Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2008. Том 49, № 1

УДК 517.54

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПРИВЕДЕННОГО МОДУЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

О. А. Лазарева

Аннотация. Получены верхние оценки для конформного модуля конденсатора с равномерно совершенными пластинами и для приведенного модуля равномерно совершенного множества E в точке $a \in \overline{\mathbb{R}}^n \setminus E$. Для приведенного модуля α-равномерно совершенных множеств доказано свойство непрерывности относительно сходимости дополнений этих множеств к ядру в смысле Каратеодори.

Ключевые слова: конформная емкость, приведенный модуль, сходимость к ядру, заполненное множество.

1. Терминология и обозначения. Пространство $\overline{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ наделяется хордовой метрикой $q(x,y)$, открытый шар с центром в точке x_0 и хордовым радиусом δ обозначаем символом $Q(x_0,\delta)$, замкнутый шар — символом $\overline{Q}(x_0,\delta)$. Для евклидовых открытого и замкнутого шаров с центром x_0 и радиусом r используем соответственно обозначения $B(x_0,r)$ и $\overline{B}(x_0,r)$. Заметим, что $Q(0,\delta) = B(0,\delta/\sqrt{1-\delta^2})$ (см. [1, 1.25]). Далее $d_q(a,E) = \inf\{q(x,y) : y \in E\}$ — расстояние от точки a до множества E в хордовой метрике, $\operatorname{diam}_q(E)$ — диаметр множества E в хордовой метрике; $d_q(E,F) = \inf\{q(x,y) : x \in E, y \in F\}$ — расстояние между множествами в хордовой метрике, $\operatorname{dist}_q(E,F)$ — хаусдорфово расстояние между непустыми замкнутыми множествами $E, F \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, построенное на базе хордовой метрики (см., например, [2, § 29]), т. е.

$$\operatorname{dist}_q(E,F) = \max\{\sup_{x\in E}\inf_{y\in F} q(x,y), \sup_{y\in F}\inf_{x\in E} q(x,y)\},$$

$\operatorname{Int}(A) = A \backslash \partial A$ — внутренность множества A.

Под *конденсатором* (E_0, E_1) понимается пара непустых непересекающихся компактных множеств $E_0, E_1 \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, называющихся его *пластинами*. Мёбиусово-инвариантной числовой характеристикой конденсатора (E_0,E_1) служит его *конформная емкость*, определяемая равенством

$$\operatorname{Cap}(E_0,E_1) = \inf \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^n dx, \tag{1}$$

где инфимум берется по семейству $\operatorname{Adm}(E_0,E_1)$ всех вещественных непрерывных на $\overline{\mathbb{R}}^n$ функций $u(x)$ класса $ACL_n(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию $u|_{E_0} \le 0$, $u|_{E_1} \ge 1$. Такие функции называются *допустимыми* для конденсатора (E_0,E_1). Через $|\nabla u(x)|$ обозначается градиент функции u, определенный почти всюду в $\mathbb{R}^n$, интегрирование выполняется по n-мерной мере Лебега. В теории функций используют также величину

$$\operatorname{Mod}(E_0,E_1) = \left(\frac{\omega_{n-1}}{\operatorname{Cap}(E_0,E_1)}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{2}$$

называемую *конформным модулем конденсатора* (E_0, E_1). Константа ω_{n-1} в (2) зависит только от n и определяется как $(n-1)$-мерная мера Лебега сферы единичного радиуса в $\mathbb{R}^n$.

Достаточное для наших целей описание свойств конформной емкости конденсаторов в $\overline{\mathbb{R}}^n$ имеется в [1].

Непустое компактное собственное подмножество E пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$ называется *множеством нулевой емкости*, если для какого-нибудь замкнутого шара B, лежащего в дополнении к E, выполняется равенство $\mathrm{Cap}(E, B) = 0$ (см. [1, 7.12, 7.13; 3, определение 3.2]). В этом случае $\mathrm{Cap}(E, F) = 0$ для любого замкнутого множества $F \subset \overline{\mathbb{R}}^n \setminus E$ (см. [3, лемма 3.4]). Поэтому для конденсатора (E_0, E_1) равенство $\mathrm{Cap}(E_0, E_1) = 0$ равносильно тому, что хотя бы одна из его пластин является множеством нулевой емкости.

