Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2008. Том 49, № 2

УДК 519.635.4

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Л. Н. Бондарь, Г. В. Демиденко

Аннотация. Рассматриваются краевые задачи в полупространстве для класса квазиэллиптических систем с переменными коэффициентами. Предполагается, что краевые задачи удовлетворяют условию Лопатинского. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости в соболевских пространствах.

Ключевые слова: квазиэллиптическая система, краевая задача, условие Лопатинского, соболевские пространства, условия разрешимости.

§ 1. Введение

В работе мы продолжаем исследования [1, 2] краевых задач для квазиэллиптических систем в полупространстве

$$\mathscr{L}(x; D_x)U = F(x),\ x \in \mathbb{R}_n^+, \quad \mathscr{B}(D_x)U|_{x_n=0} = 0. \tag{1.1}$$

Мы рассматриваем класс матричных квазиэллиптических операторов $\mathscr{L}(x; D_x)$, введенных Л. Р. Волевичем [3], и предполагаем, что краевые задачи удовлетворяют условию Лопатинского.

В работах [1, 2] мы исследовали однозначную разрешимость краевых задач вида (1.1) для систем с постоянными коэффициентами в соболевских пространствах $W_p^l(\mathbb{R}_n^+)$, $1 < p < \infty$. В частности, доказали, что существует $p^* > 1$ такое, что при $p > p^*$ краевая задача однозначно разрешима в $W_p^l(\mathbb{R}_n^+)$ при произвольной $F(x) \in L_p(\mathbb{R}_n^+) \cap L_1(\mathbb{R}_n^+)$, а при $p \leq p^*$ разрешимость доказана при выполнении конечного набора условий ортогональности вида

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n^+} x^\beta F(x)\, dx = 0. \tag{1.2}$$

В настоящей работе мы доказываем теоремы о безусловной разрешимости задачи (1.1) для систем с переменными коэффициентами. Аналогичные результаты верны для краевых задач для квазиэллиптических уравнений [4, гл. 3; 5].

§ 2. Формулировка основных результатов

Укажем условия на операторы $\mathscr{L}(x; D_x)$, $\mathscr{B}(D_x)$. Обозначим через $l_{j,r}(x; i\xi)$, $b_{j,r}(i\xi)$ элементы матриц $\mathscr{L}(x; i\xi)$, $\mathscr{B}(i\xi)$, являющихся символами соответствующих дифференциальных операторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07–01–00289) и Сибирского отделения РАН (код проекта 2.2).

Условие 1. *Пусть* $m \times m$ — *размер матрицы* $\mathscr{L}(x; i\xi)$. *Предположим, что существует вектор* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $1/\alpha_i \in \mathbb{N}$, $\alpha_n < 1$, *такой, что*

$$l_{j,r}(x; c^\alpha i\xi) = c l_{j,r}(x; i\xi), \quad c > 0,\ j, r = 1, \dots, m.$$

Условие 2. *Равенство*

$$\det \mathscr{L}(x; i\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}_n,$$

при любом $x \in \overline{\mathbb{R}}_n^+$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\xi = 0$.

Условие 3. *Коэффициенты оператора* $\mathscr{L}(x; D_x)$ *непрерывны и постоянны вне некоторого компакта* $K \subset \mathbb{R}_n^+$.

Из условий 1, 2 следует, что уравнение

$$\det \mathscr{L}(x^0; is, i\lambda) = 0, \quad x^0 \in \overline{\mathbb{R}}_n^+,\ s \in \mathbb{R}_{n-1} \backslash \{0\}, \tag{2.1}$$

не имеет вещественных корней по λ. Обозначим через μ число корней, лежащих в верхней полуплоскости.

Условие 4. *Пусть* $\mu \times m$ — *размер матрицы* $\mathscr{B}(i\xi)$. *Предположим, что существует вектор* $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_\mu)$, $0 \le \beta_j < 1$, *такой, что*

$$b_{j,r}(c^\alpha i\xi) = c^{\beta_j} b_{j,r}(i\xi), \quad c > 0,\ j = 1, \dots, \mu,\ r = 1, \dots, m.$$

Условие 5. *Краевая задача* (1.1) *удовлетворяет условию Лопатинского, т. е. при любом* $x^0 \in \overline{\mathbb{R}}_n^+$ *краевая задача на полуоси*

$$\mathscr{L}(x^0; is, D_{x_n})v = 0,\ x_n > 0, \quad \mathscr{B}(is, D_{x_n})v|_{x_n=0} = \varphi, \quad \sup_{x_n>0} |v| < \infty, \tag{2.2}$$

при $s \in \mathbb{R}_{n-1} \backslash \{0\}$ *однозначно разрешима для любых* φ.

Условиям 1, 2 удовлетворяют, например, однородные эллиптические операторы, параболические операторы и др. (см. [3]).

В дальнейшем будем использовать обозначения

$$l = (1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n), \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad \alpha_{\min} = \min\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \quad 1/p + 1/p' = 1.$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $|\alpha| > p'$ *и* $F(x) \in L_p(\mathbb{R}_n^+) \cap L_1(\mathbb{R}_n^+)$. *Тогда если коэффициенты оператора* $\mathscr{L}(x; D_x)$ *достаточно мало отличаются от постоянных, то краевая задача* (1.1) *однозначно разрешима в соболевском пространстве* $W_p^l(\mathbb{R}_n^+)$ *и для решения* $U(x)$ *справедлива оценка*

$$\left\| U(x), W_p^l(\mathbb{R}_n^+) \right\| \le c(\|F(x), L_p(\mathbb{R}_n^+)\| + \|F(x), L_1(\mathbb{R}_n^+)\|) \tag{2.3}$$

с константой $c > 0$, *не зависящей от* $F(x)$.

Теорема 2. *Пусть* $|\alpha|/p'+\alpha_{\min} > 1 \geq |\alpha|/p'$ *и* $F(x) \in L_p(\mathbb{R}_n^+)$, $(1+|x|)F(x) \in L_1(\mathbb{R}_n^+)$. *Предположим, что*

$$\int\limits_{\Gamma(s)} \mathscr{B}(is,i\lambda)\mathscr{L}^{-1}(x^0;is,i\lambda)d\lambda \equiv 0, \quad s \in \mathbb{R}_{n-1}\backslash\{0\},\ x^0 \notin K, \tag{2.4}$$

где $\Gamma(s)$ *— контур в комплексной плоскости, охватывающий все корни уравнения* (2.1). *Тогда если коэффициенты оператора* $\mathscr{L}(x;D_x)$ *достаточно мало отличаются от постоянных, то краевая задача* (1.1) *однозначно разрешима в* $W_p^l(\mathbb{R}_n^+)$ *и для решения справедлива оценка*

$$\left\|U(x), W_p^l(\mathbb{R}_n^+)\right\| \leq c(\|F(x), L_p(\mathbb{R}_n^+)\| + \|(1+|x|)F(x), L_1(\mathbb{R}_n^+)\|) \tag{2.5}$$

с константой $c > 0$, *не зависящей от* $F(x)$.

Теорема 1 обобщает результат [1], установленный для систем с постоянными коэффициентами. Отметим, что ограничение $|\alpha| > p'$ существенно. Как показано в [5], в скалярном случае при $|\alpha| \leq p'$ краевая задача может быть неразрешимой в $W_p^l(\mathbb{R}_n^+)$, и для ее разрешимости правая часть уравнения должна удовлетворять некоторым условиям ортогональности вида (1.2). Аналогичный результат может быть установлен в векторном случае. В работе [2] при $|\alpha| \leq p'$ для квазиэллиптических систем установлены достаточные условия разрешимости вида (1.2). Можно доказать, что при нарушении условия (2.4), как и в скалярном случае, краевая задача (1.1), вообще говоря, не будет иметь решений $U(x) \in W_p^l(\mathbb{R}_n^+)$ даже в случае $F(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n^+)$. В связи с этим подчеркнем, что утверждение о разрешимости задачи (1.1) при $|\alpha| \leq p'$ доказано при выполнении достаточно жесткого условия (2.4) на граничный оператор $\mathscr{B}(D_x)$.

