Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5

УДК 512.541.52+519.175.1

ИЗОМОРФИЗМЫ ГРАФОВ КЭЛИ СВОБОДНОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

А. А. Рябченко

Аннотация: Группа G называется *CI-группой*, если из изоморфизма графов Кэли $\mathrm{Cay}(G, A) \cong \mathrm{Cay}(G, B)$, где A и B — системы порождающих в G, следует существование такого автоморфизма $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$, что $\sigma(A) = B$. Доказано, что любая конечно-порожденная абелева группа является CI-группой.

Ключевые слова: абелева группа, граф Кэли, дистанционный граф.

1. Необходимые определения

Будем рассматривать абелеву группу G и подмножество $S \subset G$, инвариантное относительно операции обращения элемента (т. е. вместе с любым своим элементом s множество S содержит также элемент $-s$). *Графом Кэли* группы G относительно подмножества S называется граф $D = \mathrm{Cay}(G, S)$ с множеством вершин $V(D) = G$, в котором вершины x и y смежны тогда и только тогда, когда существует такой элемент $s \in S$, что $y = x + s$. Заметим, что граф $\mathrm{Cay}(G, S)$ связен тогда и только тогда, когда $G = \langle S \rangle$, т. е. S является системой порождающих группы G.

Пусть A и B — произвольные системы порождающих группы G. Если из изоморфизма графов $\mathrm{Cay}(G, A) \cong \mathrm{Cay}(G, B)$ следует существование такого автоморфизма σ группы G, что $\sigma(A) = B$, то говорят, что группа G обладает *CI-свойством* и называют ее *CI-группой*.

Дистанционным графом $D(d_1, d_2, \dots, d_k)$ с дистанциями $d_1, d_2, \dots, d_k$ (где $0 < d_1 < d_2 < \dots < d_k$ — целые числа) называется граф с множеством вершин $\mathbb{Z}$, где вершины x и y смежны тогда и только тогда, когда $|x - y| = d_i$ при некотором $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Под *длиной ребра* дистанционного графа будем понимать значение дистанции, соответствующей данному ребру.

Циркулянтом $C(n; d_1, d_2, \dots, d_k)$ порядка n с дистанциями $d_1, d_2, \dots, d_k$ (где $0 < d_1 < d_2 < \dots < d_k \le n/2$) называется граф с множеством вершин $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$, где вершины x и y смежны тогда и только тогда, когда $x - y \equiv \pm d_i (\operatorname{mod} n)$ для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Из данных определений следует, что

$$D(d_1, d_2, \dots, d_k) \cong \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, S) \quad \text{и} \quad C(n; d_1, d_2, \dots, d_k) \cong \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, S),$$

где $S = \{\pm d_1, \pm d_2, \dots, \pm d_k\}$ и через $\mathbb{Z}_n$ обозначена конечная циклическая группа порядка n.

Два изоморфных циркулянта $C(n; d_1, \dots, d_k)$ и $C'(n; d'_1, \dots, d'_k)$ называются *вывертами* друг друга, если существует такое целое число $t > 0$, взаимно простое с n, что для каждого $i = 1, \dots, k$ при некотором $j = 1, \dots, k$ выполнено сравнение $td_i \equiv \pm d'_j (\operatorname{mod} n)$. На языке автоморфизмов групп это означает, что граф C' является образом графа C при автоморфизме $\sigma : x \mapsto tx$ группы $\mathbb{Z}_n$.

2. Введение в проблему

В последние годы активно исследовался вопрос о CI-свойстве для конечных групп [1]. Были описаны некоторые классы групп, не являющихся CI-группами. В частности, описаны все циклические группы, не обладающие CI-свойством [2, 3].

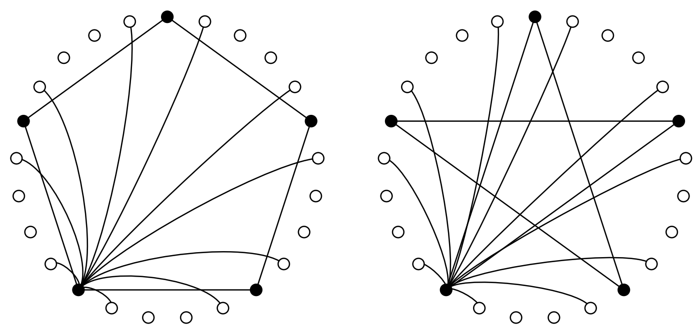

Рис. 1.