Мы используем определение приведенного модуля на основе хордовой метрики в $\overline{\mathbb{R}}^n$, следуя работе [4]. Для непустого компактного множества $E \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ и точки $a \in \overline{\mathbb{R}}^n \setminus E$ полагаем

$$m_q(a, E) = \lim_{\delta \to 0} [\mathrm{Mod}(\overline{Q}(a, \delta), E) + \mathrm{Ln}\, \delta] \tag{3}$$

и называем эту величину (конечную или $+\infty$) *хордовым приведенным модулем* множества E в точке a.

Замечание. Связь хордового приведенного модуля $m_q(a, \partial D)$ границы области D с понятием классического (евклидова) приведенного модуля $m(a, D)$ области D в точке $a \in D$, восходящим к работам И. П. Митюка [5, 6], отражена в [7, формула (16), замечание 2].

Определение 1.1 (см. [8, с. 299] или [9, 2.6, с. 517]). Компактное множество $E \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, содержащее не менее двух точек, называется *равномерно совершенным* с параметром $\alpha \geq 0$, если не существует конденсатора (E_0, E_1) со связными пластинами такого, что $E \subset E_0 \cup E_1$, $E \cap E_0 \neq \varnothing \neq E \cap E_1$ и $\mathrm{Mod}(E_0, E_1) > \alpha$. Семейство всех равномерно совершенных компактов с параметром α обозначаем через $UP(\alpha)$. Из [9, теорема 4.1] следует, что равномерно совершенное множество не может быть множеством нулевой емкости.

Лемма 1.2. *Пусть $E \in UP(\alpha)$ и $\{F_j\}_{j \in J} \subset Up(\alpha)$ — семейство множеств такое, что $F = \bigcup_{j \in J} F_j$ компактно и $F_j \cap E \neq \varnothing$ для каждого $j \in J$. Тогда $F \cup E \in UP(\alpha)$. Если при этом $E \subset F$, то $F \in UP(\alpha)$.*

Доказательство. Эта лемма является частным случаем более общего утверждения в [10, утверждение 1].

Лемма 1.3. *Топологический предел $A = \operatorname*{Lim}_{k \to \infty} A_k$ последовательности α-равномерно совершенных множеств является либо одноточечным множеством, либо α-равномерно совершенным множеством.*

Доказательство. Пусть A — не одноточечное множество. Допустим, что A не является α-равномерно совершенным. Тогда согласно определению существует конденсатор со связными пластинами (E, F) такой, что $A \subset E \cup F$, $E \cap A \neq \varnothing \neq F \cap A$ и $\mathrm{Mod}(E, F) > \alpha$. Задав монотонно убывающую последовательность $\varepsilon_j \to 0$, рассмотрим систему ε-окрестностей множеств E и F: $U_j(E) = \{x \in \overline{\mathbb{R}}^n : d_q(x, E) \leq \varepsilon_j\}$ и $U_j(F) = \{x \in \overline{\mathbb{R}}^n : d_q(x, F) \leq \varepsilon_j\}$, являющихся континуумами. При этом для достаточно малых ε_j имеет место топологическая сходимость конденсаторов $(U_j(E), U_j(F)) \to (E, F)$ при $j \to \infty$. Используя известную теорему о непрерывности конформной емкости для случая топологической сходимости конденсаторов со связными пластинами (см., например, [11, теорема 5]), получаем сходимость $\mathrm{Mod}(U_j(E), U_j(F)) \to \mathrm{Mod}(E, F) > \alpha$ при $j \to \infty$. Следовательно, найдется номер J, начиная с которого $\mathrm{Mod}(U_J(E), U_J(F)) > \alpha$. В силу топологической сходимости $A_k \to A \subset E \cup F \subset \mathrm{U}_J(E) \cup \mathrm{U}_J(F)$ найдется номер k, для которого $A_k \subset U_J(E) \cup U_J(F)$. Так как при этом $U_J(E) \cap A_k \neq \varnothing \neq U_J(F) \cap A_k$ и $\mathrm{Mod}(U_J(E), U_J(F)) > \alpha$, это противоречит α-равномерной совершенности множества A_k. Полученное противоречие и доказывает утверждение леммы.

