Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2007. Том 48, № 6

УДК 517.958

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СЛОИСТОЙ КУСОЧНО ПОСТОЯННОЙ СРЕДЫ ПРИ НЕИЗВЕСТНОЙ ФОРМЕ ИМПУЛЬСНОГО ИСТОЧНИКА

В. Г. Романов

Аннотация. Для гиперболического волнового уравнения, содержащего в себе некоторый параметр λ, рассматривается задача об определении кусочно постоянной скорости распространения волн и ряда параметров, входящих в условия сопряжения. При этом форма импульсного точечного источника, инициирующего процесс колебаний, считается неизвестной. Доказывается, что при определенных предположениях о ее структуре искомые параметры среды однозначно определяются заданием смещений точек границы для двух различных значений λ. Приводится алгоритм решения задачи.

Ключевые слова: волновое уравнение, обратная задача, алгоритм решения.

§ 1. Введение, основные результаты

Пусть $y_0, y_1, y_2, \dots, y_k, \dots$, $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_k < \dots$, — упорядоченная конечная или бесконечная последовательность точек полуоси $\{y \ge 0\}$, делящая ее на конечное или бесконечное число сегментов (y_{k-1}, y_k), а $\{c_k, k = 1, 2, \dots\}$, $\{a_k, k = 1, 2, \dots\}$ — две последовательности положительных чисел. Предположим, что $(c_k, a_k) \ne (c_{k+1}, a_{k+1})$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Будем считать также, что в случае бесконечной последовательности $\{y_k\}$ ее единственная предельная точка находится на бесконечности. Рассмотрим в области $G = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$, процесс распространения волн, описываемый дифференциальным уравнением

$$u_{tt} - c_k^2 u_{yy} + \lambda^2 c_k^2 u = 0, \quad (y, t) \in (y_{k-1}, y_k) \times \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1.1}$$

начальными и граничными условиями

$$u|_{t<0} \equiv 0, \quad u_y|_{y=0} = 0, \tag{1.2}$$

условиями сопряжения

$$u|_{y=y_k+0} = u|_{y=y_k-0}, \quad a_{k+1} u_y|_{y=y_k+0} = a_k u_y|_{y=y_k-0}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1.3}$$

и условием возбуждения волн точечным импульсным источником, сосредоточенным в некоторой точке $y^* \in (y_0, y_1)$:

$$u|_{y=y^*+0} = u|_{y=y^*-0}, \quad u_y|_{y=y^*+0} - u_y|_{y=y^*-0} = f(t) \quad (f(t) \equiv 0,\ t < 0). \tag{1.4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00171) и Сибирского отделения РАН (проект 2006 № 26).

Здесь $u = u(\lambda, y, t)$, а λ — некоторый параметр задачи. Такой параметр возникает обычно в задачах распространения волн в слоистых средах после применения к волновому уравнению преобразования Фурье по всем пространственным переменным, отличным от переменной y.

При заданных c_k, a_k и $f(t)$ задача (1.1)–(1.4) корректна и определяет функцию $u(\lambda, y, t)$, обладающую компактным носителем при любом конечном t. В приложениях представляет интерес задача об определении структуры среды (в данном случае постоянных $y_k, c_k, a_k,\ k = 1, 2, \dots$) по измеренным на границе области смещениям точек среды

$$u|_{y=0} = F(\lambda, t), \quad t \in (0, T), \tag{1.5}$$

для некоторого конечного интервала времени и для различных значений параметра λ. Фактически речь идет о построении двух кусочно постоянных функций $c = c(y)$ и $a = a(y)$, совпадающих с числами c_k и a_k соответственно на промежутках (y_{k-1}, y_k) их постоянства. В силу конечной скорости распространения волн, располагая информацией вида (1.5), можно ставить вопрос об определении этих функций только на некотором конечном интервале, длина которого зависит от величины T и монотонно растет с ростом T. Для случая, когда скорость распространения волн $c = c(y)$ является непрерывной функцией переменной y (тогда потребность в уравнениях сопряжения не возникает), подобная задача рассматривалась при известной функции $f(t)$ в ряде работ (см., например, [1–6]), для случая, аналогичного (1.1)–(1.5), но с более сложными уравнениями, описывающими распространение волн в упругой слоистой пластине, — в работе [7]. В этих работах установлен ряд теорем единственности и устойчивости решения соответствующих обратных задач.

Здесь рассматривается задача об определении $y_k, c_k, a_k,\ k = 1, 2, \dots,$ по информации (1.5) при неизвестной функции $f(t)$. Конечно, при этом необходимо сделать некоторые предположения о структуре неизвестной функции $f(t)$ (см. об этом ниже). Заметим, что в случае непрерывно-неоднородной слоистой среды подобная постановка задачи впервые появилась в монографии М. Л. Гервера [8]. Однако в рассматриваемом им дифференциальном уравнении колебаний струны параметр λ отсутствовал (такое уравнение соответствует случаю нормального падения на границу полупространства акустической или упругой волны, в то время как уравнение (1.1) описывает более общий случай наклонного падения) и это обстоятельство не позволило получить приемлемой для приложений теоремы единственности и алгоритма решения обратной задачи. Некоторые результаты, связанные с устойчивостью решения обратной задачи и методом ее решения в постановке с параметром λ, получены в работе автора [9]. В настоящей работе для задачи (1.1)–(1.5) установлена теорема единственности и построен алгоритм эффективного решения задачи. При этом, как и в работе [9], использована информация (1.5) для двух различных значений параметра λ.

Выполним некоторые преобразования исходной задачи с целью придания ей более удобной формы для проведения выкладок. Прежде всего введем новую переменную z и последовательность точек $z_k,\ k = 1, 2, \dots,$ определив их формулой

$$z = \begin{cases} \frac{y}{c_1}, & y \in (y_0, y_1),\ z_1 = \frac{y_1}{c_1}, \\ z_k + \frac{y - y_k}{c_{k+1}}, & y \in (y_k, y_{k+1}),\ z_{k+1} = z_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{c_{k+1}},\ k = 1, 2, \dots. \end{cases} \tag{1.6}$$

Дополнительно обозначим $z_0 = 0,\ z^* = y^*/c_1$. Очевидно, что $z^* \in (z_0, z_1)$. Физический смысл новой переменной — время пробега сигнала вдоль прямой от точки y_0 до точки y. Пусть $y = y(z)$ — функция, обратная к определяемой формулой (1.6). Введем новую функцию $v(\lambda, z, t) = u(\lambda, y(z), t)$. Эта функция является решением задачи

$$v_{tt} - v_{zz} + \lambda^2 c_k^2 v = 0, \quad (z,t) \in (z_{k-1}, z_k) \times \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1.7}$$

$$v|_{t<0} \equiv 0, \quad v_z|_{z=0} = 0, \tag{1.8}$$

$$v|_{z=z_k+0} = v|_{z=z_k-0}, \quad v_z|_{z=z_k+0} = d_{k,k+1} v_z|_{z=z_k-0}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1.9}$$

$$v|_{z=z^*+0} = v|_{z=z^*-0}, \quad v_z|_{z=z^*+0} - v_z|_{z=z^*-0} = g(t), \quad g(t) = c_1 f(t), \tag{1.10}$$

в которой коэффициент $d_{k,k+1} = c_{k+1} a_k / (c_k a_{k+1})$ характеризует величину скачка нормальной производной функции v на границе $z = z_k$, отделяющей k-й слой, $z_{k-1} < z < z_k$, от $(k+1)$-го. Заметим, что коэффициент $d_{k,k+1}$ может быть равен 1 даже при принятом выше условии $(c_k, a_k) \neq (c_{k+1}, a_{k+1})$. В этом случае необходимо $c_k \neq c_{k+1}$. Действительно, если принять противное, а именно, что $c_k = c_{k+1}$, то из условия $d_{k,k+1} = 1$ следует, что $a_k = a_{k+1}$, значит, $(c_k, a_k) = (c_{k+1}, a_{k+1})$. Это противоречит исходному предположению. Таким образом, допустима ситуация, в которой функция v непрерывна при переходе через границу $z = z_k$ вместе с нормальной производной, но на этой границе скорость распространения волн терпит конечный скачок. Как видно из уравнения (1.7), при этом вторая производная v_{zz} имеет конечный скачок, поэтому $z = z_k$ является границей слабого разрыва функции v.

