Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2008. Том 49, № 2

УДК 517.53

ОЦЕНКА РЯДА ДИРИХЛЕ В ПОЛУПОЛОСЕ В СЛУЧАЕ НЕРЕГУЛЯРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ. II

А. М. Гайсин, Д. И. Сергеева

Аннотация. Изучаются ряды Дирихле, сходящиеся лишь в полуплоскости, последовательность показателей которых допускает расширение до некоторой «правильной» последовательности. Установлены неулучшаемые оценки порядка суммы ряда Дирихле в полуполосе, ширина которой зависит от специальной плотности распределения показателей.

Ключевые слова: порядок ряда Дирихле в полуполосе.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, удовлетворяющая условию
$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = H < \infty. \tag{1}$$
При изучении целых функций
$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \tag{2}$$
определенных всюду сходящимися рядами Дирихле, в свое время Риттом было введено понятие R-порядка. Приведем определение этой величины — наиболее употребительной характеристики роста для рядов Дирихле (2). Поскольку ряд (2) сходится во всей плоскости, в силу условия (1) он сходится во всей плоскости абсолютно. Пусть $M(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$. Известно, что $\ln M(\sigma)$ — возрастающая выпуклая функция от σ, $\lim_{\sigma\to+\infty} \ln M(\sigma) = +\infty$, $\lim_{\sigma\to-\infty} \ln M(\sigma) = -\infty$.

Порядком по Ритту (R-*порядком*) целой функции F, определенной рядом (2), называется величина [1]
$$\rho_R = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\ln M(\sigma)}{\sigma}.$$

Пусть целая функция $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ имеет конечный порядок ρ. Сделаем замену $z = e^s$. Тогда
$$F(s) = f(e^s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{ns}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00417–а).

— целая функция, для которой $\rho_R = \rho$.

Рассмотрим полосу $S(a,t_0) = \{s = \sigma + it : |t - t_0| \le a\}$. Положим $M_s(\sigma) = \max\limits_{|t-t_0|\le a} |F(\sigma + it)|$. Величина

$$\rho_s = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln^+ \ln M_s(\sigma)}{\sigma} \quad (a^+ = \max(a,0))$$

называется *R-порядком функции* F в полосе $S(a,t_0)$.

Пусть

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = D < \infty, \quad D^* = \varlimsup_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^\lambda D(x)\,dx,$$

где $D(x) = \frac{n(x)}{x}$, $n(x) = \sum\limits_{\lambda_n \le x} 1$ (D — верхняя плотность, D^* — усредненная верхняя плотность последовательности Λ). Известно, что $D^* \le D \le eD^*$ [2]. В [2] доказано, что если $\varliminf\limits_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = h > 0$, то R-порядок ρ_s функции F в полосе $S(a,t_0)$ при $a > \pi D^*$ равен R-порядку ρ_R во всей плоскости. Наиболее общий результат о связи между величинами ρ_R и ρ_s установлен А. Ф. Леонтьевым [3].

В данной статье рассматриваются аналогичные вопросы в случае, когда область сходимости ряда (2) — полуплоскость $\Pi_0 = \{s = \sigma + it : \sigma < 0\}$. При $H = 0$ если ряд (2) сходится в полуплоскости Π_0, то он сходится в Π_0 и абсолютно. Тогда сумма ряда F аналитична в данной полуплоскости. Класс всех аналитических функций, представимых рядами Дирихле (2), сходящимися лишь в полуплоскости Π_0, обозначим через $D_0(\Lambda)$.

Пусть $S(a,t_0) = \{s = \sigma + it : |t - t_0| \le a, \sigma < 0\}$ — полуполоса. Величины

$$\rho_R = \varlimsup_{\sigma\to 0-} \frac{\ln^+ \ln M(\sigma)}{|\sigma|^{-1}}, \quad \rho_s = \varlimsup_{\sigma\to 0-} \frac{\ln^+ \ln M_s(\sigma)}{|\sigma|^{-1}}$$

называются *порядками по Ритту в полуплоскости* Π_0 *и полуполосе* $S(a,t_0)$ функции F [4]. В дальнейшем ρ_R и ρ_s будем называть *порядками в полуплоскости и полуполосе*. Если это необходимо, вместо ρ_R и ρ_s будем писать $\rho_R(F)$ и $\rho_s(F)$.

В [4] показано, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n} \ln n = 0$, то порядок ρ_R любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ равен

$$\rho_R = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \lambda_n}{\lambda_n} \ln^+ |a_n|. \tag{3}$$

Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность D. Тогда

$$L(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \quad (z = x + iy)$$

— целая функция экспоненциального типа. Пусть $h(\varphi)$ — индикатриса роста функции $L(z)$. Тогда $\tau = h\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) \le \pi D^*$ [2]. Очевидно, τ — тип функции $L(z)$. Пусть

$$|L(x)| \le e^{g(x)} \ (x \ge 0), \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)\ln x}{x} = 0. \tag{4}$$

В этом случае $h(0) = h(\pi) = 0$. Следовательно, сопряженная диаграмма функции $L(z)$ есть отрезок $I = [-\tau i, \tau i]$, $h(\varphi) = \tau|\sin\varphi|$.

В [4] доказана следующая

Теорема I. *Пусть функция $L(z)$ удовлетворяет условиям (4) и имеет тип τ $(0 \le \tau < \infty)$. Положим $q = q(L)$, где*

$$q(L) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \lambda_n}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right|. \tag{5}$$

Тогда порядок ρ_s в полуполосе $S(a, t_0)$ при $a > \tau$ и порядок ρ_R любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ в полуплоскости Π_0 удовлетворяют оценкам

$$\rho_s \le \rho_R \le \rho_s + q. \tag{6}$$

Для полуполосы $S(a, t_0)$ при $a < \tau$ правая оценка в (6), вообще говоря, не верна [4].

Ясно, что левая оценка в (6) точна. Действительно, если $t_0 = 0$, а $a_n > 0$, то $M(\sigma) = M_s(\sigma)$ и $\rho_R = \rho_s$. В [4] показано, что если Λ — последовательность всех нулей функции типа синуса, то существует функция $F \in D_0(\Lambda)$, для которой $\rho_R = \rho_s + q$ при $a > \tau$. Вопрос о точности оценки $\rho_R \le \rho_s + q$ в общем случае пока оставался открытым. К тому же условия (4) и (5) трудно проверяемы (они не сформулированы в терминах распределения последовательности Λ). В общей ситуации пара условий (4) может и не выполняться. Однако может существовать целая функция экспоненциального типа Q с простыми нулями в точках последовательности Λ, для которой условия (4) будут выполнены, причем $q(Q) = q^*$, где

$$q^* = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \lambda_n}{\lambda_n} \int_0^1 \frac{n(\lambda_n; t)}{t}\, dt,$$

$q(Q)$ — величина, определяемая точно так же, как и $q(L)$ в (5), а $n(\lambda_n; t)$ — число точек $\lambda_k \ne \lambda_n$ из отрезка $\{x : |x - \lambda_n| \le t\}$.

Цель статьи — в терминах специальной плотности $G(R)$ распределения точек последовательности Λ указать достаточно общие, но простые и наглядные условия, при выполнении которых справедлива оценка

$$\rho_R \le \rho_s + q^*$$

(ρ_s — порядок в полуполосе $S(a, t_0)$ ширины больше, чем $2\pi G(R)$), не улучшаемая в классе $D_0(\Lambda)$.

§ 1. Предварительные сведения

1°. Специальные плотности распределения последовательности Λ. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность, L — класс положительных, непрерывных и неограниченно возрастающих на $[0, \infty)$ функций. Через K обозначим подкласс функций h из L таких, что $h(0) = 0$, $h(t) = o(t)$ при $t \to \infty$, $\frac{h(t)}{t} \downarrow$ при $t \uparrow$ ($\frac{h(t)}{t}$ монотонно убывает при $t > 0$). В частности, если $h \in K$, то $h(2t) \le 2h(t)$ $(t > 0)$, $h(t) \le h(1)t$ при $t \ge 1$.

K-плотностью последовательности Λ называется величина

$$G(K) = \inf_{h\in K} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\mu_\Lambda(\omega(t))}{h(t)}, \tag{7}$$

где $\omega(t) = [t, t + h(t))$ — полуинтервал, $\mu_\Lambda(\omega(t))$ — число точек из Λ, попавших в полуинтервал $\omega(t)$.

Пусть $\Omega = \{\omega\}$ — семейство полуинтервалов вида $\omega = [a, b)$. Через $|\omega|$ будем обозначать длину ω. Всякая последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ порождает целочисленную считающую меру μ_Λ:

$$\mu_\Lambda(\omega) = \sum_{\lambda_n \in \omega} 1, \quad \omega \in \Omega.$$

Пусть μ_Γ — считающая мера, порожденная последовательностью $\Gamma = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_n \uparrow \infty)$. Тогда включение $\Lambda \subset \Gamma$ означает, что $\mu_\Lambda(\omega) \le \mu_\Gamma(\omega)$ для любого $\omega \in \Omega$. В этом случае говорят, что мера μ_Γ *мажорирует меру* μ_Λ.

