+1} имеет следующее представление: $\langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^{2k+1} \rangle$. Соответствующая диаграмма Коксетера такова:



Следовательно, отображение $\alpha : D_{2k+1} \to D_{2k+1}$, заданное правилом $\alpha(a) = x$, $\alpha(b) = y$, определяет автоморфизм, если порядок xy равен $2k+1$ и x^2, y^2 тривиальны. Так как любой автоморфизм должен отображать отражения в отражения, то $\mathrm{Aut}(W)$ порождается указанными выше автоморфизмами и автоморфизмом, индуцированным диаграммой Коксетера в D_{2k+1}.

Обозначим множество порождающих в D_{2k+1} через $\mathscr{G}_{2k+1}$. Рассмотрим систему Коксетера (W,S) типа K_n и предположим, кроме того, что эта система жесткая. В [5] показано, что все группы типа K_n, обладающие тем свойством, что не более чем одна метка ребра отличается от других, жесткие. Тогда только максимальные подгруппы порядка $m_{ss'}$ имеют вид $wW_{\{x,y\}}w^{-1}$, где $x,y \in \mathscr{G}_{m_{ss'}}$ и $w \in W$. Порождающие этих подгрупп — это просто $w\mathscr{G}_{2k+1}w^{-1}$. Так как W жесткая, для каждой пары различных $x,y \in S$ найдутся $z,z' \in S$ и $w_{zz'} \in W$ такие, что $\alpha(W_{\{x,y\}}) = w_{zz'}W_{\{z,z'\}}w_{zz'}^{-1}$. Следовательно, мы можем предполагать с точностью до автоморфизма диаграмм γ, что $\alpha(W_{\{x,y\}}) = w_{xy}W_{\{x,y\}}w_{xy}^{-1}$ для любых $x,y \in S$ и соответствующего $w_{xy} \in W$. Очевидно, должно быть $\alpha(s),\alpha(s') \in w\mathscr{G}_{2k+1}w^{-1}$.

Рассмотрим произвольный подграф в Γ_S следующего вида:



Известно, что $\alpha(W_{\{a,b\}}) = w_{ab}W_{\{a,b\}}w_{ab}^{-1}$. Поэтому с точностью до сопряжения посредством w_{ab}^{-1} и автоморфизма диаграмм γ можно считать, что $\alpha(W_{\{s,s'\}}) = W_{\{s,s'\}}$ и $\alpha(W_{\{s',s''\}}) = vW_{\{s',s''\}}v^{-1}$ для некоторого $v \in W$. Отсюда $\alpha(s') \in \{\mathscr{G}_{m_{ss'}} \cap \mathscr{G}_{m_{s's''}}\}$. Если теперь v не будет элементом $\{\mathscr{G}_{m_{ss'}} \cup \mathscr{G}_{m_{s's''}}\}$, то $\{\mathscr{G}_{m_{ss'}} \cap \mathscr{G}_{m_{s's''}}\} = \{\varnothing\}$; противоречие. Поэтому должно быть $v \in \{\mathscr{G}_{m_{ss'}} \cup \mathscr{G}_{m_{s's''}}\}$.

Предположим вначале, что $v \in \mathscr{G}_{m_{s's''}}$. Тогда, так как сопряжение подгруппы $W_{\{x,y\}}$ элементом из этой группы сохраняет $W_{\{x,y\}}$, имеем $\alpha(W_{\{s,s'\}}) = W_{\{s,s'\}}$ и $\alpha(W_{\{s',s''\}}) = vW_{\{s',s''\}}v^{-1} = W_{\{s',s''\}}$.

Теперь рассмотрим другой случай: $v \in \mathscr{G}_{m_{ss'}}$. Имеем $\{\mathscr{G}_{m_{ss'}} \cap \mathscr{G}_{m_{s's''}}\} = \{\varnothing\}$, кроме случая, когда $v = s'$. Снова, так как $s' \in W_{\{s',s''\}}$, получаем, что в обоих случаях $\alpha(W_{\{s,s'\}}) = W_{\{s,s'\}}$ и $\alpha(W_{\{s',s''\}}) = vW_{\{s',s''\}}v^{-1} = W_{\{s',s''\}}$.