В качестве примера, иллюстрирующего теоремы 1, 2, рассмотрим первую и вторую краевые задачи теории упругости для системы уравнений Навье [6]:

$$\mathscr{L}(D_x)U = F(x),\ x \in \mathbb{R}_3^+, \quad \mathscr{B}(D_x)U|_{x_3=0} = 0,$$

где

$$\mathscr{L}(D_x) = \begin{pmatrix} \mu\Delta + (\lambda+\mu)D_{x_1}^2 & (\lambda+\mu)D_{x_1x_2}^2 & (\lambda+\mu)D_{x_1x_3}^2 \\ (\lambda+\mu)D_{x_1x_2}^2 & \mu\Delta + (\lambda+\mu)D_{x_2}^2 & (\lambda+\mu)D_{x_2x_3}^2 \\ (\lambda+\mu)D_{x_1x_3}^2 & (\lambda+\mu)D_{x_2x_3}^2 & \mu\Delta + (\lambda+\mu)D_{x_3}^2 \end{pmatrix},$$

$U = (u_1,u_2,u_3)^T$ — вектор смещения, $F(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$ — вектор массовой силы, λ, μ — постоянные Ламе, $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$, Δ — оператор Лапласа по x.

Для первой краевой задачи граничный оператор тождественный, т. е. $\mathscr{B}(D_x) = I$, а для второй краевой задачи оператор $\mathscr{B}(D_x)$ имеет вид

$$\mathscr{B}(D_x) = \begin{pmatrix} \mu D_{x_3} & 0 & \mu D_{x_1} \\ 0 & \mu D_{x_3} & \mu D_{x_2} \\ \lambda D_{x_1} & \lambda D_{x_2} & (\lambda+2\mu)D_{x_3} \end{pmatrix}.$$

Операторы $\mathscr{L}(D_x)$ и $\mathscr{B}(D_x)$ удовлетворяют условиям 1–5. Оператор $\mathscr{L}(i\xi)$ эллиптический, для него $\det\mathscr{L}(i\xi) = -\mu^2(\lambda+2\mu)|\xi|^6$, $\xi = (s,\xi_3)$, вектор однородности $\alpha = (1/2, 1/2, 1/2)$.

Из теоремы 1 следует, что первая и вторая краевые задачи однозначно разрешимы в соболевском пространстве $W_p^2(\mathbb{R}_3^+)$ при $p > 3$ для любой вектор-функции $F(x) \in L_p(\mathbb{R}_3^+) \cap L_1(\mathbb{R}_3^+)$. При $p \leq 3$ это, вообще говоря, неверно.

Однако для первой краевой задачи выполнено условие (2.4). Действительно, поскольку

$$\mathscr{B}(is,i\xi_3)\mathscr{L}^{-1}(is,i\xi_3)=\frac{1}{\mu(\lambda+2\mu)}\frac{1}{|\xi|^4}$$
$$\times\begin{pmatrix}(\lambda+\mu)s_1^2-(\lambda+2\mu)|\xi|^2 & (\lambda+\mu)s_1s_2 & (\lambda+\mu)s_1\xi_3\\ (\lambda+\mu)s_1s_2 & (\lambda+\mu)s_2^2-(\lambda+2\mu)|\xi|^2 & (\lambda+\mu)s_2\xi_3\\ (\lambda+\mu)s_1\xi_3 & (\lambda+\mu)s_2\xi_3 & (\lambda+\mu)\xi_3^2-(\lambda+2\mu)|\xi|^2\end{pmatrix},$$

для контура $\Gamma(s)$, охватывающего корни уравнения $\det\mathscr{L}(is,i\xi_3)=0$, справедливо тождество

$$\int\limits_{\Gamma(s)}\mathscr{B}(is,i\xi_3)\mathscr{L}^{-1}(is,i\xi_3)\,d\xi_3\equiv 0,\quad s\in\mathbb{R}_2\backslash\{0\}.$$

Поэтому из теоремы 2 следует однозначная разрешимость этой задачи в $W_p^2(\mathbb{R}_3^+)$ при $3\ge p>3/2$ для любой вектор-функции $F(x)\in L_p(\mathbb{R}_3^+)$, $(1+|x|)F(x)\in L_1(\mathbb{R}_3^+)$.

Доказательство теорем основано на использовании построенной в работе [1] конструкции приближенного решения краевой задачи (1.1) для системы с постоянными коэффициентами. В следующем параграфе мы приведем эту конструкцию.

§ 3. Приближенные решения задачи для системы с постоянными коэффициентами

Пусть $x^0\notin K$. Рассмотрим краевую задачу для квазиэллиптической системы с постоянными коэффициентами:

$$\mathscr{L}(x^0;D_x)U=F(x),\ x\in\mathbb{R}_n^+,\quad \mathscr{B}(D_x)U|_{x_n=0}=0.\tag{3.1}$$

Предположим, что $F(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}_n^+)$. Обозначим через $\widetilde{F}(s,x_n)$ преобразование Фурье вектор-функции $F(x',x_n)$ по x'.

Рассмотрим краевую задачу на полуоси для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром $s\in\mathbb{R}_{n-1}\backslash\{0\}$:

$$\mathscr{L}(x^0;is,D_{x_n})\omega=\widetilde{F}(s,x_n),\ x_n>0,\quad \mathscr{B}(is,D_{x_n})\omega|_{x_n=0}=0,\quad \sup_{x_n>0}|\omega|<\infty.\tag{3.2}$$

В силу условия Лопатинского эта задача однозначно разрешима. Ее решение можно представить в виде

$$\omega(s,x_n)=\omega_0(s,x_n)+v(s,x_n),\tag{3.3}$$

где $\omega_0(s,x_n)$ — ограниченное решение системы

$$\mathscr{L}(x^0;is,D_{x_n})\omega=\widetilde{F}(s,x_n),\quad x_n>0,$$

и вектор-функция $v(s,x_n)$ — решение задачи (2.2) с $\varphi=-\mathscr{B}(is,D_{x_n})\omega_0(s,0)$.

Введем обозначения $a(is,i\lambda)=\det\mathscr{L}(x^0;is,i\lambda)$, $\widetilde{\mathscr{L}}(is,i\lambda)$ — взаимная матрица к $\mathscr{L}(x^0;is,i\lambda)$. Для достаточно гладких вектор-функций $\omega(x_n)$, очевидно, справедливо тождество

$$\mathscr{L}(x^0;is,D_{x_n})\widetilde{\mathscr{L}}(is,D_{x_n})\omega(x_n)\equiv a(is,D_{x_n})\omega(x_n).$$

Уравнение (2.1) не имеет вещественных корней, поэтому при $s \in \mathbb{R}_{n-1} \backslash \{0\}$ краевая задача на числовой оси

$$a(is, D_{x_n})u = g(x_n), \ -\infty < x_n < \infty, \quad \sup_{-\infty < x_n < \infty} |u| < \infty, \tag{3.4}$$

имеет единственное решение для любой ограниченной $g(x_n) \in C(\mathbb{R}_1)$. Следовательно, используя формулу решения задачи (3.4) (см., например, [7, гл. 1]), в качестве $\omega_0(s, x_n)$ можно взять следующую ограниченную вектор-функцию:

$$\omega_0(s, x_n) = \widetilde{\mathscr{L}}(is, D_{x_n}) R\widetilde{F}(s, x_n), \tag{3.5}$$

где

$$R\widetilde{F}(s, x_n) = \int\limits_0^{x_n} J_+(s, x_n - y_n)\widetilde{F}(s, y_n)\, dy_n + \int\limits_{x_n}^{\infty} J_-(s, x_n - y_n)\widetilde{F}(s, y_n)\, dy_n,$$

$$J_+(s, x_n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma^+} \frac{\exp(ix_n\lambda)}{a(is, i\lambda)}\, d\lambda, \quad J_-(s, x_n) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma^-} \frac{\exp(ix_n\lambda)}{a(is, i\lambda)}\, d\lambda. \tag{3.6}$$

При этом контур $\Gamma^+ = \Gamma^+(s)$ охватывает все корни уравнения (2.1), лежащие в верхней полуплоскости, а контур $\Gamma^- = \Gamma^-(s)$ — корни, лежащие в нижней полуплоскости.

Пусть $\{\omega_1(s, x_n), \dots, \omega_\mu(s, x_n)\}$ — *канонический базис* краевой задачи (2.2), т. е. каждая вектор-функция $\omega_j(s, x_n)$ является решением (2.2) с единичным граничным вектором $\varphi = e_j$, j-я компонента которого равна 1. Тогда вектор-функцию $v(s, x_n)$ из (3.3) можно представить следующим образом:

$$v(s, x_n) = \sum_{j=1}^{\mu} \varphi_j(s)\omega_j(s, x_n), \tag{3.7}$$

где $\varphi(s) = -\mathscr{B}(is, D_{y_n})\omega_0(s, y_n)|_{y_n=0}$.