На рис. 1 изображены фрагменты двух изоморфных циркулянтов порядка 25, не являющихся вывертами. Так как графами Кэли циклических групп являются циркулянты и автоморфизмы групп порождают только изоморфные циркулянты, являющиеся вывертами, то этот пример доказывает, что циклическая группа порядка 25 не является CI-группой. В [3] построена бесконечная серия изоморфных циркулянтов, не являющихся вывертами.

В работе [4] выдвинута гипотеза о том, что группа $\mathbb{Z}$ является CI-группой, и подтверждена ее справедливость для случая, когда степень графа Кэли не превосходит четырех.

В настоящей статье доказано, что конечно-порожденные свободные абелевы группы являются CI-группами. Тем самым продолжено начатое в [4] изучение вопроса о CI-свойстве для бесконечных абелевых групп.

3. Изоморфизмы дистанционных графов

Вначале докажем, что группа $\mathbb{Z}$, т. е. свободная абелева группа с одним образующим, обладает CI-свойством. Для этого убедимся, что справедлива следующая

Теорема 1. *Если дистанционные графы D и D' изоморфны, то наборы их дистанций совпадают.*

Доказательство. Пусть $D = D(d_1, \dots, d_k)$, $D' = D(d'_1, \dots, d'_t)$, $\varphi : D \to D'$ — изоморфизм графов. Будем считать, что $d_1 < \dots < d_k$, $d'_1 < \dots < d'_t$. Так как степень каждой вершины дистанционного графа равна удвоенному числу его дистанций, то $t = k$.

Докажем утверждение теоремы 1 индукцией по k. Пусть $k = 1$. Заметим, что число компонент связности графа D равно d_1 (так как D состоит из d_1 изолированных бесконечных цепей — прямых). Аналогично число компонент графа D' равно d'_1. Поскольку графы D и D' изоморфны, то $d_1 = d'_1$.

Пусть $k > 1$. Раскрасим ребра графа D длины d_k и их образы при изоморфизме φ в красный цвет. Очевидно, что в каждом из графов D и D' красные ребра образуют 2-фактор. Рассмотрим в графе D' красные ребра XY и YZ, инцидентные вершине Y. Если эти ребра имеют разную длину в D', то в графе D' существует вершина $Y' = X + Z - Y \neq Y$, смежная с X и Z (рис. 2).

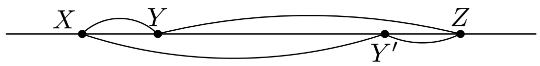

Рис. 2.

В этом случае в графе D вершины $\varphi^{-1}(Y)$ и $\varphi^{-1}(Y')$ смежны с каждой из вершин $\varphi^{-1}(X)$ и $\varphi^{-1}(Z)$. Однако в графе D красные ребра $\varphi^{-1}(XY)$ и $\varphi^{-1}(YZ)$ имеют максимальную длину, а значит, вершины $\varphi^{-1}(X)$ и $\varphi^{-1}(Z)$ могут быть смежны только с одной общей вершиной $\varphi^{-1}(Y)$.

Таким образом, в графе D' красные ребра, исходящие из одной вершины, имеют одинаковую длину. Отсюда следует, что красные ребра в D' образуют прямые, каждая из которых состоит из ребер одинаковой длины.

Докажем, что в графе D' все красные ребра имеют максимальную длину d'_k. Рассмотрим в D' прямую λ, образованную красными ребрами длины l. Пусть в D' существует ребро длины $L > l$. Тогда из произвольной вершины $X \in \lambda$ в вершину $X + Ll$ ведет путь из L красных ребер длины l (принадлежащих прямой λ), а также путь из l ребер длины L, что противоречит максимальности длины красных ребер в D. Следовательно, длина любого красного ребра в D' равна d'_k.

Покажем, что $d_k = d'_k$, т. е. длины красных ребер в графах D и D' совпадают. Как замечено выше, число компонент связности дистанционного графа с одной дистанцией d равно d. Следовательно, числа компонент связности в «красных» подграфах графов D и D' равны d_k и d'_k соответственно. Ввиду изоморфности этих подграфов получаем $d_k = d'_k$.