Через $D(K)$ обозначим точную нижнюю грань тех чисел b $(0 \le b < \infty)$, для каждого из которых существует мера μ_Γ, мажорирующая μ_Λ, такая, что для некоторой функции $h \in K$

$$|M(t) - bt| \le h(t) \quad (t \ge 0). \tag{8}$$

Здесь $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $\Gamma = \{\mu_n\}$, $M(t) = \sum_{\mu_n \le t} 1$.

Лемма 1. *Величины $D(K)$ и $G(K)$ совпадают: $D(K) = G(K)$.*

Доказательство. Для любого $a > D(K)$ существует мера μ_Γ, мажорирующая μ_Λ, такая, что для некоторой функции $h \in K$ выполняется оценка (8). Положим $h^*(t) = Ah(t)$ $(0 < A < \infty)$. Ясно, что $h^* \in K$. Учитывая (8), имеем

$$\mu_\Gamma([t, t + h^*(t))) = M(t + h^*(t)) - M(t) \le h(t + h^*(t)) + h(t) + ah^*(t) \quad (t \ge 0).$$

Так как $h \in K$, то $h(2t) \le 2h(t)$ $(t > 0)$. Поскольку $h^*(t) = o(t)$ при $t \to \infty$, то

$$\frac{\mu_\Gamma([t, t + h^*(t)))}{h^*(t)} \le a + \frac{3h(t)}{h^*(t)} = a + \frac{3}{A}, \quad t \ge t_0.$$

Но $\mu_\Lambda(\omega) \le \mu_\Gamma(\omega)$ для любого $\omega \in \Omega$. Следовательно, из (7) получаем, что $G(K) \le a$. Поскольку $a > D(K)$ любое, то $G(K) \le D(K)$.

Убедимся, что $G(K) = D(K)$. Для любого $b > G(K)$ существует функция $h \in K$ такая, что при $t \ge t_0$

$$\mu_\Lambda(\omega(t)) \le bh(t), \quad \omega(t) = [t, t + h(t)).$$

Положим $t_1 = t_0 + h(t_0)$, $t_2 = t_1 + h(t_1), \dots, t_n = t_{n-1} + h(t_{n-1})$ $(n \ge 1)$. Ясно, что

$$[t_0, \infty) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \omega_i, \quad \omega_i = [t_i, t_{i+1}).$$

Таким образом,

$$\mu_\Lambda(\omega_i) \le b|\omega_i|, \quad |\omega_i| = h_i = h(t_i). \tag{9}$$

Расширим последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ до последовательности $\Gamma = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_n \uparrow \infty)$ путем добавления в каждый полуинтервал ω_i точек ν_n так, чтобы

$1^0)$ $|\mu_\Gamma(\omega_i) - b|\omega_i|| \le 1$ $(i \ge 0)$;

$2^0)$ для любого $n \ge 0$

$$\left|\mu_\Gamma\left(\bigcup_{i=0}^{n} \omega_i\right) - b\sum_{i=0}^{n} |\omega_i|\right| \le 1.$$

Для этого поступаем следующим образом. Пусть $\alpha = a - [a]$ ($[a]$ — целая часть a). Ясно, что $0 \le \alpha < 1$. Учитывая (9), в каждый полуинтервал ω_i добавим, если это необходимо, конечное число попарно различных точек $\{\nu_j^{(i)}\}_{j=1}^{k_i}$ так, чтобы выполнялись условия:

а) $\nu_j^{(i)} \notin \Lambda,\ j = 1, 2, \dots, k_i, \quad i \geq 0$;

б) $\nu_1^{(i)} < \nu_2^{(i)} < \dots < \nu_{k_i}^{(i)} \quad (i \geq 0)$;

в) $|\mu_\Lambda(\omega_i) + k_i - b|\omega_i|| \leq 1$.

Если $\mu_\Lambda(\omega_i) = b|\omega_i|$, считаем, что $k_i = 0$. Присоединяя к последовательности Λ точки $\nu_j^{(i)}$ $(j = 1, 2, \dots, k_i,\ i \geq 0)$, получим расширенную последовательность $\Gamma = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_n \uparrow \infty)$. Из построения видно, что $|\mu_\Gamma(\omega_i) - b|\omega_i|| \leq 1$ $(i \geq 0)$. Последовательность Γ не обязательно удовлетворяет условию 2^0. Поэтому уточним построение Γ.

Выберем точки $\nu_j^{(0)}$ $(j = 1, 2, \dots, k_0)$, $\nu_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, \dots, k_1)$ так, чтобы выполнялись равенства $\mu_\Gamma(\omega_0) = [b|\omega_0|]$, $\mu_\Gamma(\omega_1) = [b|\omega_1|]+1$. Тогда $\mu_\Gamma(\omega_0 \cup \omega_1) = b|\omega_0| + b|\omega_1| - \alpha_0 + \alpha_1$, где $\alpha_0 = \{b|\omega_0|\}$ $(0 \leq \alpha_0 < 1)$, $\alpha_1 = 1 - \{b|\omega_1|\}$ $(0 < \alpha_1 \leq 1)$ ($\{a\}$ — дробная часть a, т. е. $\{a\} = a - [a]$). Если положить $s_0 = -\alpha_0$, $s_1 = -\alpha_0 + \alpha_1$, то $-1 \leq s_0 \leq 0$, $-1 \leq s_1 \leq 1$. Теперь добьемся того, чтобы

$$\mu_\Gamma(\omega_2) = \begin{cases} [b|\omega_2|] + 1, & \text{если } -1 \leq s_1 \leq 0, \\ [b|\omega_2|], & \text{если } 0 < s_1 \leq 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\mu_\Gamma\left(\bigcup_{i=0}^{2} \omega_i\right) = b \sum_{i=0}^{2} |\omega_i| + s_2,$$

где $s_2 = s_1 + \alpha_2$, а

$$\alpha_2 = \begin{cases} 1 - \{b|\omega_2|\}, & \text{если } -1 \leq s_1 \leq 0; \\ -\{b|\omega_2|\}, & \text{если } 0 < s_1 \leq 1. \end{cases}$$

Видно, что $-1 \leq s_2 \leq 1$. Продолжая построение по индукции, добьемся того, чтобы

$$\mu_\Gamma(\omega_n) = \begin{cases} [b|\omega_n|] + 1, & \text{если } -1 \leq s_{n-1} \leq 0; \\ [b|\omega_n|], & \text{если } 0 < s_{n-1} \leq 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\mu_\Gamma\left(\bigcup_{i=0}^{n} \omega_i\right) = b \sum_{i=0}^{n} |\omega_i| + s_n,$$

где $s_n = s_{n-1} + \alpha_n$, а

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 - \{b|\omega_n|\}, & \text{если } -1 \leq s_{n-1} \leq 0; \\ -\{b|\omega_n|\}, & \text{если } 0 < s_{n-1} \leq 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\left|\mu_\Gamma\left(\bigcup_{i=0}^{n} \omega_i\right) - b \sum_{i=0}^{n} |\omega_i|\right| = |s_n| \leq 1.$$

Таким образом, последовательность Γ обладает свойством 2^0. Убедимся, что

$$|M(t) - bt| \leq H(t), \quad H \in K. \tag{10}$$

Действительно, пусть $t \in \omega_n$, т. е. $t_n \leq t < t_{n+1}$, где $t_n = t_{n-1} + h(t_{n-1})$ $(n \geq 1)$. Тогда

$$M(t) = M(t_0) + \mu_\Gamma\left(\bigcup_{i=0}^{n} \omega_i\right) + \mu_\Gamma([t_n, t)).$$

Следовательно, учитывая 2^0, имеем

$$|M(t)-bt| \le M(t_0) + \left|\mu_\Gamma\left(\bigcup_{i=0}^{n-1}\omega_i\right) - b\sum_{i=0}^{n}|\omega_i|\right| + b(t-t_n) + \mu_\Gamma([t_n,t))$$
$$\le M(t_0)+1+bh(t_n)+\mu_\Gamma([t_n,t_{n+1})) \le M(t_0)+1+(b+1)h(t) = H(t).$$

Очевидно, $H \in K$, и оценка (10) имеет место. Поскольку $b > G(K)$ любое, $G(K) \le D(K)$, то, учитывая определение величины $D(K)$, заключаем, что неравенство $G(K) < D(K)$ невозможно. Следовательно, $G(K) = D(K)$.

Лемма 1 полностью доказана.