Информация о решении задачи (1.7)–(1.10), используемая при решении обратной задачи, записывается в виде

$$v|_{z=0} = F(\lambda, t), \quad t \in (0, T). \tag{1.11}$$

Ниже, при изучении обратной задачи, предполагается, что функция $g(t)$ имеет структуру

$$g(t) = b\delta(t) + \hat{g}(t)\theta_0(t), \tag{1.12}$$

где $b \neq 0$, $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда: $\theta_0(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\theta_0(t) = 0$ при $t < 0$, а $\hat{g}(t) \in \mathbf{C}^1[0, T - z^*)$, $T > 0$.

Теорема 1.1. *Пусть справедливо представление* (1.12), *в котором* $b \neq 0$ *и* $\hat{g}(t) \in \mathbf{C}^1[0, T - z^*)$. *Пусть число* $T > 0$ *выбрано так, что* $F(\lambda, t) \not\equiv 0$ *для* $t \in (0, T)$. *Тогда задание функции* $F(\lambda, t)$ *на множестве* $t \in (0, T)$ *для двух значений* λ_1 *и* λ_2 *таких, что* $\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2$, *однозначно определяет* b, z^* *и набор чисел* z_k, c_k, c_{k+1}, $d_{k,k+1}$, *отвечающих тем значениям* k, *для которых* $z_k < (T + z^*)/2$. *Кроме того, однозначно определяется и функция* $\hat{g}(t)$ *для всех* $t \in [0, T - z^*)$.

Эта теорема доказана в § 3 и определяет конструктивный алгоритм отыскания всех параметров среды. Основой алгоритма является построение специальной функции $v^*(\lambda, z, t)$, которая содержит в себе все разрывы функции v, являющейся решением задачи (1.7)–(1.10), а также разрывы ее первой и второй производных по переменной t. Эта функция представляет собой совокупность бегущих волн, инициированных точечным источником, находящимся в $(z^*, 0)$, и многократно отраженных от границ $z = z_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Она определяется формулой

$$v^*(\lambda, z, t) = \theta_0(t) \sum_{s \geq 1} [\alpha_i(z)\theta_0(t + \chi_i z - \tau_i) + \beta_i(\lambda, z)\theta_1(t + \chi_i z - \tau_i) + \gamma_i(\lambda, z)\theta_2(t + \chi_i z - \tau_i)], \tag{1.13}$$

в которой $i = (i_1, i_2, \dots, i_s)$ — мультииндекс, описывающий «историю» бегущей волны и составленный из номеров границ, на которых эта волна отражалась или преломлялась, параметр χ_i характеризует направление ее распространения и принимает значения $+1$ или -1 в зависимости от значений мультииндекса, τ_i — некоторое число, определяемое рекуррентной формулой, $\theta_k(t) = t^k \theta_0(t)/k!$, $k = 1, 2$. Система обозначений, связанная с функцией $v^*(\lambda, z, t)$, и способ ее построения подробно описаны в § 2. При этом функция v^* строится так, что разность $v - v^* = w$ является гладкой функцией. А именно, справедлива

Теорема 1.2. *Пусть имеет место представление* (1.12), *в котором* $b \neq 0$ *и* $\hat{g}(t) \in \mathbf{C}^1[0, T - z^*)$. *Тогда функция* $w(\lambda, z, t) = v(\lambda, z, t) - v^*(\lambda, z, t)$ *непрерывна в области* $D(T) = \{(z, t) \mid z \geq 0, 0 \leq t < T - z\}$ *вместе с производными* w_t, w_{tt} *и* $w(\lambda, z, t) \equiv 0$ *для* $t \leq |z - z^*|$.

Эта теорема доказана в § 4. Из нее следует, что функция $F(\lambda, t)$ является следом при $z = 0$ суммы двух функций v^* и w, причем след второй из них представляет собой дважды непрерывно дифференцируемую по t функцию, в то время как след первой является лишь кусочно гладкой квадратичной функцией, содержащей конечные разрывы как самой функции, так и ее первой и второй производных. Эти разрывы, с одной стороны, совпадают с соответствующими разрывами функции $F(\lambda, t)$ и, следовательно, известны. С другой стороны, разрывы функции $v^*(\lambda, 0, t)$ выражаются через параметры среды. Сопоставление этих двух фактов и позволяет определить искомые параметры, прослеживая величину разрывов функций $F(\lambda_1, t)$, $F(\lambda_2, t)$ и их первых двух производных.

Замечание 1. Теорема 1.1 утверждает, что по заданной информации (1.5) можно найти некоторое конечное число параметров $z_1, \dots, z_n$, $c_1, \dots, c_{n+1}$, $d_{1,2}$, $\dots, d_{n,n+1}$, характеризующих слоистую среду. Естественно, что при этом легко находятся исходные границы слоев $y_1, \dots, y_n$ и скорости внутри них. Однако величины $a_1, \dots, a_n$ при этом однозначно не восстанавливаются. Это было ясно и с самого начала, так как условия сопряжения однозначно задаются только отношениями a_k/a_{k+1}, $k = 1, \dots, n$. Все эти отношения, очевидно, определяются заданием чисел $c_1, \dots, c_{n+1}$ и $d_{1,2}, \dots, d_{n,n+1}$.

Замечание 2. Предположение о структуре источника, сделанное выше, можно заменить более общим. А именно, можно предположить, что равенство (1.12) верно, если в нем левую часть заменить производной функции $g(t)$ некоторого целого порядка $k \geq 0$. В этом случае дифференцирование по переменной t порядка k всех соотношений (1.7)–(1.11) сводит задачу к рассматриваемой.