2. Верхние оценки для модуля конденсатора и приведенного модуля. Нижняя оценка приведенного модуля выводится из следующих фактов:

1) приведенный модуль $m_q(a, E)$ не увеличивается при расширении множества E (см., например, [12, с. 12] или [13, свойство I, с. 81]);

2) $m(0, B(0, R)) = \mathrm{Ln}\, R$ (см., например, [13, с. 82]);

3) всегда найдется шар $Q(a, d)$ такой, что $E \subset \overline{\mathbb{R}}^n \setminus Q(a, d)$.

Используя эти факты, получаем нижнюю оценку

$$m_q(a, E) \geq m_q(a, \overline{\mathbb{R}}^n \setminus Q(a, d)) = m\left(0, B\left(0, \frac{d}{\sqrt{1-d^2}}\right)\right) = \mathrm{Ln}\, \frac{d}{\sqrt{1-d^2}} > -\infty,$$

где $d = d_q(a, E)$.

Для получения верхних оценок модуля конденсатора $\mathrm{Mod}(E_0, E_1)$ в тех случаях, когда пластины конденсатора связны, обычно используют подходящее преобразование симметризации и сводят задачу к оценке модуля экстремального кольца Тейхмюллера (см., например, [12, теорема 2.5, с. 42]). Однако в случае несвязных пластин (множества канторовского типа) эти оценки, вообще говоря, нельзя выразить через емкости экстремальных колец Греча и Тейхмюллера.

Ограничившись рассмотрением конденсаторов с равномерно совершенными пластинами, мы используем следующий результат.

Теорема 2.1 [4, теорема 2]. *Пусть в $\overline{\mathbb{R}}^n$ заданы компактное множество K ненулевой емкости, $d > 0$, $\alpha \geq 0$ и такие α-равномерно совершенные множества E, F, для которых $d_q(K, E \cup F) \geq d$, $\mathrm{diam}_q(E) \geq d$ и $\mathrm{diam}_q(F) \geq d$. Если $\delta = \mathrm{dist}_q(E, F) \leq d/(2 + 4e^\alpha)$, то*

$$|\mathrm{Mod}(E, K) - \mathrm{Mod}(F, K)| \leq \left(\frac{C(n, \alpha)}{\mathrm{Ln}(d/(2\delta))}\right)^{1/(n-1)}, \tag{2.1.1}$$

где константа $C(n, \alpha)$ зависит только от n и α.

Теорема 2.2. *Пусть (E_0, E_1) — конденсатор в $\overline{\mathbb{R}}^n$, пластины которого являются α-равномерно совершенными множествами. Для $j = 0, 1$ положим*

$$\delta_j = \frac{\min\{d_q(E_0, E_1), \mathrm{diam}_q(E_j)\}}{4\max\{(1 + 2e^\alpha), e^{C_{n,\alpha}}\}}. \tag{2.2.1}$$

Тогда

$$\mathrm{Mod}(E_0, E_1) \leq 2 + \left(\frac{\omega_{n-1}}{\tau_n\left(\frac{4 d_q(E_0, E_1)}{\delta_0 \delta_1}\right)}\right)^{1/(n-1)}, \tag{2.2.2}$$

где $\tau_n(t)$ — функция Тейхмюллера (конформная емкость кольца Тейхмюллера в $\mathbb{R}^n$ с параметром t), а $C_{n,\alpha}$ — константа из теоремы 2.1.

Доказательство. Построим покрытия $\{\overline{Q}(a_i, \delta_0)\}_{i=1}^m$ (где $a_i \in E_0$) и $\{\overline{Q}(b_j, \delta_1)\}_{j=1}^{m'}$ (где $b_j \in E_1$) компактов E_0 и E_1 соответственно, причем нумерацию выберем таким образом, чтобы $d_q(a_1, b_1) = \min\{d_q(a_i, b_j)\}_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,m'}$.