Из равенства максимальных дистанций и доказанных свойств изоморфизма φ следует, что графы $D(d_1, \dots, d_{k-1})$ и $D(d'_1, \dots, d'_{k-1})$ изоморфны. Используя предположение индукции, получаем $d_1 = d'_1, \dots, d_{k-1} = d'_{k-1}$. Теорема 1 доказана.

Поскольку графами Кэли группы $\mathbb{Z}$ являются дистанционные графы, справедливо

Следствие 1. *Группа $\mathbb{Z}$ является CI-группой.*

4. CI-свойство конечно-порожденных свободных абелевых групп

Рассмотрим свободную абелеву группу $G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ с образующими $a_1, a_2, \dots, a_n$. Известно, что каждый элемент $x \in G$ единственным образом представим в виде

$$x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n,$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — целые числа, которые назовем *координатами* элемента x. Будем отождествлять x с координатным вектором $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а группу G — с n-мерным модулем $\mathbb{Z}^n$, который назовем *n-мерной целочисленной решеткой.* Лексикографически упорядочим векторы из $\mathbb{Z}^n$, полагая

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) > (x'_1, x'_2, \dots, x'_n),$$

если существует такое i, что $x_i > x'_i$ и $x_j = x'_j$ при всех $j < i$. Заметим, что если $x \in \mathbb{Z}^n$, то при любом целом $k > 0$ вектор kx нельзя представить в виде суммы не более чем k векторов, не превосходящих x, если хотя бы один из этих векторов строго меньше x.

Графы Кэли группы $\mathbb{Z}^n$ будем называть *ZD-графами*. Очевидно, что ZD-граф $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}^n, S)$, где $S = \{\pm d_1, \pm d_2, \dots, \pm d_m\}$, можно определить как граф, построенный на вершинах n-мерной решетки, ребра которого задаются векторами-дистанциями $d_1(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1), d_2(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2), \dots, d_m(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)$. Не теряя общности, можно считать, что $d_i > d_j$ при $i < j$ и $d_i > -d_i$ при $i = 1, \dots, m$, т. е. первая отличная от нуля координата вектора d_i положительна. Будем считать ребра ZD-графа ориентированными. *Типом* ориентированного ребра (дуги) XY назовем вектор $Y - X$ (равный одному из векторов $\pm d_i$). *Направлением* в ZD-графе будем называть совокупность всех ребер одного типа.

Докажем следующее обобщение теоремы 1 и следствия 1 на случай свободной абелевой группы с n образующими.

Теорема 2. *При любом целом $n \geq 1$ группа $\mathbb{Z}^n$ являются CI-группой.*

Доказательство. Рассмотрим изоморфные ZD-графы $ZD = \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}^n, S)$ и $ZD' = \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}^n, S')$, где $S = \{\pm d_1, \pm d_2, \dots, \pm d_m\}$, $S' = \{\pm d'_1, \pm d'_2, \dots, \pm d'_m\}$ — системы порождающих. Пусть $\varphi : ZD \to ZD'$ — функция изоморфизма.

Цветом ребра XY в графе ZD' назовем тип ребра $\varphi^{-1}(XY)$ в графе ZD.

Лемма 1. *Каждое направление графа ZD под действием изоморфизма φ переходит в некоторое направление графа ZD'. При этом устанавливается взаимно однозначное соответствие между дистанциями из S и S'.*

Доказательство леммы 1. Пусть d_l — лексикографически максимальная дистанция в S, для которой не выполняется утверждение леммы. Заметим, что ребра цвета d_l образуют в графе ZD' ориентированный 2-фактор. Покажем что любые два смежных ребра XY, $YZ \in ZD'$ цвета d_l имеют одинаковый тип в ZD', т. е. лежат на одной прямой.

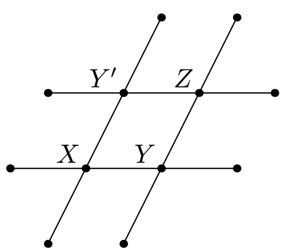

Рис. 3.