Используя формулы (3.3), (3.5), (3.7), получим представление решения краевой задачи (3.2) в виде

$$\omega(s, x_n) = \widetilde{\mathscr{L}}(is, D_{x_n}) R\widetilde{F}(s, x_n) + \sum_{j=1}^{\mu} \varphi_j(s)\omega_j(s, x_n), \tag{3.8}$$

где $\varphi(s) = -\mathscr{B}(is, D_{y_n})\widetilde{\mathscr{L}}(is, D_{y_n}) R\widetilde{F}(s, y_n)|_{y_n=0}$.

Перейдем теперь к построению решения краевой задачи (3.1). Применяя обратный оператор Фурье по s к вектор-функции (3.8), можно получить формальное решение задачи (3.1). Однако по аналогии с [5, 7] можно показать, что контурные интегралы (3.6) и компоненты канонического базиса краевой задачи (2.2) имеют, вообще говоря, неинтегрируемые особенности при $s = 0$. Поэтому для получения формулы решения задачи (3.1) необходимо регуляризовать обратный оператор Фурье. Для этой цели мы используем интегральное представление С. В. Успенского [8] для функций $\varphi(x') \in L_p(\mathbb{R}_{n-1})$:

$$\varphi(x') = \lim_{k \to \infty} (2\pi)^{1-n} \int\limits_{1/k}^{k} \frac{1}{v} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp(i(x' - y')s) G(sv^{\alpha'}) \varphi(y')\, ds dy' dv, \tag{3.9}$$

где

$$G(s) = 2N\langle s\rangle^{2N}\exp(-\langle s\rangle^{2N}), \quad \langle s\rangle^2 = \sum_{i=1}^{n-1} s_i^{2/\alpha_i},$$

и предел понимается в смысле сходимости в $L_p(\mathbb{R}_{n-1})$ (см. [7, гл. 1]). Напомним, что натуральное число N можно взять сколь угодно большим.

По аналогии с [1, 7] вводим вектор-функцию

$$U_k(x) = (2\pi)^{-(n-1)/2}\int\limits_{1/k}^{k}\frac{1}{v}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}\exp(ix's)G(sv^{\alpha'})\omega(s,x_n)\,dsdv, \tag{3.10}$$

где вектор-функция $\omega(s, x_n)$ определена в (3.8). Из предыдущих рассуждений вытекает, что

$$\mathscr{L}(x^0; D_x)U_k(x) = F_k(x),\ x\in\mathbb{R}_n^+, \quad \mathscr{B}(D_x)U_k(x',0) = 0,$$

где

$$F_k(x) = (2\pi)^{1-n}\int\limits_{1/k}^{k}\frac{1}{v}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}\exp(i(x'-y')s)G(sv^{\alpha'})F(y',x_n)\,dsdy'dv.$$

Следовательно, в силу (3.9) вектор-функцию $U_k(x)$ можно рассматривать в качестве приближенного решения краевой задачи (3.1).

При получении оценок L_p-норм вектор-функции $U_k(x)$ существенно используется следующая

Лемма 1. *При $x_n > 0$ и $s\in\mathbb{R}_{n-1}\backslash\{0\}$ для любых γ_n, $\kappa = (\kappa_1,\ldots,\kappa_{n-1})$ справедливы оценки*

$$\left|D_{x_n}^{\gamma_n}D_s^{\kappa}\widetilde{\mathscr{L}}(is, D_{x_n})J_+(s,x_n)\right| \le c\langle s\rangle^{(\gamma_n+1)\alpha_n-\kappa\alpha'-1}\exp\left(-\delta x_n\langle s\rangle^{\alpha_n}\right),$$

$$\left|D_{x_n}^{\gamma_n}D_s^{\kappa}\widetilde{\mathscr{L}}(is, D_{x_n})J_-(s,-x_n)\right| \le c\langle s\rangle^{(\gamma_n+1)\alpha_n-\kappa\alpha'-1}\exp\left(-\delta x_n\langle s\rangle^{\alpha_n}\right),$$

$$\left|D_{x_n}^{\gamma_n}D_s^{\kappa}\omega_j(s,x_n)\right| \le c\langle s\rangle^{\gamma_n\alpha_n-\kappa\alpha'-\beta_j}\exp\left(-\delta x_n\langle s\rangle^{\alpha_n}\right),$$

где c, $\delta > 0$ — константы.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 4.2 [7, гл. 4].

§ 4. Разрешимость краевой задачи при $|\alpha| > p'$

Вначале проведем доказательство теоремы 1.

Из работы [1] вытекает, что при $|\alpha| > p'$ для любой $F(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}_n^+)$ последовательность вектор-функций (3.10) сходится в соболевском пространстве $W_p^l(\mathbb{R}_n^+)$ к вектор-функции $U(x)$, являющейся решением краевой задачи (3.1). При этом для нее выполнена оценка (2.3) с константой $c > 0$, не зависящей от $F(x)$. Поэтому в силу плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}_n^+)$ в $L_p(\mathbb{R}_n^+)\cap L_1(\mathbb{R}_n^+)$ краевая задача (3.1) разрешима в $W_p^l(\mathbb{R}_n^+)$ при любой правой части $F(x)\in L_p(\mathbb{R}_n^+)\cap L_1(\mathbb{R}_n^+)$. Очевидно, решение определено однозначно.

Следовательно, используя описанную в § 3 конструкцию, при $|\alpha| > p'$ можно представить решение краевой задачи (3.1) в виде

$$U(x) = R(x^0)F(x), \tag{4.1}$$

где $R(x^0) : L_p(\mathbb{R}_n^+) \cap L_1(\mathbb{R}_n^+) \to W_p^l(\mathbb{R}_n^+)$ — линейный непрерывный оператор. Используем этот оператор для построения решения исходной задачи (1.1).

Будем искать решение задачи (1.1) в виде $U(x) = R(x^0)f(x)$ с неизвестной вектор-функцией $f(x)$. Подставляя в систему и граничные условия (1.1), имеем

$$\mathscr{L}(x;D_x)R(x^0)f(x) = f(x) - (\mathscr{L}(x^0;D_x) - \mathscr{L}(x;D_x))R(x^0)f(x) = F(x),\ x \in \mathbb{R}_n^+,$$

$$\mathscr{B}(D_x)R(x^0)f(x)|_{x_n=0} = 0.$$

Следовательно, чтобы получить решение задачи (1.1), нужно найти вектор-функцию $f(x)$ из уравнения

$$f(x) - Tf(x) = F(x), \tag{4.2}$$

где оператор T имеет вид $T = (\mathscr{L}(x^0;D_x) - \mathscr{L}(x;D_x))R(x^0)$.

Обозначим через $\tilde{l}_{j,r}(x;i\xi)$ элементы матрицы $(\mathscr{L}(x^0;i\xi) - \mathscr{L}(x;i\xi))$, являющейся символом дифференциального оператора $(\mathscr{L}(x^0;D_x) - \mathscr{L}(x;D_x))$. В силу условия 3 $\tilde{l}_{j,r}(x;i\xi) \equiv 0$ при $x \notin K$. Поэтому если мы установим оценку

$$\|Tf(x), L_p(\mathbb{R}_n^+)\| \le q\|f(x), L_p(\mathbb{R}_n^+)\|, \quad q < 1, \tag{4.3}$$

то уравнение (4.2) будет однозначно разрешимо. При этом

$$f(x) = (I - T)^{-1}F(x) \in L_p(\mathbb{R}_n^+) \cap L_1(\mathbb{R}_n^+) \tag{4.4}$$

и выполнены оценки

$$\|f(x), L_p(\mathbb{R}_n^+)\| \le \frac{1}{1-q}\|F(x), L_p(\mathbb{R}_n^+)\|, \tag{4.5}$$

$$\|f(x), L_1(\mathbb{R}_n^+)\| \le \|F(x), L_1(\mathbb{R}_n^+)\| + c(K,q)\|F(x), L_p(\mathbb{R}_n^+)\|, \tag{4.6}$$

где $c(K,q) > 0$ — константа, зависящая от коэффициентов оператора $\mathscr{L}(x;D_x)$, компакта K и q.

Доказательство неравенства (4.3) основано на использовании вытекающего из [1] неравенства

$$\big\|R(x^0)f(x), L_p^l(\mathbb{R}_n^+)\big\| \le c\|f(x), L_p(\mathbb{R}_n^+)\|, \tag{4.7}$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от $f(x)$. Отсюда, учитывая условия 1, 3 и вид оператора T, получаем, что если коэффициенты оператора $\mathscr{L}(x;D_x)$ достаточно мало отличаются от постоянных, то действительно имеет место оценка (4.3).

Следует отметить, что неравенство (4.7) справедливо при любых $|\alpha| > 0$.