По лемме 1.2 множества $Q_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{Q}(a_i, \delta_0)$ и $Q_1 = \bigcup\limits_{j=1}^{m'} \overline{Q}(b_j, \delta_1)$ являются α-равномерно совершенными компактами. Так как $\delta_j < d_q(E_0, E_1)/4$, для любого K_{1-j} такого, что $E_{1-j} \subset K_{1-j} \subset Q_{1-j}$, имеем

$$d_q(K_{1-j}, Q_j \cup E_j) = d_q(K_{1-j}, Q_j) \geq d_q(E_{1-j}, E_j) - \delta_1 - \delta_0 > d_q(E_0, E_1)/2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\min\{d_q(K_{1-j}, Q_j \cup E_j), \operatorname{diam}_q(E_j), \operatorname{diam}_q(Q_j)\} \\ &\qquad \geq \min\{d_q(E_0, E_1), \operatorname{diam}_q(E_j)\}/2 \geq 2\delta_j \max\{(1 + 2e^{\alpha}), \exp(C_{n,\alpha})\}, \end{aligned}$$

так что для компакта K_{1-j} и пары множеств Q_j, E_j (заметим, что $\operatorname{dist}_q(Q_j, E_j) = \delta_j$) выполняются условия теоремы 2.1 (с параметром $d = 2\delta_j \max\{(1 + 2e^{\alpha}), \exp(C_{n,\alpha})\}$). Применение этой теоремы с учетом неравенства $d/2\delta_j \geq \exp(C_{n,\alpha})$ дает оценку

$$|\operatorname{Mod}(K_{1-j}, E_j) - \operatorname{Mod}(K_{j-1}, Q_j)| \leq \left(\frac{C_{n,\alpha}}{\operatorname{Ln}(d/2\delta_1)}\right)^{1/(n-1)} \leq 1.$$

При $K_{j-1} = E_{j-1}$ и $j = 1$ имеем $\operatorname{Mod}(E_0, E_1) - \operatorname{Mod}(E_0, Q_1) \leq 1$, а при $K_{j-1} = Q_{j-1}$ и $j = 0$ имеем $\operatorname{Mod}(Q_1, E_0) - \operatorname{Mod}(Q_1, Q_0) \leq 1$. Складывая эти неравенства, получаем оценку

$$\operatorname{Mod}(E_0, E_1) - \operatorname{Mod}(Q_0, Q_1) \leq 2. \tag{2.2.3}$$

Воспользовавшись оценкой [1, 7.37 (2)], заданной для конформной емкости конденсатора, и монотонностью функции Тейхмюллера τ_n [1, 7.20], приходим к неравенству

$$\operatorname{Cap}(Q_0, Q_1) \geq \operatorname{Cap}(\overline{Q}(a_1, \delta_0), \overline{Q}(b_1, \delta_1)) \geq \tau_n(4d_q(E_0, E_1)/\delta_0\delta_1).$$

Переходя в этом неравенстве к конформному модулю конденсатора и используя (2.2.3), получим требуемую оценку (2.2.2). Теорема доказана.

Теорема 2.3. *Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ — некоторое α-равномерно совершенное множество и $a \in \overline{\mathbb{R}}^n \setminus E$. Положим*

$$\delta_1 = \frac{\min\{\operatorname{diam}_q(E), d_q(a, E)\}}{4 \max\{(1 + 2e^{\alpha}), e^{C_{n,\alpha}}\}},$$

где $C_{n,\alpha}$ — константа из теоремы 2.1. *Тогда*

$$m_q(a, E) \leq 2 \operatorname{Ln} \frac{d_q(a, E)}{\delta_1} < +\infty. \tag{2.3.1}$$