2°. Существование целых функций с правильным поведением на вещественной оси. Пусть L и K — классы функций, введенные выше,

$$S = \left\{h \in K:\ d(h) = \varlimsup_{x\to\infty}\frac{h(x)\ln h(x)}{x\ln\frac{x}{h(x)}} < \infty\right\}.$$

Теорема II. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая конечную S-плотность $G(S)$. Тогда для любого $b > G(S)$ существует последовательность $\Gamma = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_n \uparrow \infty)$, содержащая Λ и имеющая плотность b, такая, что целая функция экспоненциального типа πb*

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right) \quad (z = x+iy) \tag{11}$$

обладает свойствами:

1) $Q(\lambda_n) = 0$, $Q'(\lambda_n) \ne 0$ для любого $\lambda_n \in \Lambda$;

2) существует $H \in S$ такая, что

$$\ln|Q(x)| \le AH(x)\ln^+\frac{x}{H(x)} + B; \tag{12}$$

3) если $\Lambda(x) = \sum\limits_{\lambda_n \le x} 1$ и

$$\Lambda(x+\rho) - \Lambda(x) \le a\rho + b + \frac{\varphi(x)}{\ln^+\rho + 1} \quad (\rho \ge 0) \tag{13}$$

(φ — любая неотрицательная неубывающая функция, определенная на луче $[0,\infty)$, $1 \le \varphi(x) \le \alpha x\ln^+ x + \beta$), то существует последовательность $\{r_n\}$, $0 < r_n \uparrow \infty$, $r_{n+1} - r_n = O(H(r_n))$ при $n \to \infty$ такая, что для $x = r_n$ $(n \ge 1)$

$$\ln|Q(x)| \ge -CH(x)\ln^+\frac{x}{H(x)} - 2\varphi(x) - D; \tag{14}$$

4) если

$$\Delta = \varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\int_0^1\frac{n(\lambda_n;t)}{t}\,dt < \infty,$$

то при условии (13)

$$\left|\ln\left|\frac{1}{Q'(\lambda_n)}\right| - \int_0^1\frac{n(\lambda_n;t)}{t}\,dt\right| \le EH(\lambda_n)\ln^+\frac{\lambda_n}{H(\lambda_n)} + 2\varphi(\lambda_n) + F\ln\lambda_n + L \quad (n \ge 1), \tag{15}$$

где $n(\lambda_n;t)$ — число точек $\lambda_k \neq \lambda_n$ из отрезка $\{x : |x-\lambda_n| \leq t\}$.

Здесь все постоянные положительны и конечны.

Замечание. Условие $\Delta < \infty$ не является следствием оценки (13), если даже функция φ ограничена. Действительно, пусть $\sup\limits_{x\geq 0}\varphi(x) < \infty$, $0 \leq \rho \leq 1$. Тогда из (13) следует, что $\Lambda(x+\rho) - \Lambda(x) \leq C < \infty$ $(x \geq 0)$. Следовательно, если $h_n = \min\limits_{k\neq n}|\lambda_k - \lambda_n|$, то

$$\ln^+\frac{1}{h_n} \leq \int\limits_0^1 \frac{n(\lambda_n;t)}{t}\,dt \leq 2C\ln^+\frac{1}{h_n}.$$

Так что в этом случае $\Delta < \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\ln^+\frac{1}{h_n} < \infty.$$

В случае, когда функция φ не ограничена, условие (13) допускает ситуацию

$$\sup_{x\geq 0}[\Lambda(x+1) - \Lambda(x)] = \infty.$$

Докажем теорему II. Согласно лемме 1 имеем $G(S) = D(S)$. Значит, для любого $\sigma > G(S)$ существуют последовательность $\Gamma = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_n \uparrow \infty)$, содержащая Λ, и $H \in S$ такие, что

$$|M(t) - \sigma t| \leq H(t)\ (t \geq 0), \quad M(t) = \sum_{\mu_n \leq t} 1. \tag{16}$$

Так как $0 < \mu_n \uparrow \infty$, то Λ — последовательность простых нулей целой функции

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right)$$

экспоненциального типа $\pi\sigma$. Так что $Q(\lambda_n) = 0$, $Q'(\lambda_n) \neq 0$ $(n \geq 1)$.

Оценка (12) вытекает из теоремы 1 в [5]. Чтобы доказать утверждение 3, поступаем следующим образом. Пусть $\Gamma = \Lambda \cup \nu$, где $\nu = \{\nu_n\}$ $(0 < \nu_n \uparrow \infty)$ $\nu(t) = \sum\limits_{\nu_n\leq t} 1$. Из доказательства леммы 1 следует существование системы полуинтервалов $\{\omega_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\omega_i \in \Omega$, $|\omega_i| \uparrow \infty$ при $i \uparrow \infty$, такой, что $[t_0, \infty) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty}\omega_i$, причем

$$\mu_\nu(\omega_i) \leq \mu_\Gamma(\omega_i) \leq \sigma|\omega_i| + 1 \quad (i \geq 0). \tag{17}$$

Здесь $\Omega = \{\omega\}$ — семейство полуинтервалов вида $\omega = [a, b)$, μ_ν — считающая мера последовательности $\nu = \{\nu_n\}$. Последовательность ν, построенную в лемме 1, подправим следующим образом. Для этого сначала точки последовательности ν, попавшие в ω_i, равномерно распределим по полуинтервалу ω_i. Тогда в силу (17) для любых ν_n и ν_m из ω_i $(\nu_n \neq \nu_m)$ выполняются оценки

$$|\nu_n - \nu_m| \geq \delta/\sigma \quad (n \neq m,\ 0 < \delta < 1,\ i \geq 0). \tag{18}$$

Не теряя общности, можно считать, что $|\omega_0| \geq 1$, $\delta/\sigma \leq 1$. Для каждого полуинтервала ω_i рассмотрим представление вида $\omega_i = \bigcup\limits_{k=1}^{m_i}\omega_k^{(i)}$ $(i \geq 0)$, где $\omega_k^{(i)} \in \Omega$,

$\omega_k^{(i)} \cap \omega_m^{(i)} = \varnothing$ при $k \neq m$, $\left|\omega_k^{(i)}\right| = \delta/\sigma$ $(k = 0, 1, \ldots, m_i - 1)$, $\delta/\sigma \leq \left|\omega_{m_i}^{(i)}\right| < \frac{2\delta}{\sigma}$. Пусть $\omega_1^{(i)}$ — самый левый полуинтервал, а остальные $\omega_k^{(i)}$ пронумерованы в порядке их расположения слева направо. Так что $\omega_{m_i}^{(i)}$ — самый правый полуинтервал. Ясно, что $\mu_\nu(\omega_i) \leq m_i + 1$. Пользуясь условием (13), имеем $\Lambda(\lambda_m + 2) - \Lambda(\lambda_m) \leq p\varphi(\lambda_m)$ $(0 < p < \infty,\ m \geq 1)$. Так как $\left|\omega_k^{(i)}\right| \leq 2$, то видим, что $\mu_\Lambda\bigl(\omega_k^{(i)}\bigr) \leq p\varphi(t_i + |\omega_i|)$ (t_i — левый конец ω_i). Поскольку $|\omega_i| \leq t_i$ при $i \geq i_0$, то $\mu_\Lambda\bigl(\omega_k^{(i)}\bigr) < q\varphi(2\lambda_m)$, где $\lambda_m = \min\{\lambda_j : \lambda_j \in \omega_i\}$, $0 < q < \infty$ $(k = 1, 2, \ldots, m_i;$ $i \geq 0)$. Это означает, что каждый полуинтервал $\omega_k^{(i)}$ $(k = 1, 2, \ldots, m_i;\ i \geq 0)$ содержит подынтервал $\omega_{ki} \in \Omega$, $|\omega_{ki}| = \frac{\gamma}{\varphi(2\lambda_m)}\bigl(\gamma = \frac{\delta}{2\sigma q}\bigr)$, свободный от точек Λ. Полуинтервал $\omega_k^{(i)}$ $(k = 1, 2, \ldots, m_i - 1)$ содержит не более одной точки из ν. Точку $\nu_j \in \nu$, попавшую в ω_{ki} $(k = 1, 2, \ldots, m_i - 1)$, заменим на ν_{ki} — центр полуинтервала ω_{ki}. Полуинтервал $\omega_{m_i}^{(i)}$ содержит не более двух точек из ν. Точки из ν, попавшие в $\omega_{mi}^{(i)}$, также перенесем в центр $\omega_{m_i i}$. В итоге получим измененную последовательность $\nu^* = \{\nu_n^*\}$, которую для простоты по-прежнему будем обозначать через $\nu = \{\nu_n\}$. Из построения следует, что для любого $n \geq 1$

$$q_n = \min_k |\lambda_n - \nu_k| \geq \gamma/\varphi(2\lambda_n). \tag{19}$$

Оценим разность $\nu(t + \rho) - \nu(t)$. Если $t \in \omega_i$, $t + \rho \in \omega_i$, то из-за «почти равномерного» распределения точек ν из ω_i справедлива оценка

$$\nu(t + \rho) - \nu(t) \leq \begin{cases} c\rho + d, & \text{если } 0 \leq \rho < 1, \\ c\rho, & \text{если } \rho \geq 1, \end{cases} \tag{20}$$