Итак, разрешимость уравнения (4.2) и справедливость неравенств (4.5), (4.6) установлены. Следовательно, в силу (4.4) и свойств оператора $R(x^0)$ вектор-функция $U(x) = R(x^0)(I-T)^{-1}F(x) \in W_p^l(\mathbb{R}_n^+)$ является решением исходной задачи (1.1) и для него имеет место неравенство (2.3).

Для доказательства единственности решения в $W_p^l(\mathbb{R}_n^+)$ рассмотрим краевую задачу

$$\mathscr{L}(x;D_x)U = 0,\ x \in \mathbb{R}_n^+, \quad \mathscr{B}(D_x)U|_{x_n=0} = 0.$$

Перепишем ее в виде

$$\mathscr{L}(x^0;D_x)U = \mathscr{L}(x^0;D_x)U - \mathscr{L}(x;D_x)U,\ x \in \mathbb{R}_n^+, \quad \mathscr{B}(D_x)U|_{x_n=0} = 0.$$

Поскольку коэффициенты оператора $(\mathscr{L}(x^0;D_x)-\mathscr{L}(x;D_x))$ финитные, в силу условия 1 для решения $U(x)\in W_p^l(\mathbb{R}_n^+)$ имеем

$$(\mathscr{L}(x^0;D_x)U-\mathscr{L}(x;D_x)U)\in L_p(\mathbb{R}_n^+)\cap L_1(\mathbb{R}_n^+).$$

Отсюда, поскольку для систем с постоянными коэффициентами неравенство (2.3) доказано [1], получаем

$$\big\|U(x),W_p^l(\mathbb{R}_n^+)\big\|\le\varepsilon\big\|U(x),W_p^l(\mathbb{R}_n^+)\big\|,$$

где $\varepsilon>0$ зависит от коэффициентов оператора $(\mathscr{L}(x^0;D_x)-\mathscr{L}(x;D_x))$ и компакта K. Поэтому если коэффициенты оператора $\mathscr{L}(x;D_x)$ достаточно мало отличаются от постоянных, то $\big\|U(x),W_p^l(\mathbb{R}_n^+)\big\|=0$. Отсюда $U(x)=0$. Следовательно, при $|\alpha|>p'$ краевая задача (1.1) однозначно разрешима.

Теорема 1 доказана.

§ 5. Разрешимость краевой задачи при $|\alpha|\le p'$

Из предыдущих рассуждений следует, что для доказательства теоремы 2 вначале нужно изучить случай с постоянными коэффициентами, т. е. доказать однозначную разрешимость краевой задачи (3.1).

При доказательстве разрешимости задачи (3.1), как и в [1], основной сложностью является получение L_p-оценок приближенных решений $U_k(x)$. Для этого перепишем формулу (3.10) в виде

$$U_k(x)=U_{k,1}(x)+U_{k,2}(x),\tag{5.1}$$

где

$$U_{k,1}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int\limits_{1/k}^{1}\frac{1}{v}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}\exp{(ix's)}G(sv^{\alpha'})\times\left(\widetilde{\mathscr{L}}(is,D_{x_n})R\widetilde{F}(s,x_n)+\sum_{j=1}^{\mu}\varphi_j(s)\omega_j(s,x_n)\right)ds\,dv,$$

$$U_{k,2}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int\limits_{1}^{k}\frac{1}{v}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}\exp{(ix's)}G(sv^{\alpha'})\widetilde{\mathscr{L}}(is,D_{x_n})R\widetilde{F}(s,x_n)\,ds\,dv$$
$$+\sum_{j=1}^{\mu}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int\limits_{1}^{k}\frac{1}{v}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}\exp{(ix's)}G(sv^{\alpha'})\int\limits_{0}^{\infty}\omega_j(s,x_n)W_j(s,y_n)\widetilde{F}(s,y_n)\,dy_n\,ds\,dv,$$

$$W_j(s,y_n)=-\mathscr{B}_j(is,D_{z_n})\widetilde{\mathscr{L}}(is,D_{z_n})J_-(s,z_n-y_n)|_{z_n=0},$$
$$\mathscr{B}_j(i\zeta)=(b_{j,1}(i\zeta),\dots,b_{j,m}(i\zeta)).$$

В дальнейшем будем считать, что показатель N в определении функции $G(s)$ достаточно большой.

Из работы [1] вытекает следующее неравенство:

$$\|U_{k,1}(x),L_p(\mathbb{R}_n^+)\|\le c\|F(x),L_p(\mathbb{R}_n^+)\|,\tag{5.2}$$

где константа $c>0$ не зависит от $F(x)$, k.

Для проведения L_p-оценок второго слагаемого из (5.1) преобразуем его, используя условие (2.4).

При $x_n > 0$, $s \in \mathbb{R}_{n-1} \backslash \{0\}$ определим матрицы

$$\Omega^1(s, x_n, y_n) = \widetilde{\mathscr{L}}(is, D_{x_n}) J_+(s, x_n - y_n) + \sum_{j=1}^{\mu} \omega_j(s, x_n) W_j(s, y_n),$$

$$\Omega^2(s, x_n, y_n) = \widetilde{\mathscr{L}}(is, D_{x_n}) J_-(s, x_n - y_n) + \sum_{j=1}^{\mu} \omega_j(s, x_n) W_j(s, y_n).$$

Из определения контурных интегралов (3.6), $\omega_j(s, x_n)$, $W_j(s, 0)$ при $s \in \mathbb{R}_{n-1} \backslash \{0\}$ получаем

$$\mathscr{B}(is, D_{x_n}) \Omega^1(s, x_n, 0)|_{x_n=0} = \mathscr{B}(is, D_{x_n}) \widetilde{\mathscr{L}}(is, D_{x_n}) J_+(s, x_n)|_{x_n=0}$$
$$+ \sum_{j=1}^{\mu} e_j W_j(s, 0) = \mathscr{B}(is, D_{x_n}) \widetilde{\mathscr{L}}(is, D_{x_n}) J_+(s, x_n)|_{x_n=0} + \begin{pmatrix} W_1(s,0) \\ \vdots \\ W_\mu(s,0) \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma(s)} \mathscr{B}(is, i\lambda) \mathscr{L}^{-1}(x^0; is, i\lambda) d\lambda.$$

Следовательно, учитывая условие (2.4), имеем $\mathscr{B}(is, D_{x_n}) \Omega^1(s, x_n, 0)|_{x_n=0} = 0$. Тогда в силу определения контурных интегралов $\widetilde{\mathscr{L}}(is, D_{x_n}) J_+(s, x_n)$, $\omega_j(s, x_n)$ матрица $\Omega^1(s, x_n, 0)$ при $s \in \mathbb{R}_{n-1} \backslash \{0\}$ является решением краевой задачи

$$\mathscr{L}(x^0; is, D_{x_n}) \Omega^1 = 0, \ x_n > 0, \quad \mathscr{B}(is, D_{x_n}) \Omega^1|_{x_n=0} = 0, \quad \sup_{x_n > 0} \|\Omega^1\| < \infty.$$

Отсюда в силу условия 5 получаем $\Omega^1(s, x_n, 0) \equiv 0$. Поскольку $\Omega^2(s, 0, 0) \equiv \Omega^1(s, 0, 0)$, то $\Omega^2(s, 0, 0) \equiv 0$.

Используя полученные тождества, компоненты вектор-функции $U_{k,2}(x)$ можно представить в виде

$$U_{k,2}^r(x) = \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_1^k \frac{1}{v} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp(ix's) G(sv^{\alpha'}) \int\limits_0^{x_n} \Omega_{rl}^1(s, x_n, y_n) \widetilde{F}_l(s, y_n)\, dy_n ds dv$$
$$+ \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_1^k \frac{1}{v} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp(ix's) G(sv^{\alpha'}) \int\limits_{x_n}^{\infty} \Omega_{rl}^2(s, x_n, y_n) \widetilde{F}_l(s, y_n)\, dy_n ds dv$$
$$= \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_1^k \frac{1}{v} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp(ix's) G(sv^{\alpha'}) \int\limits_0^{x_n} \Omega_{rl}^1(s, x_n, y_n) [\widetilde{F}_l(s, y_n) - \widetilde{F}_l(0, y_n)]\, dy_n ds dv$$
$$+ \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_1^k \frac{1}{v} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp(ix's) G(sv^{\alpha'})$$
$$\times \int\limits_0^{x_n} \left[\Omega_{rl}^1(s, x_n, y_n) - \Omega_{rl}^1(s, x_n, 0)\right] \widetilde{F}_l(0, y_n)\, dy_n ds dv$$

$$+\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_{1}^{k}\frac{1}{v}\int_{\mathbb{R}_{n-1}}\exp{(ix's)}G(sv^{\alpha'})$$

$$\times\int_{x_n}^{\infty}\bigl[\Omega^2_{rl}(s,x_n,y_n)-\Omega^2_{rl}(s,0,y_n)\bigr]\widetilde{F}_l(s,y_n)\,dy_n ds dv$$

$$+\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_{1}^{k}\frac{1}{v}\int_{\mathbb{R}_{n-1}}\exp{(ix's)}G(sv^{\alpha'})\int_{x_n}^{\infty}\bigl[\Omega^2_{rl}(s,0,y_n)-\Omega^2_{rl}(s,0,0)\bigr]\widetilde{F}_l(s,y_n)\,dy_n ds dv$$

$$=\sum_{l=1}^{m}\Phi^1_{krl}(x)+\sum_{l=1}^{m}\Phi^2_{krl}(x)+\sum_{l=1}^{m}\Phi^3_{krl}(x)+\sum_{l=1}^{m}\Phi^4_{krl}(x). \quad (5.3)$$

Проведем оценки четырех слагаемых (5.3) отдельно.