Доказательство. Пусть $\delta < d_q(a, E)/4$ и $Q_0 = \overline{Q}(a, \delta)$. Построим конечное покрытие компакта E замкнутыми шарами $\{\overline{Q}(b_i, \delta_1)\}_{i=1,\dots,m}$ с центрами $b_i \in E$ такое, что $q(a, b_1) = d_q(a, E)$, и положим $Q_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{Q}(b_i, \delta_1)$. Так как $\delta_1 < d_q(a, E)/4$, то

$$d_q(Q_0, Q_1 \cup E) = d_q(Q_0, Q_1) \geq d_q(a, E) - \delta_1 - \delta > d_q(a, E)/2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\min\{d_q(Q_0, Q_1 \cup E), \operatorname{diam}_q(E), \operatorname{diam}_q Q_1\} \\ &\qquad \geq \min\{d_q(a, E), \operatorname{diam}_q(E)\}/2 \geq 2\delta_1 \max\{(1 + 2e^{\alpha}), e^{C_{n,\alpha}}\} \end{aligned}$$

и, следовательно, для компакта Q_0 и пары множеств Q_1, E с $\operatorname{dist}(Q_1, E) = \delta_1$ выполняются условия теоремы 2.1 с $d = 2\delta_1 \max\{(1+2e^{\alpha}), e^{C_{n,\alpha}}\}$, в силу которой (с учетом неравенства $d/2\delta_1 \geq \exp(C_{n,\alpha})$) имеем оценку

$$\operatorname{Mod}(Q_0, E) \leq \operatorname{Mod}(Q_0, Q_1) + 1 \leq \operatorname{Mod}(Q_0, \overline{Q}(b_1, \delta_1)) + 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{\delta \to 0} [\operatorname{Mod}(Q_0, E) + \operatorname{Ln} \delta] \leq \lim_{\delta \to 0} [\operatorname{Mod}(Q_0, \overline{Q}(b_1, \delta_1)) + \operatorname{Ln} \delta] + 1.$$

Это означает, что

$$m_q(a, E) \leq m_q(a, \overline{Q}(b_1, \delta_1)) + 1. \tag{2.3.2}$$

Вычисление приведенного модуля $m_q(a, \overline{Q}(b_1, \delta_1))$, выполненное в работе [7, доказательство теоремы 4.1], привело к формуле

$$m_q(a, \overline{Q}(b_1, \delta_1)) = \operatorname{Ln}\left(\frac{R^2 - |\mu(a)|^2}{R(1 + |\mu(a)|^2)}\right),$$

где $R = \sqrt{1 - \delta_1^2}/\delta_1$, а $|\mu(a)| = \sqrt{1 - (d_q(a, b_1))^2}/d_q(a, b_1)$. Учитывая, что $\delta_1 < d/8 < 1/8$ и $d_q(a, b_1) = d_q(a, E)$, получаем оценку

$$\begin{aligned} m_q(a, \overline{Q}(b_1, \delta_1)) &= \operatorname{Ln}\left(\left(\frac{d_q(a, b_1)^2}{\delta_1^2} - 1\right)\frac{\delta_1}{\sqrt{1 - \delta_1^2}}\right) \\ &\leq \operatorname{Ln}\left(\frac{d_q(a, b_1)^2}{\delta_1^2}\right) + \operatorname{Ln}\frac{\delta_1}{\sqrt{1 - \delta_1^2}} \leq 2\operatorname{Ln}\frac{d_q(a, E)}{\delta_1} + \operatorname{Ln}\frac{1}{\sqrt{63}}. \end{aligned}$$

Из этой оценки и соотношения (2.3.2) получаем требуемое неравенство (2.3.1):

$$m_q(a, E) \leq 2\operatorname{Ln}\frac{d_q(a, E)}{\delta_1} + \operatorname{Ln}\frac{1}{\sqrt{63}} + 1 \leq 2\operatorname{Ln}\frac{d_q(a, E)}{\delta_1}.$$

Теорема доказана.