§ 2. Построение функции v^*

В предположениях теоремы 1.1 для функции $\hat{g}(t)$ имеет место представление $\hat{g}(t) = g_0 + g_1 t + o(t)$, в котором $g_0 = \hat{g}(0)$, $g_1 = \hat{g}'(0)$. В связи с этим рассмотрим вопрос о построении разрывной компоненты v^* решения задачи (1.7)–(1.10), учитывающей также разрывы ее первой и второй производных по переменной t, положив в равенстве (1.10)

$$g(t) = b\delta(t) + g_0\theta_0(t) + g_1\theta_1(t) + \bar{g}(t)\theta_1(t). \tag{2.1}$$

Здесь $\bar{g}(t) = o(t)$ при $t \to 0$. Способ построения подобной функции хорошо известен (см., например, [10]). Искомая функция состоит из совокупности бегущих волн, распространяющихся вдоль характеристик дифференциального уравнения и вызванных особенностями источника (такими, как $\delta(t)$, $\theta_0(t)$, $\theta_1(t)$), локализованными в точке $(z^*, 0)$. Эти волны, распространяясь на плоскости переменных z, t, встречают на своем пути границы $z = z_k$ разрыва параметров среды, которые приводят к появлению отраженных и преломленных бегущих волн, расчет которых согласуется с граничным условием и условиями сопряжения. Возникает сложная картина многократно отраженных и преломленных на границах волн. Чтобы ее описать, необходимо ввести подходящую систему обозначений.

Рассмотрим функцию v^*, определенную выше формулой (1.13). Поясним подробно, что означают отдельные слагаемые этой формулы и введенные символы. Начнем с мультииндекса $i = (i_1, i_2, \dots, i_s)$. Его компоненты состоят по определению из номеров границ, т. е. целых неотрицательных чисел. При $s = 1$ этот мультииндекс превращается в обычный индекс и принимает только два значения 0 или 1. С индексом $i = 0$ связывается волна, распространяющаяся от источника влево навстречу границе $z = z_0 = 0$, с индексом $i = 1$ — волна, бегущая от источника вправо к границе $z = z_1$. При $s = 2$ мультииндекс i равен (i_1, i_2), причем i_1 может принимать только значения 0 или 1, а индекс i_2 не может совпадать с i_1 и должен быть больше или меньше величины i_1 на единицу (если это допустимо, т. е. не приводит к появлению отрицательного значения). Таким образом, при $s = 2$ возможны три значения мультииндекса: $i = (0, 1)$, $i = (1, 0)$, $i = (1, 2)$. Первый из них связывается с волной, отраженной от границы $z = z_0$ и бегущей в сторону границы $z = z_1$, второй — с волной, отраженной от границы $z = z_1$ и бегущей в сторону границы $z = z_0$, третий — с волной, преломленной на границе $z = z_1$ и бегущей в сторону границы $z = z_2$. Дальнейшее определение проводится рекуррентным образом: мультииндекс $i = (i_1, i_2, \dots, i_s)$ состоит из мультииндекса $i' = (i_1, i_2, \dots, i_{s-1})$ и неотрицательного числа i_s, которое отличается от индекса i_{s-1} на единицу. Этот мультииндекс ассоциируется с волной, которая распространяется сначала от источника в направлении границы $z = z_{i_1}$, затем, после преломления или отражения на этой границе, в сторону границы $z = z_{i_2}$, и т. д. По смыслу эта волна определена лишь для $z \in [z_{k-1}, z_k]$, где $k = \max(i_{s-1}, i_s)$. Таким образом, $\alpha_i^j = \beta_i^j = \gamma_i^j \equiv 0$ вне отрезка $z \in [z_{k-1}, z_k]$.

Перейдем теперь к пояснению символов χ_i и τ_i. Если $i = 0$, то $\chi_i = 1$ и $\tau_i = z^*$, если $i = 1$, то положим $\chi_i = -1$ и $\tau_i = -z^*$. Тогда характеристики дифференциального уравнения $t + \chi_i z - \tau_i = 0$, соответствующие этим значениям символов χ_i и τ_i, проходят через точку $(z^*, 0)$ и отвечают волнам, распространяющимся от источника влево или вправо. Далее, для двукомпонентных мультииндексов полагаем

$$\chi_i = \begin{cases} -1, & i = (0,1), \\ +1, & i = (1,0), \\ -1, & i = (1,2), \end{cases} \qquad \tau_i = \begin{cases} z^*, & i = (0,1), \\ 2z_1 - z^*, & i = (1,0), \\ -z^*, & i = (1,2). \end{cases}$$

Для случая, когда компонент более двух, положим

$$\chi_i = \begin{cases} -1, & i_s = i_{s-1} + 1, \\ +1, & i_s = i_{s-1} - 1, \end{cases} \quad \tau_i = \begin{cases} \tau_{i_1,\dots,i_{s-1}}, & i_s = i_{s-1} + 1 = i_{s-2} + 2, \\ \tau_{i_1,\dots,i_{s-1}}, & i_s = i_{s-1} - 1 = i_{s-2} - 2, \\ \tau_{i_1,\dots,i_{s-1}} - 2z_{i_{s-1}}, & i_s = i_{s-1} + 1 = i_{s-2}, \\ \tau_{i_1,\dots,i_{s-1}} + 2z_{i_{s-1}}, & i_s = i_{s-1} - 1 = i_{s-2}. \end{cases}$$

При таком определении символов χ_i и τ_i, обеспечивается непрерывность ломаной линии, выходящей из источника и составленной из отрезков характеристик положительного или отрицательного наклонов. Каждый отрезок характеристики $t+\chi_i z-\tau_i=0$, заключенный в полосе $z\in(z_{k-1},z_k)$, где $k=\max(i_{s-1},i_s)$, является носителем разрыва решения задачи (1.7)–(1.10). Выражение $\alpha_i(z)\theta_0(t+\chi_i z-\tau_i)$ описывает конечный скачок решения при переходе через соответствующую характеристику, в то время как выражения $\beta_i(\lambda,z)\theta_1(t+\chi_i z-\tau_i)$ и $\gamma_i(\lambda,z)\theta_2(t+\chi_i z-\tau_i)$ описывают соответственно конечные скачки первой и второй производных решения по переменной t. Для того чтобы получить формулы для вычисления коэффициентов $\alpha_i(z)$, $\beta_i(\lambda,z)$, $\gamma_i(\lambda,z)$, нужно подставить в уравнение (1.7) $v=v^*+w$ и приравнять к нулю коэффициенты при особенностях $\delta(t+\chi_i z-\tau_i)$, $\theta_0(t+\chi_i z-\tau_i)$, $\theta_1(t+\chi_i z-\tau_i)$. В результате этого возникают дифференциальные уравнения для $\alpha_i(z)$, $\beta_i(\lambda,z)$, $\gamma_i(\lambda,z)$ и функции $w(\lambda,z,t)$. Они имеют вид

$$\alpha_i'=0,\quad -2\beta_i'\chi_i-\alpha_i''+\lambda^2c_k^2\alpha_i=0,\quad -2\gamma_i'\chi_i-\beta_i''+\lambda^2c_k^2\beta_i=0, \tag{2.2}$$

$$w_{tt}-w_{zz}+\lambda^2c_k^2w=\varphi_k,\quad (z,t)\in(z_{k-1},z_k)\times\mathbb{R},\quad k=1,2,\dots. \tag{2.3}$$

В этих равенствах символ $'$ соответствует дифференцированию по переменной z, число k согласовано с мультииндексом $i=(i_1,\dots,i_s)$ следующим образом: $k=\max(i_{s-1},i_s)$, если $s>1$, и $k=1$, если $s=1$. Функция φ_k вычисляется по формуле

$$\varphi_k(\lambda,z,t)=\sum_{s\ge1}\big[\gamma_i''-\lambda^2c_k^2\gamma_i\big]\theta_2(t+\chi_i z-\tau_i)\quad (z,t)\in(z_{k-1},z_k)\times\mathbb{R},\quad k=1,2,\dots, \tag{2.4}$$