Итак, доказана следующая

Лемма 11. *Если $\alpha(W_{\{x,y\}}) = W_{\{x,y\}}$, то $\alpha(W_{\{x,z\}}) = W_{\{x,z\}}$ для любого $z \in S\backslash\{x\}$.*

Из этой леммы, очевидно, вытекает, что $\alpha(W_{\{x,y\}}) = \beta \circ (\gamma(W_{\{x,y\}}))$, где $\beta \in \mathrm{Inn}(W)$ и $\gamma \in \mathrm{Diag}(W)$. Поэтому с точностью до внутреннего автоморфизма и автоморфизма диаграмм $\alpha(W_{\{x,y\}}) = W_{\{x,y\}}$ для всех $x,y \in S$. Вновь рассмотрим произвольный подграф в Γ_S указанного выше вида. Имеем $\alpha(s') \in \{\mathscr{G}_{m_{ss'}} \cap \mathscr{G}_{m_{s's''}}\} = s'$. Ввиду произвольности s, s', s'' получаем, что $\alpha(t) = \beta \circ (\gamma(t))$ для любого $t \in S$. Следовательно, с точностью до внутреннего автоморфизма и автоморфизма диаграмм каждый $\alpha \in \mathrm{Aut}(W)$ сохраняет каждый образующий группы W, т. е. α — тождественный автоморфизм. Тем самым доказана следующая

Теорема 12. *Если W — жесткая группа Коксетера типа K_n, то каждый $\alpha \in \mathrm{Aut}(W)$ можно представить в виде $\alpha = \beta \circ \gamma$, где $\beta \in \mathrm{Inn}$ и $\gamma \in \mathrm{Diag}(W)$.*

Обращаясь к теоремам 8 и 9, отметим следующие их усиления.

Теорема 13. *Если W — жесткая группа Коксетера типа K_n, то*

$$\mathrm{Aut}(W) = \mathrm{Inn}(W) \rtimes \mathrm{Diag}(W, S).$$

6. Заключение

В направлении полной классификации автоморфизмов групп Коксетера типа K_n имеем следующие результаты. Если может быть установлена жесткость этих групп Коксетера, то можно считать, что $\alpha(W_{\{x,y\}}) = w_{xy} W_{\{x,y\}} w_{xy}^{-1}$ для любых $x, y \in S$ и соответствующего $w_{xy} \in W$ для произвольной группы Коксетера типа K_n. Тем самым можно получить полную классификацию $\mathrm{Aut}(W)$, как указано выше. Можно также доказать, что все группы такого вида сильно жесткие, как в теореме 8. В свою очередь, если можно показать, что с точностью до автоморфизмов диаграмм $\alpha(W_{\{x,y\}}) = w_{xy} W_{\{x,y\}} w_{xy}^{-1}$ для любых $x, y \in S$ и соответствующего $w_{xy} \in W$, то все группы Коксетера типа K_n сильно жесткие, как в теореме 8, и можно доказать, что $\mathrm{Aut}(W) = \mathrm{Inn} \rtimes \mathrm{Diag}(W, S)$.

В [5] доказано, что группы Коксетера типа K_n являются *слабо жесткими*, т. е. такими, что наборы меток ребер должны быть одинаковыми для любых двух графов Коксетера Γ и Γ', что соответствует системе Коксетера (W, S) типа K_n. Весьма вероятно, что эти группы по крайней мере жесткие и из наших результатов вытекает, что если это верно, то они действительно сильно жесткие.

В [5] показано также, что все группы типа K_n, обладающие тем свойством, что самое большее одна метка ребра отлична от других, жесткие. В итоге мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 14. *Пусть W — группа Коксетера типа K_n с диаграммой Γ_W. Если выполнено одно из следующих условий:*

1) $n = 3$,

2) *W жесткая,*

то $\mathrm{Aut}(W) = \mathrm{Inn}(W) \rtimes \mathrm{Diag}(W, S)$ *и W сильно жесткая.*

Благодарности. Я признателен профессору Антону Каулу за постановку задачи и многочасовые обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Magnus W., Karrass A., Solitar D.* Combinatorial group theory. New York: Dover Publ., 1976.
2. *Howlett R. B.* Miscellaneous facts about Coxeter groups. Lectures given at the ANU Group Actions Workshop October 1993. http://www.maths.usyd.edu.au/res/Algebra/How/anucox.html.
3. *Humphreys J. E.* Reflection groups and Coxeter groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
4. *Richardson R. W.* Conjugacy classes of involutions in coxeter groups // Bull. Austral. Math. Soc. 1982. V. 26. P. 1–15.
5. *Kaul A.* A class of rigid Coxeter groups // J. London Math. Soc. 2002. V. 66, N 2. P. 592–604.
6. *Franzsen W. N., Howlett R. B.* Automorphisms of nearly finite Coxeter groups // Adv. Geometry. 2003. V. 3, N 3. P. 301–338.
7. *Charney R., Davis M.* When is a Coxeter system determined by its Coxeter group? // J. London Math. Soc. 2000. V. 61, N 2. P. 441–461.

Статья поступила 29 апреля 2003 г.

Jeffrey A. Ryan (Джеффри А. Риан)
Courant Institute of Mathematical Sciences
New York University, New York, NY 10012, USA
jryan@courant.nyu.edu