3. Непрерывность приведенного модуля относительно сходимости к ядру. Следуя обозначениям и терминологии работы [14], мы рассматриваем множество $\operatorname{Cond}^o(\overline{\mathbb{R}}^n)$ всех заполненных конденсаторов $\mathbf{E} = (E^-, E^+)$ (где $E^-, E^+ \subset \overline{\mathbb{R}}^n$), на котором задана [14, § 3] структура секвенциальной сходимости kern (известной как сходимость к ядру), более слабая, чем топологическая сходимость, что позволяет рассматривать $(\operatorname{Cond}^o(\overline{\mathbb{R}}^n), \mathrm{kern})$ в качестве $\mathscr{L}^*$-пространства в смысле Куратовского (см. [15, § 20]). В основе этой конструкции лежит операция заполнения конденсатора, сопоставляющая каждому конденсатору $\mathbf{E} = (E^-, E^+)$ заполненный конденсатор $\widehat{\mathbf{E}} = (\widehat{E}^-(E^+), \widehat{E}^+(E^-))$, где $\widehat{A}(B)$ для непересекающихся компактных множеств $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^n$ есть объединение множества A со всеми теми компонентами открытого множества $\overline{\mathbb{R}}^n \setminus A$, замыкание которых не пересекается с множеством B (см. [14, § 1]). Сходимость последовательности конденсаторов $\{\mathbf{E}_j\}$ в $\overline{\mathbb{R}}^n$ к заполненному конденсатору $\mathbf{F}$ как к ядру означает, что соответствующая последовательность $\{\widehat{\mathbf{E}}_j\}$ заполненных конденсаторов kern-сходится к $\mathbf{F}$ в пространстве $\operatorname{Cond}^o(\overline{\mathbb{R}}^n)$. Мы используем следующий результат из [14, теорема 7], переформулированный для случая пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$.

Теорема 3.1. *Пусть K — некоторое семейство конденсаторов в пространстве $\overline{\mathbb{R}}^n$, инвариантное относительно операции заполнения и замкнутое относительно топологической сходимости. Тогда K замкнуто относительно сходимости к ядру. Если вещественная функция $f : K \to R$ такова, что f непрерывна относительно топологической сходимости конденсаторов и $f(\widehat{\mathbf{F}}) = f(\mathbf{F})$ для любого конденсатора $\mathbf{F} \in K$, то f непрерывна относительно сходимости к ядру для последовательностей конденсаторов из семейства K.*

Мы покажем, что из этой теоремы следует свойство kern-непрерывности приведенного модуля.

Теорема 3.2. *Пусть $a_j \in \overline{\mathbb{R}}^n$ и последовательность конденсаторов $\mathbf{E}_j = (\{a_j\}, E_j)$ с α-равномерно совершенными пластинами E_j сходится к заполненному конденсатору $(\{a\}, E)$ как к ядру. Тогда*

$$\lim_{j\to\infty} m_q(a_j, E_j) = m_q(a, E). \tag{3.2.1}$$

Доказательство. В качестве семейства K, фигурирующего в теореме 3.1, рассмотрим семейство всех конденсаторов вида $(\{x\}, F)$, у которых одна пластина — одноточечное множество, а вторая пластина является либо α-совершенным, либо одноточечным множеством.

Убедимся, что семейство K инвариантно относительно операции заполнения конденсаторов. Равенство $\{\hat{x}\}(F) = \{x\}$ тривиально. Пусть $F \in UP(\alpha)$. Так как множество $\widehat{F}(\{x\})$ есть объединение α-равномерно совершенного множества F с некоторым семейством связных открытых множеств, замыкания которых (континуумы) пересекаются с F, то $\widehat{F}(\{x\})$ является α-равномерно совершенным множеством в силу леммы 1.2, т. е. в этом случае $(\{\hat{x}\}(F), \widehat{F}(\{x\}))$ принадлежит семейству K. В случае, когда $F = \{y\}$ — одноточечное множество, конденсатор $\mathbf{A} = (\{x\}, \{y\})$ является заполненным и $\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \in K$.

Замкнутость семейства K относительно топологической сходимости конденсаторов следует непосредственно из леммы 1.3.

В качестве вещественной функции $f : K \to R$ мы возьмем $f((\{x\}, E)) = m_q(x, E)$. Так как конформная емкость (а значит, и модуль) конденсатора не меняется при его заполнении, это же свойство остается верным и для приведенного модуля:

$$m_q(x, E) = m_q(x, \widehat{E}(\{x\})),$$

т. е. $f(\widehat{\mathbf{E}}) = f(\mathbf{E})$ для любого конденсатора $\mathbf{E} \in K$.