где c, d $(0 < c < \infty,\ 0 < d < \infty)$ — постоянные, не зависящие от ω_i $(i \geq 0)$. Пусть теперь $t \in \omega_i = [t_i, t_{i+1})$ $(i \geq 0)$, а $t + \rho \in \omega_m = [t_m, t_{m+1})$ $(i < m)$. Так как $|\omega_0| \geq 1$, то $|\omega_i| = t_{i+1} - t_i \geq 1$ для любого $i \geq 0$. Учитывая (20), получаем что

$$\begin{aligned} \nu(t + \rho) - \nu(t) &= [\nu(t_{i+1}) - \nu(t)] + \sum_{k=i+1}^{m-1} [\nu(t_{k+1}) - \nu(t_k)] + [\nu(t + \rho) - \nu(t_m)] \\ &\leq c(t_{i+1} - t) + d + c \sum_{k=i+1}^{m-1} [t_{k+1} - t_k] + c(t + \rho - t_m) \leq c\rho + d. \end{aligned}$$

Следовательно, с учетом условия (13) имеем

$$\begin{aligned} M(x + \rho) - M(x) &= [\Lambda(x + \rho) - \Lambda(x)] + [\nu(x + \rho) - \nu(x)] \\ &\leq d\rho + f + \frac{\varphi(x)}{\ln^+ \rho + 1} \quad (\rho \geq 0,\ x \geq 0). \end{aligned} \tag{21}$$

Любое перераспределение точек $\nu_k \in \omega_i$ внутри каждого полуинтервала ω_i $(i \geq 0)$ не нарушит условия (16). Значит, утверждение 3 есть следствие теоремы 2 из [5].

Докажем утверждение 4. Имеем

$$Q'(\lambda_n) = -\frac{2}{\lambda_n} Q_n(\lambda_n), \quad Q_n(\lambda_n) = \prod_{\mu_k \neq \lambda_n} \left(1 - \frac{\lambda_n^2}{\mu_k^2}\right).$$

Воспользуемся представлением

$$\ln|Q_n(\lambda_n)| = \int\limits_0^\infty K(\lambda_n, u)[M_n(u) - \sigma u]\,du \quad (n \geq 1).$$

Проверяется, что

$$a_n = \sigma \int\limits_{\lambda_n-1}^{\lambda_n+1} K(\lambda_n, u)u\,du = \sigma + \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть

$$b_n = \left(\int\limits_0^{\lambda_n-H} + \int\limits_{\lambda_n+H}^\infty \right) K(\lambda_n, u)[M_n(u) - \sigma u]\,du, \quad H = H(\lambda_n).$$

В [5] показано, что

$$|b_n| \leq 6H(\lambda_n)\ln^+ \frac{\lambda_n}{H(\lambda_n)} + N_1 \quad (n \geq 1).$$

Следовательно,

$$\ln|Q_n(\lambda_n)| = I_n + J_n + c_n, \tag{22}$$

где

$$|c_n| \leq 6H(\lambda_n)\ln^+ \frac{\lambda_n}{H(\lambda_n)} + N_2 \ (n \geq 1), \quad I_n = \int\limits_{\lambda_n-1}^{\lambda_n+1} K(\lambda_n, u)M_n(u)\,du,$$

$$J_n = \left(\int\limits_{\lambda_n-H}^{\lambda_n-1} + \int\limits_{\lambda_n+1}^{\lambda_n+H} \right) K(\lambda_n, u)[M_n(u) - \sigma u]\,du, \quad H = H(\lambda_n) \quad (n \geq 1).$$

Далее, в [5] установлена оценка

$$J_n \leq H(\lambda_n)\ln \frac{\lambda_n}{H(\lambda_n)}, \quad n \geq n_1. \tag{23}$$

Оценим J_n снизу. Для этого заметим, что $0 \leq M(t) - M_n(t) \leq 1$. Следовательно, учитывая (21), получаем, что

$$|M_n(x+\rho) - M_n(x)| \leq d\rho + k + \frac{\varphi(x)}{\ln^+\rho + 1}. \tag{24}$$

Кроме того, для $M_n(t)$ выполняется условие (16).

Имеем

$$J_n = \left(\int\limits_{\lambda_n-H}^{\lambda_n-h} + \int\limits_{\lambda_n+h}^{\lambda_n+H} \right) + \left(\int\limits_{\lambda_n-h}^{\lambda_n-1} + \int\limits_{\lambda_n+1}^{\lambda_n+h} \right) = J_n' + J_n'',$$

где $h = h(\lambda_n) = H^2(\lambda_n)/\lambda_n < H(\lambda_n)$ при $n \geq n_2 > n_1$. Учитывая (16), (24), как и при доказательстве теоремы 2 из [5], получаем, что при $n \geq n_3 > n_2$

$$\begin{gathered} J_n' \geq -N_3H(\lambda_n) - [M_n(\lambda_n + H) - M_n(\lambda_n - H)]\ln \frac{\lambda_n}{H(\lambda_n)}, \\ J_n'' \geq -N_4H(\lambda_n) - [M_n(\lambda_n + h) - M_n(\lambda_n - h)]\ln h(\lambda_n), \end{gathered} \tag{25}$$

где $0 < N_3 < \infty$, $0 < N_4 < \infty$. Следовательно, с учетом (16), (24) из (25) имеем

$$J_n \geq -N_5 H(\lambda_n) \ln \frac{\lambda_n}{H(\lambda_n)} - 2\varphi(\lambda_n) \quad (1 < N_5 < \infty),\ n \geq n_4 > n_3.$$

Кроме того, имеет место оценка (23). Значит,

$$|J_n| \leq N_5 H(\lambda_n) \ln^+ \frac{\lambda_n}{H(\lambda_n)} + 2\varphi(\lambda_n) + N_6 \quad (n \geq 1),\ 0 < N_6 < \infty. \tag{26}$$

Таким образом, из (22), (26) следует, что

$$\ln |Q_n(\lambda_n)| = I_n + f_n, \tag{27}$$

причем

$$|f_n| \leq N_7 H(\lambda_n) \ln^+ \frac{\lambda_n}{H(\lambda_n)} + 2\varphi(\lambda_n) + N_7 \quad (n \geq 1),\ 0 < N_7 < \infty. \tag{28}$$

Установим оценки для I_n. Имеем

$$I_n = 2\lambda_n^2 M_n(\lambda_n) \int\limits_{\lambda_n-1}^{\lambda_n+1} \frac{du}{u(\lambda_n^2 - u^2)} - 2\lambda_n^2 \int\limits_{\lambda_n-1}^{\lambda_n+1} \frac{[M_n(u) - M_n(\lambda_n)]}{u(u^2 - \lambda_n^2)}\, du = I_n' - I_n''.$$

Проверяется, что $\lim\limits_{n\to\infty} I_n' = 3\sigma$, а при $\lambda_n > 3$

$$\left(1 - \frac{3}{\lambda_n}\right) \int\limits_{\lambda_n-1}^{\lambda_n+1} \frac{M_n(u) - M_n(\lambda_n)}{u - \lambda_n}\, du \leq I_n'' \leq \left(1 + \frac{3}{\lambda_n}\right) \int\limits_{\lambda_n-1}^{\lambda_n+1} \frac{M_n(u) - M_n(\lambda_n)}{u - \lambda_n}\, du.$$

Следовательно, при $\lambda_n > 3$

$$\left(1 - \frac{3}{\lambda_n}\right) \int\limits_0^1 \frac{\mu(\lambda_n; t)}{t}\, dt \leq I_n'' \leq \left(1 + \frac{3}{\lambda_n}\right) \int\limits_0^1 \frac{\mu(\lambda_n;\ t)}{t}\, dt, \tag{29}$$

где $\mu(\lambda_n; t)$ — число точек $\mu_k \neq \lambda_n$ из отрезка $I_n(t) = \{x : |x - \lambda_n| \leq t\}$. Далее, $\mu(\lambda_n; t) = n(\lambda_n; t) + \nu(\lambda_n; t)$, где $n(\lambda_n; t)$ — число точек $\lambda_k \neq \lambda_n$, $\nu(\lambda_n;\ t)$ — число точек ν_k из отрезка $I_n(t)$. Поскольку $\nu(\lambda_n;\ t) \leq \Delta$ при $0 \leq t \leq 1$, то с учетом (19) имеем

$$0 \leq \int\limits_0^1 \frac{\mu(\lambda_n; t)}{t}\, dt - \int\limits_0^1 \frac{n(\lambda_n; t)}{t}\, dt = \int\limits_{q_n}^1 \frac{\nu(\lambda_n; t)}{t}\, dt \leq \Delta \ln \frac{\varphi(2\lambda_n)}{\gamma}. \tag{30}$$

Учтем еще то, что

$$\varphi(x) \leq \alpha x \ln^+ x + \beta, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \int\limits_0^1 \frac{n(\lambda_n; t)}{t}\, dt < \infty. \tag{31}$$

Тогда с учетом (28)–(31) получаем, что

$$\left| I_n - \int\limits_0^1 \frac{n(\lambda_n; t)}{t}\, dt \right| \leq N_8 + 2\Delta \ln \frac{\varphi(2\lambda_n)}{\gamma} \leq N_9 + N_9 \ln \lambda_n \quad (n \geq 1),\ 0 < N_9 < \infty. \tag{32}$$

Следовательно, учитывая (27), (28), (32), окончательно получаем требуемую оценку

$$\left|\ln|Q'(\lambda_n)| + \int_0^1 \frac{n(\lambda_n;t)}{t}\,dt\right| \le AH(\lambda_n)\ln^+\frac{\lambda_n}{H(\lambda_n)} + 2\varphi(\lambda_n) + B\ln\lambda_n + C$$

$(n \ge 1)$, A, B, C — положительные постоянные, не зависящие от n.