Лемма 2. *Имеет место оценка*

$$\bigl\|\Phi^1_{krl}(x),L_p(\mathbb{R}^+_n)\bigr\|\le c\|(1+|x|)F_l(x),L_1(\mathbb{R}^+_n)\| \quad (5.4)$$

где константа $c>0$ не зависит от $F(x)$ и k.

Доказательство. Используя лемму Адамара и определение $\Omega^1_{rl}(s,x_n,y_n)$, представим $\Phi^1_{krl}(x)$ в виде

$$\Phi^1_{krl}(x)=\Phi^{11}_{krl}(x)+\sum_{j=1}^{\mu}\Phi^{12}_{krlj}(x), \quad (5.5)$$

где

$$\Phi^{11}_{krl}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_{1}^{k}\frac{1}{v}\int_{\mathbb{R}_{n-1}}\exp{(ix's)}G(sv^{\alpha'})\int_{0}^{\infty}[\theta(x_n-y_n)\widetilde{\mathscr{L}_{rl}}(is,D_{x_n})$$

$$\circ J_+(s,x_n-y_n)]\left(\sum_{q=1}^{n-1}\int_{0}^{1}s_qD_{\xi_q}\widetilde{F}_l(\xi,y_n)|_{\xi=\lambda s}d\lambda\right)dy_n ds dv,$$

$$\Phi^{12}_{krlj}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_{1}^{k}\frac{1}{v}\int_{\mathbb{R}_{n-1}}\exp{(ix's)}G(sv^{\alpha'})\int_{0}^{x_n}\omega^r_j(s,x_n)W_{jl}(s,y_n)$$

$$\times\left(\sum_{q=1}^{n-1}\int_{0}^{1}s_qD_{\xi_q}\widetilde{F}_l(\xi,y_n)|_{\xi=\lambda s}d\lambda\right)dy_n ds dv.$$

Оценим первое слагаемое из (5.5). В силу неравенств Минковского и Юнга получим

$$\bigl\|\Phi^{11}_{krl}(x),L_p(\mathbb{R}^+_n)\bigr\|\le c_1\sum_{q=1}^{n-1}\int_{0}^{1}\int_{1}^{k}\frac{1}{v}\Bigl\|\int_{\mathbb{R}_n}\int_{\mathbb{R}_{n-1}}\exp{(i(x'-\lambda y')s)}G(sv^{\alpha'})\theta(x_n-y_n)$$

$$\times\widetilde{\mathscr{L}_{rl}}(is,D_{x_n})J_+(s,x_n-y_n)s_q\,ds(-iy_q)F_l(y)\theta(y_n)\,dy,L_p(\mathbb{R}_n)\Bigr\|\,dvd\lambda$$

$$\leq c_1 \sum_{q=1}^{n-1} \int_1^k \frac{1}{v} \Big\| \int_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp(ix's) G(sv^{\alpha'}) \theta(x_n) \widetilde{\mathscr{L}_{rl}}(is, D_{x_n}) J_+(s, x_n) s_q \, ds, L_p(\mathbb{R}_n) \Big\| \, dv$$

$$\times \|x_q F_l(x), L_1(\mathbb{R}_n^+)\| \leq c_1 \sum_{q=1}^{n-1} \int_1^k \frac{1}{v} \|K_{rlq}^+(v, x), L_p(\mathbb{R}_n)\| dv \|x_q F_l(x), L_1(\mathbb{R}_n^+)\|,$$

где

$$K_{rlq}^+(v, x) = \int_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp(ix's) G(sv^{\alpha'}) \theta(x_n) \widetilde{\mathscr{L}_{rl}}(is, D_{x_n}) J_+(s, x_n) s_q \, ds.$$

Поскольку $K_{rlq}^+(v, x) = v^{(1-|\alpha|-\alpha_q)} K_{rlq}^+(1, xv^{-\alpha})$, то

$$\|K_{rlq}^+(v, x), L_p(\mathbb{R}_n)\| = v^{(1-|\alpha|/p'-\alpha_q)} \|K_{rlq}^+(1, x), L_p(\mathbb{R}_n)\|.$$

Отсюда

$$\left\|\Phi_{krl}^{11}(x), L_p(\mathbb{R}_n^+)\right\| \leq c_1 \sum_{q=1}^{n-1} \int_1^k v^{-1+(1-|\alpha|/p'-\alpha_q)} dv$$

$$\times \|K_{rlq}^+(1, x), L_p(\mathbb{R}_n)\| \|x_q F_l(x), L_1(\mathbb{R}_n^+)\|.$$

По условию имеем $1 - |\alpha|/p' - \alpha_q < 0$, значит, при $k \to \infty$ интеграл сходится.

Повторяя рассуждения из [5], нетрудно показать, что если в определении функции $G(s)$ взять показатель N достаточно большим, то, пользуясь леммой 1, получим $\|K_{rlq}^+(1, x), L_p(\mathbb{R}_n)\| \leq c < \infty$. Следовательно,

$$\left\|\Phi_{krl}^{11}(x), L_p(\mathbb{R}_n^+)\right\| \leq c_2 \sum_{q=1}^{n-1} \|x_q F_l(x), L_1(\mathbb{R}_n^+)\|. \tag{5.6}$$

При получении L_p-оценок функции $\Phi_{krlj}^{12}(x)$ из (5.5) нам понадобится неравенство

$$\left|D_{x_n}^{\gamma_n} D_s^{\kappa} W_j(s, x_n)\right| \leq c \langle s \rangle^{(\gamma_n+1)\alpha_n - \kappa\alpha' + \beta_j - 1} \exp(-\delta x_n \langle s \rangle^{\alpha_n}), \quad c, \delta > 0, \ x_n > 0, \tag{5.7}$$

доказательство которого аналогично [7, гл. 4]. Используя эту оценку и повторяя рассуждения из доказательства леммы 2^0 в [5, § 4], будем иметь

$$\left\|\Phi_{krlj}^{12}(x), L_p(\mathbb{R}_n^+)\right\| \leq c \sum_{q=1}^{n-1} \|x_q F_l(x), L_1(\mathbb{R}_n^+)\|,$$

где константа $c > 0$ не зависит от $F(x)$ и k.

Учитывая это неравенство и (5.6), получаем (5.4). Лемма доказана.

Лемма 3. *Имеет место оценка*

$$\left\|\Phi_{krl}^{2}(x), L_p(\mathbb{R}_n^+)\right\| \leq c \|x_n F_l(x), L_1(\mathbb{R}_n^+)\|, \tag{5.8}$$

где константа $c > 0$ не зависит от $F(x)$ и k.