Проверим непрерывность f относительно топологической сходимости конденсаторов из семейства K. Пусть последовательность конденсаторов $\mathbf{E}_j = (\{a_j\}, E_j) \in K$ топологически сходится к конденсатору $\mathbf{E} = (\{a\}, E) \in K$. Построим последовательность сферических изометрий $\mu_j : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^n$, равномерно сходящуюся к тождественному отображению и такую, что $\mu_j(a_j) = a$. При этом имеет место топологическая сходимость $\mu_j(E_j) \to E$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер j_1, что $q(\mu_j(x), \mu_j(y)) \le q(x, y) + \varepsilon/2$ для всех $x, y \in \overline{\mathbb{R}}^n$ и $j \ge j_1$. Это значит, что $\mathrm{dist}_q(\mu_j(A), \mu_j(B)) \le \mathrm{dist}_q(A, B) + \varepsilon/2$ для любой пары компактных множеств $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ и любого $j \ge j_1$. Найдется такое j_2, что $\mathrm{dist}_q(E_j, E) \le \varepsilon/2$ для всех $j \ge j_2$. Тогда для всех $j \ge \max\{j_1, j_2\}$ выполняется оценка $\mathrm{dist}_q(\mu_j(E_j), E) \le \mathrm{dist}_q(\mu_j(E_j), \mu_j(E)) + \mathrm{dist}_q(\mu_j(E), E) \le \varepsilon$. Это и означает топологическую сходимость $\mu_j(E_j) \to E$. Так как хордовый приведенный модуль не меняется при сферических изометриях пространства

$\overline{\mathbb{R}}^n$, то $m_q(a_j, E_j) = m_q(\mu_j(a_j), \mu_j(E_j)) = m_q(a, \mu_j(E_j))$. Если множество E не является одноточечным, то все E_j (а значит, и все $\mu_j(E_j)$) начиная с некоторого номера являются α-равномерно совершенными множествами. Тогда в силу топологической сходимости $\mu_j(E_j) \to E$ применима теорема 4.1 из [7, с. 15], согласно которой $m_q(a, \mu_j(E_j)) \to m_q(a, E)$ при $j \to \infty$. Это означает сходимость $m_q(a_j, E_j) \to m_q(a, E)$. В случае одноточечного множества $E = \{b\}$ имеем равенство $m_q(a, E) = +\infty$. Так как для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер j_0, начиная с которого все множества $\mu_j(E_j)$ лежат в шаре $\overline{Q}(b, \varepsilon)$, то

$$m_q(a, \mu_j(E_j)) \geq m_q(a, \overline{Q}(b, \varepsilon)) = \operatorname{Ln}\left(\frac{d_q(a,b)^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right) = \varphi(\varepsilon).$$

Следовательно, $\liminf\limits_{j\to\infty} m_q(a, \mu_j(E_j)) \geq \varphi(\varepsilon)$. Поскольку $\varphi(\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$, то $\lim\limits_{j\to\infty} m_q(a, \mu_j(E_j)) = +\infty$. Значит, и в этом случае имеем равенство $\lim\limits_{j\to\infty} m_q(a_n, E_n) = +\infty = m_q(a, E)$. Таким образом, f непрерывна относительно топологической сходимости.

Так как K и f удовлетворяют всем условиям теоремы 3.1, то f непрерывна относительно сходимости к ядру последовательности конденсаторов (a_j, E_j), что и дает нам требуемое соотношение (3.2.1). Теорема доказана.

3.3. Следствие. *Пусть в пространстве $\overline{\mathbb{R}}^n$ заданы последовательность точек $\{a_j\}$, сходящаяся к точке a, и такая последовательность открытых множеств $\{D_j\}$, что*

1) *существует шар $Q(a, \delta)$, содержащийся во всех D_j, начиная с некоторого номера;*

2) *существуют $\alpha \geq 0$ и такой номер j_0, что при всех $j \geq j_0$ граница γ_j той компоненты множества D_j, которая содержит точку a, является α-равномерно совершенным множеством;*

3) *последовательность D_j сходится как к ядру (в смысле Каратеодори) к области D.*

Тогда для классического приведенного модуля $m(a_j, D_j)$ открытого множества D_j относительно точки a_j имеет место сходимость $m(a_j, D_j) \to m(a, D)$.