Теорема II полностью доказана.

Пусть Q — функция (11), а γ — функция, ассоциированная с ней по Борелю. Докажем еще одно утверждение.

Лемма 2. *Пусть Q — функция вида* (11). *Для функции Q пара условий* (4) *выполняется тогда и только тогда, когда*

$$\varlimsup_{\delta\to 0+} \delta\ln^+\ln|\gamma(t)| \le 0, \quad \delta = |\operatorname{Re} t|. \tag{33}$$

Необходимость доказана в [4].

Достаточность. Последовательность всех нулей функции Q имеет плотность b. Следовательно, тип функции Q равен πb (сопряженная диаграмма Q есть отрезок $[-\pi bi, \pi bi]$). Функция Q четная. Для $x > 0$ имеем

$$Q(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} \gamma(t)e^{xt}\,dt, \tag{34}$$

где Γ_δ — граница прямоугольника со сторонами, лежащими на прямых $\operatorname{Re} t = \pm\delta$ $(0 < \delta \le 1)$, $\operatorname{Im} t = \pm(\pi b + 1)$. Учитывая (33), из (34) получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ при $0 < \delta \le \delta_0(\varepsilon)$

$$|Q(x)| \le C_\varepsilon \exp[e^{\varepsilon\delta^{-1}} + \delta x] \quad (0 < C_\varepsilon < \infty). \tag{35}$$

Оценка (35) верна при любом $\delta \in (0, \delta_0(\varepsilon)]$. Возьмем $\delta = \varepsilon/(\ln x + \ln\ln^2 x)$, $x \ge x_0(\varepsilon)$. Тогда из (35) получаем, что

$$\ln|Q(x)| \le \ln C_\varepsilon + \frac{x}{\ln^2 x} + 2\varepsilon\frac{x}{\ln x}, \quad x \ge x_1(\varepsilon).$$

Следовательно, для функции Q условия (4) выполнены. Лемма доказана.

§ 2. Основные результаты

Перед тем как сформулировать основной результат, введем следующие классы функций: $L_0 = \{h \in L : h(x)\ln x = o(x) \text{ при } x \to +\infty\}$, $R = \bigl\{h \in K : h(x)\ln\frac{x}{h(x)} = o\bigl(\frac{x}{\ln x}\bigr),\ x \to +\infty\bigr\}$. Ясно, что $R \subset S$. Имеет место

Теорема 1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, удовлетворяющая условиям:*

$$\Lambda(x+\rho) - \Lambda(x) \le c\rho + d + \frac{\varphi(x)}{\ln^+\rho + 1} \quad (\rho \ge 0), \tag{36}$$

где $\Lambda(x) = \sum_{\lambda_n \le x} 1$, φ *— некоторая функция из* L_0;

$$q^* = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n}\int_0^1 \frac{n(\lambda_n;t)}{t}\,dt < \infty, \tag{37}$$

где $n(\lambda_n;t)$ — число точек $\lambda_k \neq \lambda_n$ из отрезка $\{x: |x-\lambda_n| \le t\}$.

Если R-плотность последовательности Λ равна $G(R)$, то порядок ρ_s любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ в полуполосе $S(a,t_0)$ при $a > \pi G(R)$ и порядок ρ_R этой функции в полуплоскости Π_0 удовлетворяют оценкам

$$\rho_s \le \rho_R \le \rho_s + q^*. \tag{38}$$

Доказательство. Так как $\varphi \in L_0$, из определения R-плотности следует, что $G(R) < \infty$. Действительно, если $h(x) = \frac{x}{\ln^2(x+e)}$ $(x \ge 0)$, то $h \in R$ и

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\mu_\Lambda(\omega(t))}{h(t)} \le c,$$

где c — постоянная из условия (36), $\omega(t) = [t, t+h(t))$. Следовательно, $G(R) \le c < \infty$.

Воспользуемся теоремой II. Тогда для любого b, $G(R) < b < \frac{a}{\pi}$, существует последовательность $\Gamma = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_n \uparrow \infty)$, содержащая Λ и имеющая плотность b, такая, что целая функция экспоненциального типа πb

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right) \quad (z = x+iy) \tag{39}$$

обладает свойствами:

1) $Q(\lambda_n) = 0$, $Q'(\lambda_n) \neq 0$ $(n \ge 1)$;
2) $\ln|Q(x)| \le g(x)$, $(x \ge 0)$ $g \in L_0$;
3) $q(Q) = q^*$, где q^* — величина, определенная формулой (37), а

$$q(Q) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n} \ln\left|\frac{1}{Q'(\lambda_n)}\right|.$$

Отметим, что оценка 2 и равенство 3 вытекают из оценок (12) и (15) с учетом того, что в случае R-плотности в оценках (12), (15) $H \in R$, а $\varphi \in L_0$.

Введем в рассмотрение интерполирующую функцию А. Ф. Леонтьева [3]

$$\omega(\mu,\alpha,F) = e^{-\alpha\mu} \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \left(\int_0^t F(t+\alpha-\eta) e^{\mu\eta} d\eta \right) dt,$$

где $F \in D_0(\Lambda)$, γ — функция, ассоциированная по Борелю с целой функцией Q из (39), C — замкнутый контур, охватывающий отрезок $I = [-\pi bi, \pi bi]$ — сопряженную диаграмму Q, α — произвольный комплексный параметр, $\operatorname{Re}\alpha < 0$. Ясно, что $(t+\alpha-\eta) \in C_\alpha$, где C_α — смещение C на вектор α. В качестве C возьмем границу прямоугольника

$$P = \{t : |\operatorname{Re} t| \le h \ (0 < h \le 1),\ |\operatorname{Im} t| \le a\}, \quad \pi G(R) < \pi b < a.$$

Докажем, что $\rho_R \le \rho_s + q^*$ (оценка $\rho_s \le \rho_R$ очевидна). Имеем

$$|\omega(\lambda_n,\alpha,F)| \le \frac{2}{\pi}(1+a)^2 |e^{-\alpha\lambda_n}| \max_{\eta\in P} |e^{\lambda_n\eta}| \max_{t\in C} |\gamma(t)| \max_{u\in P_\alpha} |F(u)|.$$

Положим $\alpha = \sigma - h + it_0$ $(\sigma < 0)$. Применяя лемму 2 и учитывая то, что на горизонтальных участках контура $|\gamma(t)| \le M$, для любого $\delta > 0$ при $h < h_0(\delta)$ получаем

$$|\omega(\lambda_n,\alpha,F)| \le e^{(|\sigma|+2h)\lambda_n} \exp\exp(\delta/h) \max_{u\in P_\alpha} |F(u)|. \tag{40}$$

Здесь P_α — сдвиг прямоугольника P на вектор α.

Считаем, что $\rho_R < \infty$. Тогда $\rho_s < \infty$. Из определения порядка ρ_s в полуполосе $S(a, t_0)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ при $0 < |\sigma| < \sigma_0(\varepsilon)$

$$\ln M_s(\sigma) < e^{(\rho_s+\varepsilon)|\sigma|^{-1}}.$$

Отсюда при $0 < |\sigma| < \sigma_0(\varepsilon)$

$$\max_{u\in P_\alpha} |F(u)| \le \exp\exp[(\rho_s+\varepsilon)|\sigma|^{-1}]. \tag{41}$$

Полагая $h = \gamma|\sigma|$ $(0 < \gamma < \infty)$ и учитывая (41), из (40) получаем, что

$$|\omega(\lambda_n, \alpha, F)| \le e^{(1+2\gamma)\lambda_n|\sigma|} \exp[e^{\frac{\delta}{\gamma|\sigma|}} + e^{\frac{\rho}{|\sigma|}}], \tag{42}$$

где $\rho = \rho_s + \varepsilon$, $0 < |\sigma| < \sigma_1(\delta, \varepsilon), \gamma > 0$.