Доказательство. Используя лемму Адамара, представим функцию $\Phi_{krl}^2(x)$ из (5.3) в виде

$$\Phi_{krl}^2(x) = \Phi_{krl}^{21}(x) + \sum_{j=1}^{\mu} \Phi_{krlj}^{22}(x), \tag{5.9}$$

где

$$\Phi^{21}_{krl}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int\limits_1^k \frac{1}{v}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp{(ix's)}G(sv^{\alpha'})$$

$$\times\int\limits_0^\infty y_n\int\limits_0^1 \theta(x_n-y_n)D_{x_n}\widetilde{\mathscr{L}_{rl}}(is,D_{x_n})J_+(s,x_n-\lambda y_n)d\lambda\widetilde{F}_l(0,y_n)\,dy_n ds dv,$$

$$\Phi^{22}_{krlj}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int\limits_1^k \frac{1}{v}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp{(ix's)}G(sv^{\alpha'})$$

$$\times\int\limits_0^{x_n}\omega^r_j(s,x_n)\int\limits_0^1 y_nD_{z_n}W_{jl}(s,z_n)|_{z_n=\lambda y_n}d\lambda\widetilde{F}_l(0,y_n)\,dy_n ds dv.$$

Используя неравенства Минковского и Юнга, будем иметь

$$\left\|\Phi^{21}_{krl}(x),L_p(\mathbb{R}^+_n)\right\| \le c_1\int\limits_0^1\int\limits_1^k\frac{1}{v}\bigg\|\int\limits_{\mathbb{R}_1}\bigg[\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}\exp{(ix's)}G(sv^{\alpha'})\theta(x_n-y_n)$$

$$\times D_{x_n}\widetilde{\mathscr{L}_{rl}}(is,D_{x_n})J_+(s,x_n-\lambda y_n)\,ds\bigg]\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}y_nF_l(y)\theta(y_n)dy'\bigg)dy_n,L_p(\mathbb{R}_n)\bigg\|dvd\lambda$$

$$\le c_1\int\limits_1^k\frac{1}{v}\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}\bigg\|\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}\exp{(ix's)}G(sv^{\alpha'})\theta(x_n)D_{x_n}\widetilde{\mathscr{L}_{rl}}(is,D_{x_n})J_+(s,x_n)\,ds,L_p(\mathbb{R})\bigg\|^p$$

$$\times\|x_nF_l(x),L_1(\mathbb{R}^+_n)\|^pdx'\bigg)^{1/p}dv{=}c_1\int\limits_1^k\frac{1}{v}\|K^+_{rln}(v,x),L_p(\mathbb{R}_n)\|\,dv\|x_nF_l(x),L_1(\mathbb{R}^+_n)\|,$$

где

$$K^+_{rln}(v,x)=\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}\exp{(ix's)}G(sv^{\alpha'})\theta(x_n)D_{x_n}\widetilde{\mathscr{L}_{rl}}(is,D_{x_n})J_+(s,x_n)\,ds.$$

Поскольку $K^+_{rln}(v,x)=v^{(1-|\alpha|-\alpha_n)}K^+_{rln}(1,xv^{-\alpha})$, получим

$$\left\|\Phi^{21}_{krl}(x),L_p(\mathbb{R}^+_n)\right\| \le c_2\int\limits_1^k v^{-1+(1-|\alpha|/p'-\alpha_n)}\,dv$$

$$\times\|K^+_{rln}(1,x),L_p(\mathbb{R}_n)\|\|x_nF_l(x),L_1(\mathbb{R}^+_n)\|.$$

По условию имеем $1-|\alpha|/p'-\alpha_n<0$, значит, при $k\to\infty$ интеграл сходится.

Повторяя рассуждения из [5], нетрудно показать, что если в определении функции $G(s)$ взять показатель N достаточно большим, то, используя лемму 1, получим $\|K^+_{rln}(1,x),L_p(\mathbb{R}_n)\|\le c<\infty$. Следовательно,

$$\left\|\Phi^{21}_{krl}(x),L_p(\mathbb{R}^+_n)\right\| \le c_2\|x_nF_l(x),L_1(\mathbb{R}^+_n)\|. \tag{5.10}$$

Для функции Φ^{22}_{krlj} из (5.9), используя неравенство (5.7) и повторяя рассуждения из доказательства леммы 2^0 в [5, § 4], будем иметь

$$\big\|\Phi^{22}_{krlj}(x), L_p(\mathbb{R}^+_n)\big\| \le c\|x_n F_l(x), L_1(\mathbb{R}^+_n)\|,$$

где константа $c > 0$ не зависит от $F(x)$ и k.

Из этой оценки и (5.10) вытекает (5.8). Лемма доказана.

Лемма 4. *Имеет место оценка*

$$\big\|\Phi^{3}_{krl}(x), L_p(\mathbb{R}^+_n)\big\| \le c\|x_n F_l(x), L_1(\mathbb{R}^+_n)\|, \tag{5.11}$$

где константа $c > 0$ не зависит от $F(x)$ и k.

Доказательство. Используя лемму Адамара и определение $\Omega^2_{rl}(s, x_n, y_n)$, представим $\Phi^3_{krl}(x)$ в виде

$$\Phi^3_{krl}(x) = \Phi^{31}_{krl}(x) + \sum_{j=1}^{\mu} \Phi^{32}_{krlj}(x), \tag{5.12}$$

где

$$\Phi^{31}_{krl}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_1^k \frac{1}{v} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp{(ix's)} G(sv^{\alpha'})$$
$$\times \int\limits_{x_n}^{\infty} x_n \int\limits_0^1 D_{z_n} \widetilde{\mathscr{L}_{rl}}(is, D_{z_n}) J_-(s, z_n - y_n)|_{z_n = \lambda x_n} d\lambda \widetilde{F}_l(s, y_n)\, dy_n ds dv,$$

$$\Phi^{32}_{krlj}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_1^k \frac{1}{v} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp{(ix's)} G(sv^{\alpha'})$$
$$\times \int\limits_{x_n}^{\infty} x_n \int\limits_0^1 D_{z_n} \omega^r_j(s, z_n)\big|_{z_n = \lambda x_n} d\lambda W_{jl}(s, y_n) \widetilde{F}_l(s, y_n)\, dy_n ds dv.$$

Оценим первое слагаемое из (5.12). В силу неравенства Минковского, учитывая, что $0 < x_n < y_n < \infty$, $\lambda > 0$, получим

$$\big\|\Phi^{31}_{krl}(x), L_p(\mathbb{R}^+_n)\big\| \le c_1 \int\limits_0^1 \int\limits_1^k \frac{1}{v} \Bigg\| \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \int\limits_{\lambda x_n}^{\infty} \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp{(i(x'-y')s)} G(sv^{\alpha'})$$
$$\times D_{z_n} \widetilde{\mathscr{L}_{rl}}(is, D_{z_n}) J_-(s, z_n - y_n)|_{z_n = \lambda x_n} ds \Bigg| |y_n F_l(y)| \theta(y_n)\, dy_n dy', L_p(\mathbb{R}^+_n) \Bigg\| dv d\lambda$$
$$\le c_1 \int\limits_0^1 \lambda^{-1/p}\, d\lambda \int\limits_1^k \frac{1}{v} \Bigg\| \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \int\limits_{z_n}^{\infty} \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp{(i(x'-y')s)} G(sv^{\alpha'})$$
$$\times D_{z_n} \widetilde{\mathscr{L}_{rl}}(is, D_{z_n}) J_-(s, z_n - y_n)\, ds \Bigg| |y_n F_l(y)| \theta(y_n)\, dy_n dy', L_p(\mathbb{R}_n) \Bigg\| dv.$$

В силу неравенства Юнга имеем

$$\left\|\Phi^{31}_{krl}(x), L_p(\mathbb{R}^+_n)\right\| \le c_2 \int\limits_1^k \frac{1}{v} \|K^-_{rln}(v,x), L_p(\mathbb{R}_n)\| dv \|x_n F_l(x), L_1(\mathbb{R}^+_n)\|,$$

где

$$K^-_{rln}(v,x) = \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp{(ix's)} G(sv^{\alpha'})\theta(-x_n) D_{x_n} \widetilde{\mathscr{L}}_{rl}(is, D_{x_n}) J_-(s,x_n)\, ds.$$

Поскольку $K^-_{rln}(v,x) = v^{(1-|\alpha|-\alpha_n)} K^-_{rln}(1, xv^{-\alpha})$, очевидно, получаем оценку

$$\left\|\Phi^{31}_{krl}(x), L_p(\mathbb{R}^+_n)\right\| \le c_2 \int\limits_1^k v^{-1+(1-|\alpha|/p'-\alpha_n)} dv \times \|K^-_{rln}(1,x), L_p(\mathbb{R}_n)\| \|x_n F_l(x), L_1(\mathbb{R}^+_n)\|.$$

По условию имеем $1-|\alpha|/p'-\alpha_n < 0$, значит, при $k\to\infty$ интеграл сходится.