в которой суммирование распространяется только на те мультииндексы, для которых либо $(i_{s-1},i_s)=(k-1,k)$, либо $(i_{s-1},i_s)=(k,k-1)$. Заметим, что в области $D(T)$, в которой и будет в дальнейшем рассматриваться уравнение (2.3), функция φ_k состоит лишь из конечного числа слагаемых, отличных от нуля, так как $\theta_2(t+\chi_i z-\tau_i)=0$, если $t+\chi_i z-\tau_i<0$. Отсюда следует, что при $\chi_i=1$ нужно учитывать в сумме, определяющей φ_k, лишь такие слагаемые, для которых $\tau_i<T$, а при $\chi_i=-1$ суммированию подлежат только те слагаемые, для которых $\tau_i+2z_{k-1}<T$. Уравнения (2.2) легко интегрируются. Если $i=0$ или $i=1$, то соответствующие решения имеют вид

$$\begin{gathered}\alpha_i(z)=\alpha_i(z^*),\quad \beta_i(\lambda,z)=\beta_i(z^*)+\frac{\chi_i\alpha_i}{2}\lambda^2c_1^2(z-z^*),\\ \gamma_i(z,\lambda)=\gamma_i(\lambda,z^*)+\frac{\chi_i}{2}\lambda^2c_1^2\beta_i(z^*)(z-z^*)+\frac{\alpha_i}{8}\lambda^4c_1^4(z-z^*)^2.\end{gathered} \tag{2.5}$$

В общем случае $i=(i_1,\dots,i_s)$, $s\ge2$, решения уравнений (2.2) вычисляются по формулам

$$\begin{gathered}\alpha_i(z)=\alpha_i(z_{i_{s-1}}),\quad \beta_i(\lambda,z)=\beta_i(\lambda,z_{i_{s-1}})+\frac{\chi_i\alpha_i}{2}\lambda^2c_k^2(z-z_{i_{s-1}}),\\ \gamma_i(z,\lambda)=\gamma_i(\lambda,z_{i_{s-1}})+\frac{\chi_i}{2}\lambda^2c_k^2\beta_i(\lambda,z_{i_{s-1}})(z-z_{i_{s-1}})+\frac{\alpha_i}{8}\lambda^4c_k^4(z-z_{i_{s-1}})^2,\end{gathered} \tag{2.6}$$

в которых $k=\max(i_{s-1},i_s)$. Входящие в эти формулы постоянные (при фиксированном λ) находятся из условий (1.8)–(1.10). Подставляя в равенство (1.10) вместо v выражение v^*+w и приравнивая коэффициенты при одинаковых особенностях, находим соотношения для отыскания постоянных α_i, $\beta_i(z^*)$, $\gamma_i(\lambda,z^*)$ и условия сопряжения для функции w в точке $z=z^*$. Они имеют вид

$$\alpha_1-\alpha_0=0,\quad \alpha_1+\alpha_0=-b,$$

$$\beta_1(z^*) - \beta_0(z^*) = 0, \quad \beta_1(z^*) + \beta_0(z^*) = -g_0,$$

$$\gamma_1(\lambda, z^*) - \gamma_0(\lambda, z^*) = 0, \quad \gamma_1(\lambda, z^*) + \gamma_0(\lambda, z^*) + \frac{1}{2}\lambda^2 c_1^2\bigl(\alpha_1 + \alpha_0\bigr) = -g_1, \tag{2.7}$$

$$w|_{z=z^*+0} = w|_{z=z^*-0}, \quad w_z|_{z=z^*+0} - w_z|_{z=z^*-0} = h(\lambda, t). \tag{2.8}$$

Здесь функция $h(\lambda, t)$ задается формулой

$$h(\lambda, t) = \bar{g}(t)\theta_1(t) + \frac{1}{2}\lambda^2 c_1^2(\beta_0(z^*) + \beta_1(z^*))\theta_2(t). \tag{2.9}$$

Из равенств (2.7) находим, что

$$\alpha_1 = \alpha_0 = -\frac{b}{2}, \quad \beta_1(z^*) = \beta_0(z^*) = -\frac{g_0}{2}, \quad \gamma_1(\lambda, z^*) = \gamma_0(\lambda, z^*) = -\frac{g_1}{2} + \frac{b}{4}\lambda^2 c_1^2. \tag{2.10}$$

Аналогично, подставляя в равенство (1.8) вместо v выражение $v^* + w$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых особенностях, находим рекуррентные соотношения для отыскания постоянных α_i, $\beta_i(\lambda, z_0)$, $\gamma_i(\lambda, z_0)$ для тех значений мультииндексов $i = (i_1, \ldots, i_s)$, у которых последние два индекса определены равенствами $i_{s-1} = 0$, $i_s = 1$,

$$\begin{gathered} \alpha_{i_1,\ldots,i_s} = \alpha_{i_1,\ldots,i_{s-1}}, \quad \beta_{i_1,\ldots,i_s}(\lambda, z_0) = \beta_{i_1,\ldots,i_{s-1}}(\lambda, z_0), \\ \gamma_{i_1,\ldots,i_s}(\lambda, z_0) = \gamma_{i_1,\ldots,i_{s-1}}(\lambda, z_0). \end{gathered} \tag{2.11}$$

Кроме того, находятся начальные условия для функции w и ее граничные условия при $z = 0$. Они имеют вид

$$w|_{t<0} \equiv 0, \quad w_z|_{z=0} = 0. \tag{2.12}$$

Действуя аналогично, из равенства (1.9) находим рекуррентные соотношения для отыскания постоянных α_i, $\beta_i(\lambda, z_{i_{s-1}})$, $\gamma_i(\lambda, z_{i_{s-1}})$ для всех мультииндексов $i = (i_1, \ldots, i_s)$. Рассмотрим вначале случай, являющийся особым по отношению к общему случаю, приведенному ниже. Он соответствует мультииндексам, состоящим только из двух компонент. Этот случай связан с исходящей из источника $(z^*, 0)$, преломленной и отраженной на границе $z = z_1$ волнами. При этом падающая волна отвечает значению $i = 1$, отраженная — мультииндексу $i = (1, 0)$, а преломленная — мультииндексу $i = (1, 2)$. Соответствующие соотношения имеют вид

$$\begin{gathered} \alpha_{1,2} = \alpha_1 + \alpha_{1,0}, \quad \beta_{1,2}(\lambda, z_1) = \beta_1(\lambda, z_1) + \beta_{1,0}(\lambda, z_1), \\ \gamma_{1,2}(\lambda, z_1) = \gamma_1(\lambda, z_1) + \gamma_{1,0}(\lambda, z_1), \quad -\alpha_{1,2} = d_{1,2}(-\alpha_1 + \alpha_{1,0}), \\ -\beta_{1,2}(\lambda, z_1) = d_{1,2}(-\beta_1(\lambda, z_1) + \beta_{1,0}(\lambda, z_1)), \\ -\gamma_{1,2}(\lambda, z_1) - \frac{1}{2}\lambda^2 c_2^2 \alpha_{1,2} = d_{1,2}\Bigl[-\gamma_1(\lambda, z_1) + \gamma_{1,0}(\lambda, z_1) - \frac{1}{2}\lambda^2 c_1^2(\alpha_1 - \alpha_{1,0})\Bigr]. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Отсюда находим, что

$$\begin{gathered} \alpha_{1,0} = \eta_{1,2}\alpha_1, \quad \beta_{1,0}(\lambda, z_1) = \eta_{1,2}\beta_1(\lambda, z_1), \\ \gamma_{1,0}(\lambda, z_1) = \eta_{1,2}\gamma_1(\lambda, z_1) + \frac{\lambda^2}{4}\bigl(1 - \eta_{1,2}^2\bigr)\bigl(c_1^2 - c_2^2\bigr)\alpha_1, \\ \alpha_{1,2} = (1 + \eta_{1,2})\alpha_1, \quad \beta_{1,2}(\lambda, z_1) = (1 + \eta_{1,2})\beta_1(\lambda, z_1), \\ \gamma_{1,2}(\lambda, z_1) = (1 + \eta_{1,2})\gamma_1(\lambda, z_1) + \frac{\lambda^2}{4}\bigl(1 - \eta_{1,2}^2\bigr)\bigl(c_1^2 - c_2^2\bigr)\alpha_1. \end{gathered} \tag{2.14}$$