Пусть $\delta = \varepsilon^2$, $\gamma = \varepsilon$. Тогда, пользуясь формулами для коэффициентов [3]

$$a_n = \frac{\omega(\lambda_n, \alpha, F)}{Q'(\lambda_n)} \quad (n \ge 1)$$

и учитывая (42), имеем $|a_n| \le |1/Q'(\lambda_n)| \exp[(1+2\varepsilon)\lambda_n t^{-1} + 2e^{\rho t}]$, где $t = |\sigma|^{-1}$, $t > t_0(\varepsilon)$. Это неравенство верно, в частности, для

$$t = \frac{\alpha_n}{\rho}\ln\lambda_n, \quad \alpha_n = 1 - \frac{\ln\ln^2\lambda_n}{\ln\lambda_n} \quad (n \ge n_0(\varepsilon)).$$

Для таких t имеем

$$|a_n| \le \left|\frac{1}{Q'(\lambda_n)}\right| \exp\left[\frac{(1+2\varepsilon)\rho}{\alpha_n}\frac{\lambda_n}{\ln\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{\ln^2\lambda_n}\right] \quad (n \ge n_0(\varepsilon)).$$

Применяя формулу (3) для вычисления порядка ρ_R в полуплоскости, отсюда получаем, что $\rho_R \le q(Q) + (1+2\varepsilon)(\rho_s+\varepsilon)$. Поскольку $q(Q) = q^*$, $\varepsilon > 0$ любое, то $\rho_R \le \rho_s + q^*$, и тем самым теорема доказана.

Замечание. В доказанной теореме вместо $S(a, t_0)$ можно брать криволинейную полуполосу K, описываемую вертикальным отрезком длины $2a$ при движении его центра вдоль кривой, которая лежит в полуплоскости Π_0 и имеет общую точку с мнимой осью. И в этом случае оценки (38) имеют место.

Левая оценка в (38) точна. Точность правой оценки вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть Λ — любая последовательность, удовлетворяющая условиям теоремы 1. Тогда существует функция $F \in D_0(\Lambda)$, для которой $\rho_R(F) = \rho_s(F) + q^*$, где $\rho_R(F)$ — порядок в полуплоскости Π_0, а $\rho_s(F)$ — порядок в полуполосе $S(a, t_0)$ $(a > \pi G(R))$.*

Следствие. *Пусть последовательность Λ удовлетворяет условиям теоремы 1. Для того чтобы для любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ порядок $\rho_R(F)$ был равен порядку $\rho_s(F)$ в любой полуполосе $S(a, t_0)$ $(a > \pi G(R))$, необходимо и достаточно, чтобы $q^* = 0$.*

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2, докажем несколько утверждений.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — последовательность, удовлетворяющая условиям теоремы 1. Тогда согласно теореме II для любого $b > G(R)$ $(G(R)$ — R-плотность последовательности Λ) существует последовательность $\Gamma = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_1 \le \mu_2 \le \dots \le \mu_n \to \infty)$, содержащая Λ, такая, что

$$|M(t) - bt| \le H(t) \quad (t \ge 0),\ H \in R, \tag{43}$$

причем целая функция экспоненциального типа πb

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right) \quad (z = x + iy) \tag{44}$$

обладает свойствами:

1^0) $Q(\lambda_n) = 0$, $Q'(\lambda_n) \ne 0$ $(n \ge 1)$;

2^0) $\ln|Q(x)| \le g(x)$ $(x \ge 0)$, $g \in L_0$;

3^0) при $x = r_n$ $(n \ge 1)$ выполняется оценка (14)

$$\ln|Q(x)| \ge -CH(x)\ln^+ \frac{x}{H(x)} - 2\varphi(x) - D.$$

Так как в теореме 1 $H \in R, \varphi \in L_0$, найдется функция $V \in L_0$ такая, что при $r = r_n$ $(r = |z|)$ $(n \ge 1)$

$$\ln|Q(z)| \ge \ln|Q(r)| \ge -V(r). \tag{45}$$

Пусть $\{r_n\}$ — последовательность из теоремы II (при $|z| = r_n$ $(n \ge 1)$ верны оценки (45)). Некоторые из интервалов (r_n, r_{n+1}) могут и не содержать точек из Λ. Пусть $\Delta_n = (r_{p_n}, r_{p_n+1})$ $(n \ge 1)$ — все те интервалы, каждый из которых содержит хотя бы одну точку из Λ.

Через Γ_{p_n} $(n \ge 1)$ обозначим замкнутый контур, образованный дугами окружностей $K_{p_n} = \{\lambda : |\lambda| = r_{p_n}\}$ и $K_{p_n+1} = \{\lambda : |\lambda| = r_{p_n+1}\}$ из угла $\{\lambda : |\arg\lambda| \le \varphi_n < \pi/4\}$ и отрезками лучей $\{\lambda : |\arg\lambda| = \varphi_n\}$.

Для доказательства теоремы 2 понадобятся функции

$$q_n(\lambda) = \prod_{\nu_k \in \Delta_n} \left(1 - \frac{\lambda}{\nu_k}\right),$$

где $\Delta_n = (r_{p_n}, r_{p_n+1})$, $\nu = \{\nu_k\} = \Gamma \setminus \Lambda$. Последовательность ν строится в процессе доказательства теоремы II и обладает свойствами:

(а) $\inf\limits_{i \ne j} |\nu_i - \nu_j| \ge \tau > 0$;

(б) $\inf\limits_{m \ge 1} |\lambda_n - \nu_m| \ge \frac{\gamma}{\varphi(2\lambda_n)}$ $(\gamma > 0,\ n \ge 1)$,

где φ — функция из условия (13) теоремы II.

Установим оценки для $|q_n(\lambda)|$.

Лемма 3. *Существует функция $u \in L_0$ такая, что*

$$\max_{\lambda_j \in \Delta_n} |\ln|q_n(\lambda_j)|| \le u(r_{p_n}) \quad (n \ge 1). \tag{46}$$

Доказательство леммы 3. Пусть $\lambda_j \in \Delta_n$, ν_j' и ν_j'' — ближайшие к λ_j точки последовательности ν, расположенные слева и справа от λ_j соответственно. Имеем

$$\left|\frac{\nu_j' - \lambda_j}{\nu_j'}\right| \left|\frac{\nu_j'' - \lambda_j}{\nu_j''}\right| \ge \left[\frac{\gamma}{\varphi(2\lambda_j)}\right]^2 r_{p_n+1}^{-2} \quad (\lambda_j \in \Delta_n).$$

Так как $1 \le \varphi(x) \le \alpha x \ln^+ x + \beta$, $r_{p_n}/r_{p_n+1} \to 1$ при $n \to \infty$, отсюда получаем оценку

$$|1 - \lambda_j/\nu_j'||1 - \lambda_j/\nu_j''| \ge e^{-c_1 - c_2 \ln r_{p_n}} \quad (\lambda_j \in \Delta_n), \tag{47}$$

где $0 < c_i < \infty$ $(i = 1, 2)$.

Пусть $\Delta'_n = \Delta_n \backslash \{\nu'_j, \nu''_j\}$. Тогда

$$\prod_{\substack{\nu_k \in \Delta'_n, \\ \nu_k < \lambda_j}} \left| \frac{\nu_k - \lambda_j}{\nu_k} \right| \geq \left(\frac{\tau}{r_{p_n+1}} \right)^{s_n} s_n!, \tag{48}$$

где s_n — число точек $\nu_k < \lambda_j, \nu_k \in \Delta'_n$. Аналогично

$$\prod_{\substack{\nu_k \in \Delta'_n, \\ \nu_k > \lambda_j}} \left| \frac{\nu_k - \lambda_j}{\nu_k} \right| \geq \left(\frac{\tau}{r_{p_n+1}} \right)^{l_n} l_n!, \tag{49}$$

где l_n — число точек $\nu_k > \lambda_j, \nu_k \in \Delta'_n$. Из (47)–(49) получаем, что при $\lambda_j \in \Delta_n$ $(n \geq 1)$

$$|q_n(\lambda_j)| \geq e^{-c_1 - c_2 \ln r_{p_n}} \left(\frac{\delta}{r_{p_n}} \right)^{s_n + l_n} s_n! l_n! \quad (0 < \delta \leq 1). \tag{50}$$

Если $\sup\limits_{n \geq 1}(s_n + l_n) < \infty$, то требуемая оценка снизу для $|q_n(\lambda_j)|$ очевидна. В противном случае воспользуемся сначала известной оценкой $s_n! l_n! \geq \frac{(s_n + l_n)!}{2^{s_n + l_n}}$, затем — асимптотической формулой Стирлинга. Тогда из (50) получим

$$|q_n(\lambda_j)| \geq \exp\left(-c_3 - c_2 \ln r_{p_n}\right) \left[\frac{\delta(s_n + l_n)}{2 e r_{p_n}} \right]^{s_n + l_n} \quad (n \geq 1),$$