Как и выше, считаем, что показатель N в определении функции $G(s)$ достаточно большой, поэтому $\|K^-_{rln}(1,x), L_p(\mathbb{R}_n)\| \le c < \infty$. Отсюда

$$\left\|\Phi^{31}_{krl}(x), L_p(\mathbb{R}^+_n)\right\| \le c_3 \|x_n F_l(x), L_1(\mathbb{R}^+_n)\|. \tag{5.13}$$

Рассмотрим Φ^{32}_{krlj} из (5.12). Применяя неравенство Минковского, получим

$$\begin{aligned}\left\|\Phi^{32}_{krlj}(x), L_p\big(\mathbb{R}^+_n\big)\right\| &\le c_4 \int\limits_0^1 \int\limits_1^k \frac{1}{v} \Bigg\| \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \int\limits_{x_n}^{\infty} x_n \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp{(i(x'-y')s)} G(sv^{\alpha'}) \\ &\times W_{jl}(s,y_n) D_{z_n}\omega^r_j(s,z_n)\big|_{z_n=\lambda x_n} ds \Bigg| |F_l(y)|\, dy_n dy', L_p\big(\mathbb{R}^+_n\big) \Bigg\| dv d\lambda \\ &\le c_4 \int\limits_0^1 \int\limits_1^k \frac{1}{v} \Bigg\| \int\limits_{\mathbb{R}^+_n} |K_{jrl}(v, x'-y', \lambda x_n, y_n)| |y_n F_l(y)|^{(1/p+1/p')} dy, L_p\big(\mathbb{R}^+_n\big) \Bigg\| dv d\lambda,\end{aligned}$$

где

$$K_{jrl}(v, x'-y', z_n, y_n) = \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp{(i(x'-y')s)} G(sv^{\alpha'}) W_{jl}(s,y_n) D_{z_n}\omega^r_j(s,z_n)\, ds.$$

Используя неравенство Гёльдера, будем иметь

$$\begin{aligned}\left\|\Phi^{32}_{krlj}(x), L_p(\mathbb{R}^+_n)\right\| &\le c_4 \int\limits_0^1 \int\limits_1^k \frac{1}{v} \Bigg\| \int\limits_{\mathbb{R}^+_n} |K_{jrl}(v, x'-y', \lambda x_n, y_n)|^p \\ &\times |y_n F_l(y)| dy, L_1\big(\mathbb{R}^+_n\big) \Bigg\|^{1/p} dv d\lambda \big\|x_n F_l(x), L_1\big(\mathbb{R}^+_n\big)\big\|^{1/p'}.\end{aligned}$$

В силу теоремы Тонелли неравенство перепишется в виде

$$\begin{aligned}\left\|\Phi^{32}_{krlj}(x), L_p(\mathbb{R}^+_n)\right\| &\le c_4 \int\limits_0^1 \int\limits_1^k \frac{1}{v} \Bigg\| \int\limits_{\mathbb{R}^+_n} |K_{jrl}(v, x'-y', \lambda x_n, y_n)|^p\, dx \\ &\times |y_n F_l(y)|, L_1(\mathbb{R}^+_n) \Bigg\|^{1/p} dv d\lambda \|x_n F_l(x), L_1(\mathbb{R}^+_n)\|^{1/p'}.\end{aligned} \tag{5.14}$$

Для дальнейшего нам понадобится оценить интеграл

$$A_{jrl}(v,\lambda,y) = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} |K_{jrl}(v,x'-y',\lambda x_n,y_n)|^p \theta(y_n)\,dx.$$

В силу определения функции $K_{jrl}(v,z',z_n,y_n)$ имеем

$$\begin{aligned} A_{jrl}(v,\lambda,y) &= \lambda^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}_n} |K_{jrl}(v,z',z_n,y_n)|^p \theta(y_n)\theta(z_n)\,dz \\ &= \lambda^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}_n}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp{(iz's)}G(sv^{\alpha'})W_{jl}(s,y_n)\theta(y_n)D_{z_n}\omega_j^r(s,z_n)\theta(z_n)\,ds\Bigg|^p dz. \end{aligned}$$

Учитывая квазиоднородность функций $W_{jl}(s,y_n)$, $\omega_j^r(s,z_n)$, перепишем $A_{jrl}(v,\lambda,y)$ в виде

$$\begin{aligned} A_{jrl}(v,\lambda,y) = \lambda^{-1}v^{p(1-|\alpha|/p'-\alpha_n)}\int\limits_{\mathbb{R}_n}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} &\exp{(ix's)}G(s)W_{jl}(s,y_nv^{-\alpha_n})\theta(y_n) \\ &\times D_{x_n}\omega_j^r(s,x_n)\theta(x_nv^{\alpha_n})\,ds\Bigg|^p dx. \end{aligned}$$

Используя оценку (5.7) и рассуждая так же, как при доказательстве леммы 2 в [5, § 4], получим неравенство

$$A_{jrl}(v,\lambda,y) \le c\lambda^{-1}v^{p(1-|\alpha|/p'-\alpha_n)}\theta(y_n)$$

с константой $c>0$, не зависящей от v, λ, y. Тогда из (5.14) будем иметь

$$\big\|\Phi^{32}_{krlj}(x),L_p(\mathbb{R}_n^+)\big\| \le c_5\int\limits_0^1 \lambda^{-1/p}d\lambda\int\limits_1^k v^{-1+(1-|\alpha|/p'-\alpha_n)}dv\|x_nF_l(x),L_1(\mathbb{R}_n^+)\|.$$

Поскольку $p>1$, $1-|\alpha|/p'-\alpha_n<0$, отсюда следует, что

$$\big\|\Phi^{32}_{krlj}(x),L_p(\mathbb{R}_n^+)\big\| \le c\|x_nF_l(x),L_1(\mathbb{R}_n^+)\|,$$

где константа $c>0$ не зависит от $F(x)$ и k.

Из полученной оценки и (5.13) вытекает (5.11). Лемма доказана.

Лемма 5. *Имеет место оценка*

$$\big\|\Phi^{4}_{krl}(x),L_p(\mathbb{R}_n^+)\big\| \le c\|x_nF_l(x),L_1(\mathbb{R}_n^+)\|, \tag{5.15}$$

где константа $c>0$ не зависит от $F(x)$ и k.

Доказательство. Пользуясь леммой Адамара, представим $\Phi^4_{krl}(x)$ в виде

$$\begin{aligned} \Phi^4_{krl}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int\limits_1^k\frac{1}{v}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} &\exp{(ix's)}G(sv^{\alpha'}) \\ &\times\int\limits_{x_n}^\infty y_n\int\limits_0^1 D_{z_n}\Omega^2_{rl}(s,0,z_n)\big|_{z_n=\lambda y_n}d\lambda\widetilde{F}_l(s,y_n)\,dy_nds dv. \end{aligned}$$

Тогда

$$\big\|\Phi^4_{krl}(x), L_p\big(\mathbb{R}^+_n\big)\big\| \le c_1 \int\limits_0^1 \int\limits_1^k \frac{1}{v} \Bigg\| \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \int\limits_{x_n}^{\infty} |K_{rl}(v, x'-y', \lambda y_n)|$$

$$\times |y_n F_l(y', y_n)|\, dy_n dy', L_p(\mathbb{R}^+_n) \Bigg\| dv d\lambda,$$

где

$$K_{rl}(v, x'-y', \lambda y_n) = \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp\big(i(x'-y')s\big) G(sv^{\alpha'}) D_{z_n} \Omega^2_{rl}(s, 0, z_n)\big|_{z_n=\lambda y_n} ds.$$

Воспользовавшись неравенством Гёльдера, получим

$$\big\|\Phi^4_{krl}(x), L_p\big(\mathbb{R}^+_n\big)\big\| \le c_1 \int\limits_0^1 \int\limits_1^k \frac{1}{v} \Bigg\| \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \int\limits_{x_n}^{\infty} |K_{rl}(v, x'-y', \lambda y_n)|^p$$

$$\times |y_n F_l(y', y_n)|\, dy_n dy', L_1(\mathbb{R}^+_n) \Bigg\|^{1/p} dv d\lambda \|x_n F_l(x), L_1(\mathbb{R}^+_n)\|^{1/p'}.$$

В силу теоремы Тонелли будем иметь

$$\Bigg\| \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \int\limits_{x_n}^{\infty} |K_{rl}(v, x'-y', \lambda y_n)|^p |y_n F_l(y', y_n)|\, dy_n dy', L_1(\mathbb{R}^+_n) \Bigg\|$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{x_n}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} |K_{rl}(v, x'-y', \lambda y_n)|^p\, dx' \Bigg) |y_n F_l(y', y_n)|\, dy' dy_n dx_n. \quad (5.16)$$

Пользуясь определением матрицы $\Omega^2(s, 0, z_n)$ и условиями 1, 4, получим

$$D_{z_n} \Omega^2_{rl}(s, 0, z_n) = v^{1-2\alpha_n} D_{y_n} \Omega^2_{rl}(v^{\alpha'} s, 0, y_n)\big|_{y_n = z_n v^{-\alpha_n}}.$$