В этих формулах
$$\eta_{1,2} = \frac{d_{1,2}-1}{d_{1,2}+1}.$$
Число $\eta_{1,2}$ называется *коэффициентом отражения волны от границы* $z = z_1$, а число $1+\eta_{1,2}$ — *коэффициентом прохождения волны через границу* . Очевидно, что $\eta_{1,2} \in (-1,1)$.

В общем случае волна на границу $z = z_k$ может падать либо слева, как в только что рассмотренном случае, либо справа из слоя (z_k, z_{k+1}). Если два предпоследних значения мультииндекса $i = (i_1 \dots, i_s)$ равны $i_{s-2} = k-1$, $i_{s-1} = k$, а последний — $i_s = k-1$, то этот мультииндекс описывает волну, отраженную от границы $z = z_k$ внутрь слоя (z_{k-1}, z_k), если же $i_s = k+1$, то — волну, прошедшую в слой (z_k, z_{k+1}). При этом формулы для вычисления α_i, $\beta_i(\lambda, z_{i_{s-1}})$, $\gamma_i(\lambda, z_{i_{s-1}})$ вполне аналогичны формулам (2.14) и имеют вид

$$\alpha_{i_1,\dots,i_s} = \eta_{k,k+1}\alpha_{i_1,\dots,i_{s-1}}, \quad \beta_{i_1,\dots,i_s}(\lambda, z_{i_{s-1}}) = \eta_{k,k+1}\beta_{i_1,\dots,i_{s-1}}(\lambda, z_{i_{s-1}}),$$

$$\begin{aligned}\gamma_{i_1,\dots,i_s}(\lambda, z_{i_{s-1}}) &= \eta_{k,k+1}\gamma_{i_1,\dots,i_{s-1}}(\lambda, z_{i_{s-1}})\\ &+ \frac{\lambda^2}{4}\big(1-\eta^2_{k,k+1}\big)\big(c_k^2 - c_{k+1}^2\big)\alpha_{i_1,\dots,i_{s-1}}, \text{ если } i_{s-2} = k-1,\ i_{s-1} = k,\ i_s = k-1,\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\alpha_{i_1,\dots,i_s} = (1+\eta_{k,k+1})\alpha_{i_1,\dots,i_{s-1}}, \quad \beta_{i_1,\dots,i_s}(\lambda, z_{i_{s-1}}) = (1+\eta_{k,k+1})\beta_{i_1,\dots,i_{s-1}}(\lambda, z_{i_{s-1}}),$$

$$\begin{aligned}\gamma_{i_1,\dots,i_s}(\lambda, z_{i_{s-1}}) &= (1+\eta_{k,k+1})\gamma_{i_1,\dots,i_{s-1}}(\lambda, z_{i_{s-1}})\\ &+ \frac{\lambda^2}{4}\big(1-\eta^2_{k,k+1}\big)\big(c_k^2 - c_{k+1}^2\big)\alpha_{i_1,\dots,i_{s-1}}, \text{ если } i_{s-2} = k-1,\ i_{s-1} = k,\ i_s = k+1.\end{aligned} \tag{2.16}$$

В этих формулах
$$\eta_{k,k+1} = \frac{d_{k,k+1}-1}{d_{k,k+1}+1}$$
— коэффициент отражения волны от границы $z = z_k$ в слой (z_{k-1}, z_k).

Если два предпоследних значения мультииндекса $i = (i_1 \dots, i_s)$ равны $i_{s-2} = k+1$, $i_{s-1} = k$, то мультииндекс описывает волну, отраженную от границы $z = z_k$, если $i_s = k+1$, и волну, прошедшую внутрь слоя (z_{k-1}, z_k), если $i_s = k-1$. Чтобы воспользоваться уже готовыми формулами, достаточно переписать условия сопряжения, поменяв ролями слои k и $k+1$, а именно

$$v|_{z=z_k-0} = v|_{z=z_k+0}, \quad v_z|_{z=z_k-0} = d_{k+1,k}v_z|_{z=z_k+0}, \quad k = 1,2,\dots. \tag{2.17}$$

Здесь $d_{k+1,k} = 1/d_{k,k+1}$. При этом формулы для вычисления α_i, $\beta_i(\lambda, z_{i_{s-1}})$, $\gamma_i(\lambda, z_{i_{s-1}})$ принимают вид

$$\alpha_{i_1,\dots,i_s} = \eta_{k+1,k}\alpha_{i_1,\dots,i_{s-1}}, \quad \beta_{i_1,\dots,i_s}(\lambda, z_{i_{s-1}}) = \eta_{k+1,k}\beta_{i_1,\dots,i_{s-1}}(\lambda, z_{i_{s-1}}),$$

$$\begin{aligned}\gamma_{i_1,\dots,i_s}(\lambda, z_{i_{s-1}}) &= \eta_{k+1,k}\gamma_{i_1,\dots,i_{s-1}}(\lambda, z_{i_{s-1}})\\ &+ \frac{\lambda^2}{4}\big(1-\eta^2_{k+1,k}\big)\big(c_{k+1}^2 - c_k^2\big)\alpha_{i_1,\dots,i_{s-1}}, \text{ если } i_{s-2} = k+1,\ i_{s-1} = k,\ i_s = k+1,\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\alpha_{i_1,\dots,i_s} = (1+\eta_{k+1,k})\alpha_{i_1,\dots,i_{s-1}}, \quad \beta_{i_1,\dots,i_s}(\lambda, z_{i_{s-1}}) = (1+\eta_{k+1,k})\beta_{i_1,\dots,i_{s-1}}(\lambda, z_{i_{s-1}}),$$

$$\gamma_{i_1,\dots,i_s}(\lambda, z_{i_{s-1}}) = (1+\eta_{k+1,k})\gamma_{i_1,\dots,i_{s-1}}(\lambda, z_{i_{s-1}})$$
$$+\ \frac{\lambda^2}{4}\big(1-\eta^2_{k+1,k}\big)\big(c^2_{k+1}-c^2_k\big)\alpha_{i_1,\dots,i_{s-1}},\ \text{если } i_{s-2}=k+1,\ i_{s-1}=k,\ i_s=k-1. \tag{2.19}$$

В этих формулах числа $\eta_{k+1,k}$ определены равенствами

$$\eta_{k+1,k} = \frac{d_{k+1,k}-1}{d_{k+1,k}+1} = -\eta_{k,k+1}.$$

Равенства (1.9) определяют условия сопряжения функции w при $z = z_k$. Они имеют вид

$$w|_{z=z_k+0} = w|_{z=z_k-0}, \quad w_z|_{z=z_k+0} = d_{k,k+1}w_z|_{z=z_k-0} + h_k(\lambda,t), \quad k=1,2,\dots. \tag{2.20}$$

Здесь функция $h_k(\lambda,t)$ вычисляется по формуле

$$h_k(\lambda,t) = \frac{\lambda^2}{2}\sum_{s\ge1}\big(c_k^2-c_{k+1}^2\big)(1-\chi_i\eta_{k,k+1})(1-d_{k,k+1})\chi_i\beta_i(\lambda,z_k)\theta_2(t+\chi_i z_k-\tau_i), \tag{2.21}$$

в которой $k = i_s$.