где $0 < c_i < \infty$ $(i = 2, 3)$. Полагая $s_n + l_n = m_n$, для $\lambda_j \in \Delta_n$ имеем

$$|q_n(\lambda_j)| \geq \exp\left(-c_3 - c_2 \ln r_{p_n} - m_n \ln \frac{2 e r_{p_n}}{\delta m_n} \right) \quad (n \geq 1), \tag{51}$$

где m_n — число, не превосходящее числа точек ν_k из интервала Δ_n. Так как $0 < r_{p_n+1} - r_{p_n} \leq p H(p_n)$ $(0 < p < \infty)$, то, учитывая свойство (a) последовательности ν, имеем $m_n \leq c_4 H(r_{p_n})$, $0 < c_4 < \infty$ $(n \geq 1)$. Далее, $\frac{H(x)}{x} \downarrow 0$ при $x \uparrow \infty$, а функция $\psi(x) = x \ln \frac{\Delta}{x}$ (Δ — положительная постоянная) при $0 < x < \frac{\Delta}{e}$ возрастает. Следовательно, из (51) получаем, что для $\lambda_j \in \Delta_n$ $(n \geq n_0)$

$$\ln |q_n(\lambda_j)| \geq -c_5 - c_2 \ln r_{p_n} - c_6 H(r_{p_n}) \ln \frac{r_{p_n}}{H(r_{p_n})},$$

где $0 < c_i < \infty$ $(i = 2, 5, 6)$. Так как $H \in R$, то существует $u_1 \in L_0$ такое, что для $\lambda_j \in \Delta_n$

$$\ln |q_n(\lambda_j)| \geq -u_1(r_{p_n}) \quad (n \geq 1). \tag{52}$$

Оценим $\ln |q_n(\lambda_j)|$ сверху. Для этого заметим, что $|1 - \lambda_j / \nu_k| \leq 1 + r_{p_n+1}/r_{p_n} \leq e$. при $n \geq n_1$ для любого $\lambda_j \in \Delta_n$. Значит, для $\lambda_j \in \Delta_n$ будет $\ln |q_n(\lambda_j)| \leq m_n + 2 \leq c_4 H(r_{p_n}) + 2$ $(n \geq n_1)$. Отсюда следует, что для некоторой функции $u_2 \in L_0$

$$\ln |q_n(\lambda_j)| \leq u_2(r_{p_n}) \quad (n \geq 1). \tag{53}$$

Таким образом, из (52), (53) окончательно получаем, что

$$\max_{\lambda_j \in \Delta_n} |\ln |q_n(\lambda_j)|| \leq u(r_{p_n}) \quad (n \geq 1),$$

где $u = u_1 + u_2$. Лемма 3 доказана.

Положим $\gamma_n = \Gamma_{p_n}$ $(n \geq 1)$. Справедлива

Лемма 4. *Для любого $n \ge 1$*

$$M_n = \max_{\lambda\in\gamma_n} \ln|q_n(\lambda)| \le u(r_{p_n}), \tag{54}$$

где u — функция из оценки (46).

Доказательство леммы 4. Действительно, $|1-\lambda/\nu_k| \le 1+r_{p_n+1}/r_{p_n} \le e$ для любых $\lambda \in \gamma_n$, $\nu_k \in \Delta_n$ при $n \ge n_1$. Следовательно, как и в лемме 3, $M_n \le u_2(r_{p_n}) \le u(r_{p_n})$ $(n \ge 1)$. Тем самым оценка (54) доказана.

Теперь все готово для доказательства теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\gamma_n = \Gamma_{p_n}$ $(n \ge 1)$. Положим $\rho'_n = r_{p_n}$, $\rho''_n = r_{p_n+1}$. Тогда $\Delta_n = (\rho'_n, \rho''_n)$ $(n \ge 1)$.

Рассмотрим ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{\lambda_j s} \quad (s = \sigma + it), \tag{55}$$

где для $\lambda_j \in \Delta_n$ $(n \ge 1)$

$$a_j = \exp\left((\rho - q^*)\frac{\rho'_n}{\ln \rho'_n}\right)\frac{q_n(\lambda_j)}{Q'(\lambda_j)} \quad (j \ge 1).$$

Здесь Q — функция (44), q_n — функция, о которой речь идет в леммах 3, 4, $0 \le \rho < \infty$, а q^* — величина, определенная формулой (37). Так как $H \in R$, $\varphi \in L_0$, из оценок (8) и (11) следует, что $q^* = q(Q) \ge 0$, где

$$q(Q) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n} \ln\left|\frac{1}{Q'(\lambda_n)}\right|.$$

Так как $\rho''_n/\rho'_n \to 1$ при $n \to \infty$, $q(Q) < \infty$, с учетом (46) получаем, что $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}} \frac{\ln|a_j|}{\lambda_j} = 0$. Значит, $F \in D_0(\Lambda)$. Еще раз учитывая (46) и пользуясь формулой (3) для вычисления порядка ρ_R, имеем

$$\rho_R(F) = \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\ln\lambda_j}{\lambda_j} \ln\left|\frac{1}{Q'(\lambda_j)}\right| + \lim_{j\to\infty} \frac{\ln\lambda_j}{\lambda_j} \ln|q_n(\lambda_j)| + \lim_{j\to\infty} \frac{\ln\lambda_j}{\lambda_j}(\rho - q^*)\frac{\rho'_n}{\ln\rho'_n} = q(Q) + \rho - q^* = \rho.$$

Оценим теперь порядок $\rho_s(F)$ в полуполосе $S(a, t_0)$ $(a > \pi G(R))$. Последовательность $\Gamma = \{\mu_n\}$ нулей функции Q имеет плотность b (это следует из (43)), $G(R) < b$. При заданных $G(R)$ и a параметр b в теореме II выберем так, чтобы $G(R) < b < a/\pi$.

Далее, заметим, что

$$A_n \overset{df}{\equiv} \sum_{\lambda_j\in\Delta_n} a_j e^{\lambda_j s} = e^{(\rho-q^*)\frac{\rho'_n}{\ln\rho'_n}} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \frac{q_n(\xi)}{Q(\xi)} e^{s\xi}\, d\xi, \tag{56}$$

где γ_n — замкнутый контур, образованный дугами окружностей $K_{\rho'_n}$ и $K_{\rho''_n}$ из угла $\left\{\lambda : |\arg\lambda| \le \varphi_n < \frac{\pi}{4}\right\}$ и отрезками лучей $\{\lambda : |\arg\lambda| = \varphi_n\}$. Возьмем $\varphi_n = \varepsilon_0 \frac{H(\rho'_n)}{\rho'_n}$ $(0 < \varepsilon_0 < 1)$. Так как $H \in R$, то $\varphi_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$. Число ε_0 выберем так, чтобы $0 < \varphi_n < \pi/4$ $(n \ge 1)$.

Оценим на контуре γ_n функцию $\left|\frac{q_n(\xi)}{Q(\xi)}\right|$. Для этого, учитывая (43), применим сначала теорему 3 из [5]. Тогда найдется ρ'_{n_0} такое, что для всех $r \geq \rho'_{n_0}$

$$-\ln|Q(re^{\pm i\varphi_n})| \leq 6H(r)\ln\frac{r}{H(r)} + \frac{8\pi}{|\varphi_n|}\frac{H^2(r)}{r} + 3\mu_1 b.$$

Пусть $\rho'_n \leq r \leq \rho''_n$, $n \geq n_0$. Так как $\frac{H(r)}{r}$ убывает при возрастании r, имеем $H(r) \leq \frac{r}{\rho'_n}H(\rho'_n) \leq \frac{\rho''_n}{\rho'_n}H(\rho'_n)$. Значит, при $n \geq n_1$

$$-\ln|Q(re^{\stackrel{+}{-}i\varphi_n})| \leq 12H(\rho'_n)\ln\frac{\rho'_n}{H(\rho'_n)} + \frac{32\pi}{\varepsilon_0}H(\rho'_n) + 3\mu_1 b. \tag{57}$$

На дугах окружностей $K_{\rho'_n}$ и $K_{\rho''_n}$ контура γ_n выполняются оценки (45). Так как $H \in R$, то с учетом того, что $\rho''_n/\rho'_n \to 1$ при $n \to \infty$, из (45), (57) получаем, что для некоторой функции $w \in L_0$

$$-\ln|Q(\xi)| \leq w(\rho'_n), \quad \xi \in \gamma_n \quad (n \geq n_1).$$

Следовательно, применяя лемму 4, приходим к оценке

$$\max_{\xi\in\gamma_n}\left|\frac{q_n(\xi)}{Q(\xi)}\right| \leq e^{u(\rho'_n)+w(\rho'_n)} \quad (n \geq n_1),$$