Пусть это неверно. Тогда в графе ZD' имеется вершина $Y' = X + Z - Y \neq Y$, смежная с X и Z (рис. 3). При этом $\mathrm{type}(XY') = Y' - X = Z - Y = \mathrm{type}(YZ)$ и $\mathrm{type}(Y'Z) = Z - Y' = Y - X = \mathrm{type}(XY)$. Из максимальности выбора d_l следует, что цвет ребра XY' не превосходит d_l (иначе цвет ребра YZ совпадет с цветом XY', который больше d_l). Аналогично цвет ребра $Y'Z$ не превосходит d_l. Из векторного равенства $\varphi^{-1}(XY) + \varphi^{-1}(YZ) = \varphi^{-1}(XY') + \varphi^{-1}(Y'Z)$ вытекает, что цвет каждого из ребер XY', $Y'Z$ в точности равен d_l, что противоречит условию $Y \neq Y'$. Следовательно, $\mathrm{type}(XY) = \mathrm{type}(YZ)$.

Таким образом, любая прямая L_0 в ZD', содержащая ребро цвета d_l, целиком состоит из ребер цвета d_l. Пусть тип ребра на прямой L_0 равен d'_s. Докажем, что прямая L_1, полученная из L_0 сдвигом на вектор $d'_i \neq d'_s$, также состоит из ребер цвета d_l.

Согласно принципу Дирихле среди параллельных ребер типа d'_i, соединяющих вершины прямой L_0 с вершинами прямой L_1, найдутся два ребра одинакового цвета d_j, соединяющие вершины X и $X + td'_s$ прямой L_0 с вершинами $X + d'_i$ и $X + d'_i + td'_s$ прямой L_1. Положим $X_1 = X + d'_i$, $Y = X + td'_s$, $Y_1 = X + d'_i + td'_s$.

По доказанному на прямой L_1 имеются вершины X_1 и Y_1, соединенные цепью из t ребер $e_1, \dots, e_t$ типа d'_s. Заметим, что цвет каждого ребра e_k не превосходит d_l (ввиду максимальности выбора d_l). Так как цвет каждого из ребер XX_1, YY_1 равен d_j, то

$$\varphi^{-1}(Y_1) - \varphi^{-1}(X_1) = \varphi^{-1}(Y) - \varphi^{-1}(X) = td_l.$$

Отсюда следует, что цвет каждого ребра $e_1, \dots, e_t$ равен d_l, а значит, вся прямая L_1 состоит из ребер цвета d_l.

Поскольку множество S' является системой порождающих группы $\mathbb{Z}^n$, то сдвигами прямой L_0 на векторы из S' можно получить любую прямую, параллельную L_0. Следовательно, любое ребро цвета d_l имеет тип d'_s в ZD', и наоборот. Лемма 1 доказана.

Определим отображение $\vec{\varphi} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$, полагая $\vec{\varphi}(a) = \varphi(Y) - \varphi(X)$, если $a = Y - X$. Поскольку S и S' — системы образующих $\mathbb{Z}^n$, из леммы 1 вытекает, что отображение $\vec{\varphi}$ определено корректно, т. е. не зависит от выбора элементов $X, Y \in \mathbb{Z}^n$. Из определения отображения $\vec{\varphi}$ и взаимной однозначности изоморфизма φ следует, что $\vec{\varphi} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$. Наконец, согласно лемме 1 имеем $\vec{\varphi}(S) = S'$. Теорема 2 доказана.

Автор выражает глубокую благодарность Д. О. Ревину и С. В. Августиновичу за ценные замечания и информацию о близких работах, а также научному руководителю А. Н. Глебову за постановку задачи и помощь в написании статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Li C.-H.* On isomorphisms of finite Cayley graphs — a survey // Discrete Math. 2002. V. 256. P. 301–334.

2. *Muzychuk M.* Ádám's conjecture is true in the square-free case // J. Combin. Theory Ser. A. 1995. V. 72. P. 118–134.

3. *Muzychuk M.* On Ádám's conjecture for circulant graphs // Discrete Math. 1997. V. 167/168. P. 497–510.

4. *Чуешева О. А.* Изоморфизмы графов Кэли бесконечной циклической группы // Мальцевские чтения. Новосибирск, ИМ СО РАН, 16–18 ноября 2004. Доступно на http://math.nsc.ru.conference/malmeet/04/Chuesheva.pdf.

Статья поступила 5 сентября 2005 г.

Рябченко Александр Андреевич
Московский физико-технический институт (гос. университет),
факультет управления и прикладной математики
d-sun-d@ya.ru