Таким образом, выше описаны все формулы, необходимые для вычисления слагаемых, образующих функцию $v^*(\lambda,z,t)$. Суммируя по мультииндексам все бегущие волны, носитель которых имеет непустое пересечение с областью $D(T) = \{(z,t) \mid z \ge 0, 0 \le t < T - z\}$, построим функцию v^*, которая аккумулирует в себе все разрывы решения задачи (1.7)–(1.10), содержащиеся в области $D(T)$.

§ 3. Доказательство теоремы 1.1 и алгоритм вычисления параметров среды

Рассмотрим след функции $v^*(\lambda,z,t)$ при $z = 0$. Обозначим $v^*(\lambda,0,t) = F^*(\lambda,t)$. Из построения функции $v^*(\lambda,z,t)$ следует, что $F^*(\lambda,t)$ является кусочно-квадратичной функцией переменной t и определяется равенством

$$F^*(\lambda,t) = \theta_0(t)\sum_{s\ge1}[\alpha_i\theta_0(t-\tau_i)+\beta_i(\lambda,0)\theta_1(t-\tau_i)+\gamma_i(\lambda,0)\theta_2(t-\tau_i)], \tag{3.1}$$

в котором суммирование распространяется на все мультииндексы $i=(i_1,\dots,i_s)$, для которых или $i_s = 0$, или $(i_{s-1},i_s)=(0,1)$. В силу теоремы 1.2 $F(\lambda,t) - F^*(\lambda,t) = v(\lambda,0,t) - v^*(\lambda,0,t) = w(\lambda,0,t) \in \mathbf{C}^2(0,T)$. Поэтому функции $F(\lambda,t)$ и $F^*(\lambda,t)$ имеют разрывы в одних и тех же точках отрезка $(0,T)$ и величины этих разрывов, а также их первых и вторых производных совпадают. Так как функция $F(\lambda,t)$ известна, то известны точки, в которых функция $F^*(\lambda,t)$ и ее первые две производные разрывны, и величины этих разрывов. Из формулы (3.1) следует, что $F^*(\lambda,t)=0$ для $t<z^*$. Поэтому если $F^*(\lambda,t)\not\equiv0$, $t\in(0,T)$, то $z^*\in(0,T)$. Формулы (3.1), (2.5), (2.6), (2.10), (2.11) приводят к равенствам

$$F^*(\lambda,z^*+0) = 2\alpha_0 = -b = F(\lambda,z^*+0),$$
$$F_t^*(\lambda,z^*+0) = 2\beta_0(\lambda,0) = -g_0 - \lambda^2c_1^2\alpha_0z^* = F_t(\lambda,z^*+0), \tag{3.2}$$
$$F_{tt}^*(\lambda,z^*+0) = 2\gamma_0(\lambda,0)$$
$$= -g_1 + \frac12\lambda^2c_1^2b - \lambda^2c_1^2\beta_0(z^*)z^* + \frac14\lambda^4c_1^4\alpha_0(z^*)^2 = F_{tt}(\lambda,z^*+0).$$

Первое из этих равенств свидетельствует о том, что функция $F(\lambda,t)$ имеет ненулевой скачок в точке $t=z^*$, и поэтому определяет $z^*=\sup\{t^*\in(0,T)\mid F(\lambda,t)\equiv 0, t\in(0,t^*)\}$, а также величину b. Второе из равенств, рассматриваемое для $\lambda=\lambda_1$, $\lambda=\lambda_2$ (напомним, что $\lambda_1^2\neq\lambda_2^2$), определяет числа $g_0=g(+0)$ и c_1, а третье равенство позволяет вычислить $g_1=g'(+0)$.

Таким образом, скорость в первом слое становится известной. Неизвестной остается граница $z=z_1$. Найдем необходимое и достаточное условие, при выполнении которого ее можно определить. Как видно из формул (3.1), следующий после точки $t=z^*$ разрыв функции $F(\lambda,t)$ возможен только за счет волн, однократно отраженных от границы $z=z_1$. Эти волны соответствуют мультииндексам $i=(1,0)$ и $i=(1,0,1)$. Покажем, что или функция $F^*(\lambda,t)$, или ее вторая производная $F^*_{tt}(\lambda,t)$ разрывны в точке $t=\tau_{1,0}=2z_1-z^*$. Из формул (2.5), (2.6), (2.10), (2.11), (2.14) следуют равенства

$$[F^*]_{t=\tau_{1,0}}=2\alpha_{1,0}=2\eta_{1,2}\alpha_1=-b\eta_{1,2}=[F]_{t=\tau_{1,0}},$$

$$\begin{aligned}[F^*_t]_{t=\tau_{1,0}}&=2\beta_{1,0}(\lambda,0)=2\eta_{1,2}\left(\beta_1(\lambda,z_1)-\frac{1}{2}\lambda^2c_1^2\alpha_1z_1\right)\\&=2\eta_{1,2}\left(\beta_1(z^*)-\frac{1}{2}\lambda^2c_1^2\alpha_1(2z_1-z^*)\right)=[F_t]_{t=\tau_{1,0}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[F^*_{tt}]_{t=\tau_{1,0}}&=2\gamma_{1,0}(\lambda,0)=2\eta_{1,2}\left(\gamma_1(\lambda,z_1)-\frac{1}{2}\lambda^2c_1^2\beta_1(\lambda,z_1)z_1+\frac{1}{8}\lambda^4c_1^4\alpha_1z_1^2\right)\\&\quad+\frac{\lambda^2}{2}\big(1-\eta_{1,2}^2\big)\big(c_1^2-c_2^2\big)\alpha_1\\&=2\eta_{1,2}\left(\gamma_1(\lambda,z^*)-\frac{1}{2}\lambda^2c_1^2\beta_1(z^*)(2z_1-z^*)+\frac{1}{8}\lambda^4c_1^4\alpha_1(2z_1-z^*)^2\right)\\&\quad+\frac{\lambda^2}{2}\big(1-\eta_{1,2}^2\big)\big(c_1^2-c_2^2\big)\alpha_1=[F_{tt}]_{t=\tau_{1,0}}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Здесь символ $[\cdot]_{t=t_0}$ означает величину скачка функции, стоящей в квадратных скобках, при переходе через точку $t=t_0$. Формулы (3.3) показывают, что справедлива следующая альтернатива: либо $\eta_{1,2}\neq 0$ и тогда функция F^* разрывна в точке $t=\tau_{1,0}$, либо $\eta_{1,2}=0$ и тогда функции F^* и F^*_t непрерывны в точке $t=\tau_{1,0}$, а функция F^*_{tt} имеет в этой точке конечный разрыв. Последнее следует из того, что $\eta_{1,2}=0$ только в том случае, когда $d_{1,2}=1$, а при этом, как уже было замечено выше, выполнено неравенство $c_1\neq c_2$. Таким образом, необходимым и достаточным условием индикации точки $t=\tau_{1,0}$ по заданной функции $F(\lambda,t)$ является наличие разрыва либо самой функции, либо ее второй производной F_{tt} на сегменте (z^*,T). С другой стороны, если точек разрыва более одной, то, очевидно, значению $t=\tau_{1,0}$ отвечает ближайшая к z^* точка, т. е. $\tau_{1,0}=\sup\{t^*\in(z^*,T)\mid F(\lambda,t)\in\mathbf{C}^2(z^*,t^*)\}$. Именно величина $\tau_{1,0}$ и определяет границу первого слоя $z_1=(\tau_{1,0}+z^*)/2$. Первое из равенств (3.3) при этом определяет величину $\eta_{1,2}$, а значит, и $d_{1,2}$. Тогда в третьем равенстве первое слагаемое, имеющее множителем $\eta_{1,2}$, становится тогда известным, и так как по крайней мере одно из значений λ_1, λ_2 отлично от нуля, функции $F(\lambda_1,t)$, $F(\lambda_2,t)$ однозначно определяют скорость c_2 в слое (z_1,z_2). Возникает вопрос об отыскании очередной границы $z=z_2$, значения скорости в слое (z_2,z_3) и величины $d_{2,3}$ и т. д.