Тогда из определения функции $K_{rl}(v, x'-y', z_n)$ следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} |K_{rl}(v, x'-y', z_n)|^p\, dx' = \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp(iz's) G(sv^{\alpha'}) D_{z_n} \Omega^2_{rl}(s, 0, z_n)\, ds \Bigg|^p dz'$$

$$= v^{p(1-2\alpha_n - |\alpha'|/p')} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} |K_{rl}(1, x', z_n v^{-\alpha_n})|^p\, dx'. \quad (5.17)$$

Введем обозначение

$$A(\lambda y_n v^{-\alpha_n}) = \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} |K_{rl}(1, x', \lambda y_n v^{-\alpha_n})|^p\, dx', \quad y_n > 0.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, будем иметь

$$A(\lambda y_n v^{-\alpha_n}) = \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp(ix's) G(s) D_{z_n} \Omega^2_{rl}(s, 0, z_n)\big|_{z_n = \lambda y_n v^{-\alpha_n}} ds \Bigg|^p dx'$$

$$\leq c_1 \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} (1+|x'|^{2q})^{-p} dx' \Bigg(\sum_{|\varkappa|+|\gamma|\leq 2q} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} |D_s^{\varkappa} G(s)|$$
$$\times \left| D_s^{\gamma} D_{z_n} \Omega_{rl}^2(s,0,z_n)\right|_{z_n=\lambda y_n v^{-\alpha_n}} \Big| \, ds \Bigg)^p.$$

Воспользовавшись определением функции $\Omega^2_{rl}(s,0,z_n)$, леммой 1 и неравенством (5.7), получим

$$A(\lambda y_n v^{-\alpha_n}) \leq c_2 \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} (1+|x'|^{2q})^{-p} dx'$$
$$\times \Bigg(\sum_{|\varkappa|+|\gamma|\leq 2q} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \left|D_s^{\varkappa} G(s)\right| \langle s\rangle^{2\alpha_n-\gamma\alpha'-1} \exp\left(-\delta\lambda y_n v^{-\alpha_n}\right) ds \Bigg)^p.$$

При $y_n > x_n > 0$ имеем

$$A(\lambda y_n v^{-\alpha_n}) \leq c_2 \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} (1+|x'|^{2q})^{-p} \, dx'$$
$$\times \Bigg(\sum_{|\varkappa|+|\gamma|\leq 2q} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \left|D_s^{\varkappa} G(s)\right| \langle s\rangle^{2\alpha_n-\gamma\alpha'-1} \exp\left(-\delta\lambda x_n v^{-\alpha_n}\right) ds \Bigg)^p$$
$$\leq c_3 \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} (1+|x'|^{2q})^{-p} \, dx' \Bigg(\sum_{|\varkappa|+|\gamma|\leq 2q} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} |D_s^{\varkappa} G(s)|$$
$$\times \langle s\rangle^{\alpha_n-\gamma\alpha'-1} (1+\langle s\rangle^{\alpha_n})(1+\lambda x_n v^{-\alpha_n})^{-1} \, ds \Bigg)^p.$$

Выбирая q из условия $2qp > n-1$, а также подходящим образом число N из определения функции $G(s)$, получим при $y_n > x_n > 0$ следующую оценку:

$$A(\lambda y_n v^{-\alpha_n}) \leq c_4 (1+\lambda x_n v^{-\alpha_n})^{-p}.$$

Учитывая эту оценку и равенства (5.16), (5.17), будем иметь

$$\left\|\Phi^4_{krl}(x), L_p(\mathbb{R}_n^+)\right\| \leq c_4 \int\limits_0^1 \int\limits_1^k v^{-1+(1-2\alpha_n-|\alpha'|/p')}$$
$$\times \left(\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} (1+\lambda x_n v^{-\alpha_n})^{-p} |y_n F_l(y)| \, dy dx_n \right)^{1/p} dv d\lambda \|x_n F_l(x), L_1(\mathbb{R}_n^+)\|^{1/p'}$$
$$= c_4 \int\limits_0^1 \lambda^{-1/p} d\lambda \int\limits_1^k v^{-1+(1-|\alpha|/p'-\alpha_n)} dv \left(\int\limits_0^\infty (1+x_n)^{-p} dx_n \right)^{1/p} \|x_n F_l(x), L_1(\mathbb{R}_n^+)\|.$$

Ввиду того, что $1-|\alpha|/p'-\alpha_n < 0$, $p>1$, получим (5.15). Лемма доказана.

В силу представления (5.1) из неравенства (5.2) и лемм 2–5 вытекает оценка

$$\|U_k(x), L_p(\mathbb{R}_n^+)\| \leq c(\|F(x), L_p(\mathbb{R}_n^+)\| + \|(1+|x|)F(x), L_1(\mathbb{R}_n^+)\|)$$

с константой $c>0$, не зависящей от $F(x)$ и k. Аналогичным образом доказывается, что $\|U_{k_1}(x)-U_{k_2}(x), L_p(\mathbb{R}_n^+)\| \to 0$, $k_1, k_2 \to \infty$.

Используя это неравенство, оценки старших производных из [1] и проводя аналогичные [1] рассуждения, нетрудно установить однозначную разрешимость краевой задачи (3.1) в соболевском пространстве $W_p^l(\mathbb{R}_n^+)$.

Доказательство теоремы 2. Решение краевой задачи (3.1) представимо в виде $U(x) = R(x^0)F(x)$, $x^0 \notin K$. Обозначим символом $L_{1,1}(\mathbb{R}_n^+)$ весовое пространство суммируемых вектор-функций с нормой $\|F(x), L_{1,1}(\mathbb{R}_n^+)\| = \|(1+|x|)F(x), L_1(\mathbb{R}_n^+)\|$. В силу условия (2.4) из проведенных оценок следует, что линейный оператор $R(x^0) : L_p(\mathbb{R}_n^+) \cap L_{1,1}(\mathbb{R}_n^+) \to W_p^l(\mathbb{R}_n^+)$ непрерывен. Поэтому при выполнении условий теоремы 2, как при доказательстве теоремы 1, решение задачи (1.1) можно искать в виде $U(x) = R(x^0)f(x)$, при этом неизвестную вектор-функцию $f(x)$ нужно находить из уравнения (4.2). Как и ранее, для разрешимости этого уравнения в пространстве $L_p(\mathbb{R}_n^+) \cap L_{1,1}(\mathbb{R}_n^+)$ достаточно получить неравенство (4.3). В силу определения оператора T и условий 1, 3 доказательство этого неравенства основано на использовании оценки (4.7). Но, как уже отмечалось в § 4, эта оценка справедлива при любых $|\alpha| > 0$ (см. [1]). Поэтому если коэффициенты оператора $\mathscr{L}(x; D_x)$ достаточно мало отличаются от постоянных, то оценка (4.3) справедлива. Следовательно, уравнение (4.2) разрешимо: $f(x) = (I-T)^{-1}F(x) \in L_p(\mathbb{R}_n^+) \cap L_{1,1}(\mathbb{R}_n^+)$, и выполнены неравенство (4.5), а также $\|f(x), L_{1,1}(\mathbb{R}_n^+)\| \le \|F(x), L_{1,1}(\mathbb{R}_n^+)\| + c(K,q)\|F(x), L_p(\mathbb{R}_n^+)\|$, где константа $c(K,q) > 0$ зависит от коэффициентов оператора $\mathscr{L}(x; D_x)$, компакта K и q.

Итак, при выполнении условий теоремы 2 существует решение краевой задачи (1.1), оно имеет вид $U(x) = R(x^0)(I-T)^{-1}F(x)$, и для него выполняется оценка (2.5). Доказательство единственности решения проводится точно так же, как в § 4.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Demidenko G. V.* On solvability of boundary value problems for quasi-elliptic systems in $\mathbb{R}_+^n$ // J. Anal. Appl. 2006. V. 4, N 1. P. 1–11.
2. *Бондарь Л. Н.* Условия разрешимости краевых задач для квазиэллиптических систем // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2007. Т. 7, № 4. С. 9–26.
3. *Волевич Л. Р.* Локальные свойства решений квазиэллиптических систем // Мат. сб. 1962. Т. 59, № 3. С. 3–52.
4. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.
5. *Демиденко Г. В.* Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уравнениями. II // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 41–65.
6. *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982.
7. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
8. *Успенский С. В.* О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1972. Т. 117. С. 292–299.

Статья поступила 12 февраля 2008 г.

Бондарь Лина Николаевна,
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
b_lina@ngs.ru

Демиденко Геннадий Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
demidenk@math.nsc.ru