Доказательство. В силу свойств заполнения множеств

$$(\widehat{\overline{\mathbb{R}}^n \backslash D_j})\{a_j\} = (\widehat{\partial\overline{\mathbb{R}}^n \backslash D_j})\{a_j\} = (\widehat{\partial D_j})\{a_j\} = (\widehat{\gamma}_j)\{a_j\}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $a = 0$. Для всех j, начиная с некоторого номера, выполняются равенство [7, (16)]

$$m(a_j, D_j) = \operatorname{Ln}(1 + |a_j|^2) + m_q(a_j, \partial D_j) = \operatorname{Ln}(1 + |a_j|^2) + m_q(a_j, \gamma_j) \qquad (3.3.1)$$

и аналогичное равенство $m(0, D) = m_q(0, \partial D)$. Условие 3 равносильно [14, теорема 2] сходимости к ядру последовательности конденсаторов $(\{a_j\}, \gamma_j) \to (\{0\}, \overline{\mathbb{R}}^n \setminus D)$, для которых в силу условия 2 выполняются условия теоремы 3.2. Поэтому $m_q(a_j, \gamma_j) \to m_q(0, \overline{\mathbb{R}}^n \setminus D) = m_q(0, \partial D)$ при $j \to \infty$. С учетом равенства (3.3.1) это и дает требуемую сходимость $m(a_j, D_j) \to m(0, D)$ $(j \to \infty)$ для классических приведенных модулей областей D_j в точках a_j. Следствие доказано.

Автор выражает благодарность рецензенту, сделавшему ряд ценных поправок и замечаний по поводу данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vuorinen M.* Conformal geometry and quasiregular mappings. Berlin e. a.: Springer-Verl., 1988. (Lecture Notes Math.; V. 1319).
2. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.: ОНТИ НКТП СССР, 1937.
3. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
4. *Асеев В. В., Лазарева О. А.* О непрерывности приведенного модуля и трансфинитного диаметра // Докл. РАН. 2005. Т. 402, № 5. С. 243–253.
5. *Митюк И. П.* Приведений модуль у випадку простору // Докл. АН УРСР. 1964. Т. 5. С. 563–566.
6. *Митюк И. П.* Обобщенный приведенный модуль и некоторые его свойства // Изв. вузов. Математика. 1964. № 2. С. 110–119.
7. *Асеев В. В., Лазарева О. А.* О непрерывности приведенного модуля и трансфинитного диаметра // Изв. вузов. Математика. 2006. № 10. С. 10–18.
8. *Pommerenke Ch.* On uniformly perfect sets and Fuchsian groups // Analysis. 1984. V. 4, N 3/4. P. 299–321.
9. *Järvi P., Vuorinen M.* Uniformly perfect sets and quasiregular mappings // J. London Math. Soc. 1996. V. 54, N 174, part 3. P. 515–529.
10. *Асеев В. В.* Непрерывность конформной емкости для конденсаторов с равномерно совершенными пластинами // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 243–253.
11. *Gehring F. W.* Quasiconformal mappings // Complex analysis and its applications. Vienna, 1976. P. 213–268. (Lect. Int. Semin. Course. Trieste, 1975. V. 2).
12. *Дубинин В. Н.* Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 1. С. 3–76.
13. *Левицкий Б. Е., Митюк И. П.* Некоторые свойства квазиконформных отображений в пространстве // Математический анализ. Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 1975. Т. 2. С. 79–98.
14. *Асеев В. В., Сычев А. В.* Заполнение конденсаторов и сходимость к ядру. Новосибирск, 2004. 34 с. (Препринт / Ин-т математики СО РАН; 146).
15. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1966. Т. 1.

Статья поступила 19 сентября 2006 г.

Лазарева Оксана Александровна
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
oxana_d@pisem.net