Рассмотрим общий случай: допустим, что уже найдены граница $z = z_{n-1}$ и числа c_n, $d_{n-1,n}$, $n \geq 2$. Требуется решить вопрос: можно ли по данным задачи найти очередную границу $z = z_n$? Если ответ на этот вопрос положительный, то нужно указать формулы для вычисления z_n и параметров c_{n+1}, $d_{n,n+1}$. Введем в рассмотрение функцию $F_n^*(\lambda, t)$, определив ее равенством

$$F_n^*(\lambda, t) = \theta_0(t) \sum_{s\geq 1} [\alpha_i \theta_0(t - \tau_i) + \beta_i(\lambda, 0)\theta_1(t - \tau_i) + \gamma_i(\lambda, 0)\theta_2(t - \tau_i)], \tag{3.4}$$

в котором суммирование распространяется на все мультииндексы $i = (i_1, \dots, i_s)$, у которых $i_k \leq n-1$, $k = 1, \dots, s$, и, кроме того, или $i_s = 0$, или $(i_{s-1}, i_s) = (0, 1)$, а $\tau_i < T$. Функция $F_n^*(\lambda, t)$ содержит в себе ту часть функции $F^*(\lambda, t)$, которая отвечает волнам, многократно отраженным и преломленным внутри первых $n - 1$ слоев. Так как по сделанному выше предположению все параметры этих слоев известны, составные слагаемые этой функции вычисляются по приведенным в § 2 формулам и, таким образом, функция $F_n^*(\lambda, t)$ известна.

Введем в рассмотрение разность $F(\lambda, t) - F_n^*(\lambda, t)$. В терминах этой функции ответ на поставленный выше вопрос решается следующим образом: если разность $F(\lambda, t) - F_n^*(\lambda, t)$ является функцией класса $\mathbf{C}^2(0, T)$, то граница $z = z_n$ найдена быть не может, так как данные обратной задачи не содержат в себе информации об отраженных от этой границы волнах. Если же указанная разность содержит на отрезке $(0, T)$ разрывы либо самой функции, либо ее второй производной, то граница z_n и параметры c_{n+1}, $d_{n,n+1}$ определяются однозначно. В самом деле, рассмотрим волну, соответствующую мультииндексу $i = (1, 2, \dots, n-1, n, n+1, \dots, 1, 0)$. Очевидно, что это самая ранняя из отразившихся от границы $z = z_n$ волн, которая достигает оси $z = 0$. Пусть τ_i — отвечающее этой волне время пробега сигнала от источника до границы $z = z_n$ и затем от этой границы до оси $z = 0$. Тогда имеют место равенства

$$[F^* - F_n^*]_{t=\tau_i} = 2\alpha_i = 2\kappa_n \alpha_1 = -b\kappa_n = [F - F_n^*]_{t=\tau_i},$$

$$[(F^* - F_n^*)_t]_{t=\tau_i} = 2\beta_i(\lambda, 0) = 2\kappa_n \left(\beta_1(z^*) - \frac{1}{2}\lambda^2 \nu_n \alpha_1\right) = [(F - F_n^*)_t]_{t=\tau_i},$$

$$\begin{aligned} [(F^* - F_n^*)_{tt}]_{t=\tau_i} &= 2\gamma_{1,0}(\lambda, 0) \\ &= 2\kappa_n \left(\gamma_1(\lambda, z^*) - \frac{1}{2}\lambda^2 \beta_1(z^*)\nu_n + \frac{1}{8}\lambda^4 \alpha_1 \nu_n^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 \alpha_1 p_n\right) + \frac{1}{2}\lambda^2 \alpha_1 q_n \\ &= [(F - F_n^*)_{tt}]_{t=\tau_i}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь

$$\kappa_n = \eta_{n,n+1} \prod_{k=1}^{n-1} \big(1 - \eta_{k,k+1}^2\big), \quad \nu_n = c_1^2(2z_1 - z^*) + 2\sum_{k=2}^{n} c_k^2 (z_k - z_{k-1}),$$

$$p_n = \sum_{k=2}^{n-1} \big(c_k^2 - c_{k+1}^2\big)(1 - \eta_{k,k+1}), \quad q_n = \left(\sum_{k=2}^{n} \big(c_{k+1}^2 - c_k^2\big)(1 - \eta_{k,k+1})\right) \prod_{k=1}^{n-1} \big(1 - \eta_{k,k+1}^2\big). \tag{3.6}$$

Формулы (3.5) показывают, что справедлива следующая альтернатива: или $\kappa_n \neq 0$ и тогда функция $(F^* - F_n^*)$ разрывна в точке $t = \tau_i$, или $\kappa_n = 0$ и тогда функции $(F^* - F_n^*)$ и $(F^* - F_n^*)_t^*$ непрерывны в этой точке, а $\eta_{n,n+1} = 0$ и $d_{n,n+1} = 1$. В последнем случае функция $(F^* - F_n^*)_{tt}^*$ имеет в точке $t = \tau_i$,

$i = (1, 2, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots, 1, 0)$, конечный разрыв. Таким образом, необходимым и достаточным условием индикации этой точки по заданной функции $F - F_n^*$ является наличие разрыва либо этой функции, либо ее второй производной $(F - F_n^*)_{tt}$ на сегменте $(0, T)$. Если такой разрыв существует, то $\tau_i = \sup\{t^* \in (0, T) \mid F(\lambda, t) \in \mathbf{C}^2(0, t^*)\}$ и тогда граница $z = z_n$ находится по формуле $z_n = (\tau_i + z^*)/2$. В противном случае интервал $(0, T)$ наблюдения функции $F(\lambda, t)$ оказывается недостаточным для определения этой границы. Если граница $z = z_n$ найдена, то первое из равенств (3.5) определяет величину κ_n, а значит, и числа $\eta_{n,n+1}$ и $d_{n,n+1}$. Тогда первое слагаемое третьего равенства, имеющее множителем κ_n, становится известным. Поэтому функции $F(\lambda_1, t) - F_n^*(\lambda_1, t)$ и $F(\lambda_2, t) - F_n^*(\lambda_2, t)$ однозначно определяют q_n, а следовательно, и значение c_{n+1} в слое (z_n, z_{n+1}).