где u, w — функции из L_0. Но тогда из (56) при $n \geq n_1$ имеем

$$|A_n| \leq 2\rho''_n e^{(\rho-q^*)\frac{\rho'_n}{\ln\rho'_n}+u(\rho'_n)+w(\rho'_n)} e^{\max\limits_{\xi\in\gamma_n}\operatorname{Re}(s\xi)}. \tag{58}$$

Пусть $s \in S(a,t_0)$, $\xi \in \gamma_n, s = \sigma + it$, $\xi = \xi_1 + i\xi_2$. Тогда

$$\Big|\sum_{\lambda_j<\rho'_{n_1}} a_j e^{\lambda_j s}\Big| \leq \sum_{\lambda_j<\rho'_{n_1}} |a_j| e^{\lambda_j\sigma} \leq \sum_{\lambda_j<\rho'_{n_1}} |a_j| = M, \tag{59}$$

$\operatorname{Re}(s\xi) = \sigma\xi_1 - t\xi_2 \leq \sigma\rho'_n + (|t_0|+a)|\operatorname{Im}\xi|$. Так как $|\operatorname{Im}\xi| \leq \rho''_n|\sin\varphi_n| \leq \rho'_n|\varphi_n| = \varepsilon_0\frac{\rho''_n}{\rho'_n}H(\rho'_n)$ при $\xi \in \gamma_n$, то

$$\max_{\xi\in\gamma_n}(s\xi) \leq \sigma\rho'_n + dH(\rho'_n), \quad s \in S(a,t_0),\ 0 < d < \infty\ (n \geq 1). \tag{60}$$

Следовательно, из (58)–(60) получаем, что

$$M_s(\sigma) = \max_{|t-t_0|\leq a}|F(\sigma+it)| \leq M + \sum_{n=n_1}^{\infty}\gamma_n e^{\sigma\rho'_n} \quad (\sigma < 0),$$

где $\gamma_n = \exp[\ln(2\rho''_n) + (\rho - q^*)\rho'_n/\ln\rho'_n + dH(\rho'_n) + u(\rho'_n) + w(\rho'_n)]$.

Введем в рассмотрение вспомогательный ряд

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n e^{s\rho'_n} \quad (s = \sigma + it).$$

Так как H, u, w принадлежат L_0, $\rho''_n/\rho'_n \to 1$ при $n \to \infty$, то согласно (3) порядок функции Φ в полуплоскости Π_0 равен $\rho_R(\Phi) = \rho - q^*$. Но $M_s(\sigma) \leq \Phi(\sigma) + M$. Значит, $\rho_s(F) \leq \rho - q^*$. Из теоремы 1 следует, что $\rho_R(F) \leq \rho_s(F) + q^*$. Так как $\rho_R(F) = \rho$, то $\rho_R(F) = \rho_s(F) + q^*$, и тем самым теорема 2 полностью доказана.

§ 3. Примеры и следствие

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность,

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Если $q(L) < \infty$ и

$$|L(x)| \le e^{g(x)} \quad (x \ge 0),\ g \in L_0, \tag{61}$$

то $\rho_R(F) < \infty$ тогда и только тогда, когда $\rho_s(F) < \infty$ для любой полуполосы $S(a, t_0)$ при $a > \tau$ (τ — тип функции $L(\lambda)$). Это следует из теоремы I в [4].

Приведем примеры последовательностей Λ, для которых реализуется условие (61).

1^0. Пусть последовательность Λ имеет конечную плотность при уточненном порядке

$$\rho(r) = 1 - (\ln\ln r)/\ln r \quad (r \ge e). \tag{62}$$

Это означает, что существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r^{\rho(r)}} = \Delta < \infty, \quad n(r) = \sum_{\lambda_r \le r} 1.$$

Индикатриса роста функции $L(\lambda)$ при данном уточненном порядке

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|L(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}}$$

равна $\pi\Delta|\sin\varphi|$ [3]. Так как $h(0) = 0$, $r^{\rho(r)} = \frac{r}{\ln r}$, оценка (61) выполняется.

2^0. Пусть последовательность Λ представима в виде объединения двух последовательностей $\Lambda_1 = \{\lambda'_n\}$ и $\Lambda_2 = \{\lambda''_n\}$, одна из которых, например Λ_1, имеет конечную плотность при уточненном порядке (62), а другая — конечную R-плотность $G(R)$. Убедимся, что «комбинированную» последовательность Λ можно расширить так, чтобы для соответствующей функции выполнялось условие (61). Действительно, согласно теореме II для любого $b > G(R)$ существует целая функция $Q_2(\lambda)$ экспоненциального типа πb такая, что $Q_2(\lambda''_n) = 0, Q'_2(\lambda''_n) \ne 0$, причем

$$\ln|Q_2(x)| \le g_2(x) \quad (x \ge 0),\ g_2 \in L_0.$$

В силу сказанного выше целая функция

$$Q_1(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda'_n}\right)^2\right)$$

удовлетворяет оценке $\ln|Q_1(x)| \le g_1(x)$ $(x \ge 0)$, $g_1 \in L_0$. Целая функция $Q(\lambda) = Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)$ при обычном порядке 1 имеет тип, равный πb. Для нее оценка (61), очевидно, выполняется.

Отметим, что для приведенных последовательностей Λ соответственно справедливы оценки $\rho_R \le \rho_s + q(L)$, $\rho_R \le \rho_s + q(Q_1) + q^*$. Они достаточно грубы и, скорее всего, не точны. Дело в том, что целые функции $L(\lambda)$ и $Q_1(\lambda)$ уточненного порядка (62) в отличие от функции $Q_2(\lambda)$ не обязаны иметь хороших оценок снизу вблизи вещественной оси.

Пусть область сходимости степенного ряда

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^{\lambda_n}\quad(\lambda_n\in\mathbb{N})\tag{63}$$

— единичный круг $D(0,1)=\{z:|z|<1\}$. Сделаем замену $z=e^s$ и рассмотрим функцию

$$F(s)=f(e^s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{\lambda_n s}\quad(s=\sigma+it).$$

Ясно, что $F\in D_0(\Lambda)$, где $\Lambda=\{\lambda_n\}$ $(\lambda_n\in\mathbb{N})$.

Введем следующую характеристику роста функции f:

$$\rho(f)=\varlimsup_{r\to1-}\frac{\ln\ln M_f(r)}{(1-r)^{-1}},\quad M_f(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|(r<1).$$

При $\operatorname{Re}s=\sigma\to0-$ имеем $|z|=r\to1-$, $|\sigma|=|\ln r|=1-r+o(1-r)$. Так как $M_f(e^\sigma)=M(\sigma)$, то $\rho_R(F)=\rho(f)$. Положим

$$\rho_\Delta(f)=\varlimsup_{r\to1-}\frac{\ln\ln M_\Delta(r)}{(1-r)^{-1}},\quad M_\Delta(r)=\max_{|\varphi-\varphi_0|\le a}|f(re^{i\varphi})|.$$

Далее, образом сектора $\Delta(a,\varphi)=\{z=re^{i\varphi}:0\le r<1,\ |\varphi-\varphi_0|\le a\}$ при отображении $z=e^s$ является некоторая полуполоса $S(a,t_0)=\{s=\sigma+it:|t-t_0|\le a,\ \sigma<0\}$. Видим, что $M_\Delta(r)=M_s(\sigma)$, так что $\rho_\Delta(f)=\rho_s(f)$. Далее, $\Lambda\subset\mathbb{N}$. Следовательно,

$$\int_0^1\frac{n(\lambda_n;t)}{t}\,dt=0.$$

Теперь можно сформулировать следствие, вытекающее из теоремы 1.

Следствие. *Пусть последовательность $\Lambda=\{\lambda_n\}$ $(\lambda_n\in\mathbb{N})$ имеет R-плотность $G(R)<1$. Тогда для любого $a>\pi G(R)$ порядки функции* (63) *в круге $D(0,1)$ и секторе $\Delta(a,\varphi_0)$ совпадают: $\rho(f)=\rho_\Delta(f)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ritt J. F.* On certain points in the theory of Dirichlet series // Amer. J. Math. 1928. V. 50, N 1. P. 73–86.
2. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
3. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
4. *Гайсин А. М.* Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуполосе // Мат. сб. 1982. Т. 117, № 3. С. 412–424.
5. *Гайсин А. М., Сергеева Д. И.* Целые функции с заданной последовательностью нулей, имеющие правильное поведение на вещественной оси. I // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 996–1008.

Статья поступила 3 мая 2005 г., окончательный вариант — 27 апреля 2007 г.

Гайсин Ахтяр Магазович, Сергеева Дина Ильдаровна
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН, ул. Чернышевского, 112, Уфа 450077
Gaisin@imat.rb.ru, SergeevaDI@yandex.ru