Заметим, что для отыскания c_{n+1} достаточно знать функцию $F(\lambda, t)$ только при одном значении $\lambda \neq 0$. Напомним, что при доказательстве теоремы лишь в одном месте использовалось предположение, что функция $F(\lambda, t)$ известна для двух значений λ, а именно на начальном этапе при определении чисел g_0 и c_1. Поэтому если в исходной постановке задачи предположить, что скорость c_1 в первом слое известна, то все остальные параметры, задающие структуру среды на интервале $(0, (T+z^*)/2)$, однозначно определяются заданием функции $F(\lambda, t)$ только при одном фиксированном $\lambda \neq 0$.

Для завершения доказательства теоремы 1.1 осталось установить, что функция $\hat{g}(t)$ однозначно находится по заданной информации для значений $t \in [0, T - z^*)$. Фиксируем $\lambda = \lambda_1$ (в дальнейшем для удобства индекс 1 будем опускать) и рассмотрим область $D'(T) = \{(z, t) \mid 0 < z < z^*, z^* - z < t \leq T - z\}$. В этой области функция v удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.7), а также данным Коши при $z = 0$:

$$v|_{z=0} = F(\lambda, t),\ t \in (0, T), \quad v_z|_{z=0} = 0, \tag{3.7}$$

и условию на характеристике $t = z$:

$$v|_{t=z} = \alpha_0, \quad z \in (0, z^*). \tag{3.8}$$

Этими данными функция $v(\lambda, z, t)$ определяется однозначно во всей области $D'(T)$, следовательно, также однозначно находятся предельные значения этой функции и ее производной по z при $z = z^* - 0$, т. е. $v(\lambda, z^* - 0, t)$ и $v_z(\lambda, z^* - 0, t)$ для $t \in (0, T - z^*)$. Тем самым условиями сопряжения (1.10) определяется функция $v(\lambda, z^* + 0, t)$. Рассмотрим теперь область $D''(T) = \{(z, t) \mid z^* < z < (T + z^*)/2, z - z^* < t \leq T - z\}$. На границе этой области, определяемой равенством $z = z^*$, задана функция $v = v(\lambda, z^* + 0, t)$. Кроме того, функция v задана на характеристической границе $t = z - z^*$ области $D'(T)$ равенствами

$$v|_{t=z-z^*+0} = \begin{cases} \alpha_1, & z \in (z^*, z_1), \\ \alpha_{1,2,\ldots,k-1,k}, & z \in (z_{k-1}, z_k),\ k = 2, 3, \ldots. \end{cases} \tag{3.9}$$

Хорошо известно, что функция $v(\lambda, z, t)$, являющаяся решением уравнения (1.7), однозначно определяется в области $D''(T)$ этими данными и условиями сопряжения (1.9). Следовательно, однозначно вычисляются предельные значения ее нормальной производной при $z = z^*$, т. е. $v_z(\lambda, z^* + 0, t)$ для всех $t \in (0, T - z^*)$. В результате предельные значения нормальных производных функции v при $z = z^*$ слева и справа становятся известными и искомая функция $\hat{g}(t)$ находится для всех $t \in (0, T - z^*)$ из второго равенства (1.10).

§ 4. Доказательство теоремы 1.2

При построении функции $v^*(\lambda, z, t)$ в § 2 были параллельно получены дифференциальное уравнение для функции $w(\lambda, z, t)$, а также граничные и начальные условия и условия сопряжения в точке z^* и точках разрыва параметров среды $z = z_k$. Они определены равенствами

$$w_{tt} - w_{zz} + \lambda^2 c_k^2 w = \varphi_k(\lambda, z, t), \quad (z, t) \in (z_{k-1}, z_k) \times \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{4.1}$$

$$w|_{t<0} \equiv 0, \quad w_z|_{z=0} = 0, \tag{4.2}$$

$$w|_{z=z^*+0} = w|_{z=z^*-0}, \quad w_z|_{z=z^*+0} - w_z|_{z=z^*-0} = h(\lambda, t), \tag{4.3}$$

$$w|_{z=z_k+0} = w|_{z=z_k-0}, \quad w_z|_{z=z_k+0} = d_{k,k+1} w_z|_{z=z_k-0} + h_k(\lambda, t), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{4.4}$$

в которых функции $h(\lambda, t)$, $h_k(\lambda, t)$, $\varphi_k(\lambda, z, t)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями переменной t. Кроме того, функции $\varphi_k(\lambda, z, t)$ кусочно полиномиальны по переменной z.

Теория задачи (4.1)–(4.4) хорошо известна. Рассмотрим решение этой задачи в области $D(T) = \{(z, t) \mid z \geq 0,\ 0 \leq t < T - z\}$. Условия непрерывного сопряжения решения в точках z^*, z_k и свойства непрерывности функций $h(\lambda, t)$, $h_k(\lambda, t)$, $\varphi_k(\lambda, z, t)$ по переменной t обеспечивают принадлежность функций w и w_t функциональному классу $\mathbf{C}(D(T))$. Так как все соотношения системы (4.1)–(4.4) можно продифференцировать по переменной t и при этом функции $h_t(\lambda, t)$, $(h_k)_t(\lambda, t)$, $(\varphi_k)_t(\lambda, z, t)$ сохраняют свою непрерывность, то отсюда следует, что функция w_t также обладает подобным свойством, т. е. принадлежит классу $\mathbf{C}(D(T))$ вместе со своей производной w_{tt}. Очевидно, что при $t \leq |z - z^*|$ для решения задачи (4.1)–(4.4) справедливо равенство $w(\lambda, z, t) \equiv 0$. Тем самым теорема 1.2 установлена.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Благовещенский А. С.* Одномерная обратная краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка // Математические вопросы теории распространения волн. Л.: Изд-во ЛОМИ, 1969. Т. 2. С. 85–90.
2. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
3. *Романов В. Г.* Вопросы корректности задачи определения скорости звука // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 4. С. 125–134.
4. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости в обратной задаче определения скорости звука // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 6. С. 1323–1338.
5. *Белишев М. И., Благовещенский А. С.* Динамические обратные задачи теории волн. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 1999.
6. *Романов В. Г.* Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005.
7. *Romanov V. G., Weng C. I., Chen T. C.* An inverse problem for a layered elastic plate // Appl. Math. Comput. 2003. V. 137, N 2–3. P. 349–369.
8. *Гервер М. Л.* Обратная задача для одномерного волнового уравнения с неизвестным источником колебаний. М.: Наука, 1974.
9. *Романов В. Г.* О задаче определения структуры слоистой среды и формы импульсного источника // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 867–881.
10. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

Статья поступила 2 апреля 2007 г.

Романов Владимир Гаврилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru