Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2008. Том 49, № 2

УДК 517.956.4

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С НЕГЛАДКИМИ СИМВОЛАМИ

В. А. Литовченко

Аннотация. В классе обобщенных функций конечного порядка установлена корректная разрешимость задачи Коши для параболических псевдодифференциальных систем, символы которых являются негладкими функциями в фиксированной точке $h \in \mathbb{R}^n$, порожденными однородными функциями порядка $\gamma > 0$, зависящими от времени.

Ключевые слова: задача Коши, псевдодифференциальная система, негладкий символ, свертыватель, обобщенная функция, матрицант.

Введение

Первые исследования задачи Коши для модельных псевдодифференциальных уравнений (ПДУ) с однородными символами осуществлены С. Д. Эйдельманом и Я. М. Дринем еще в начале 80-х гг. прошлого века [1]. Вскоре ими были рассмотрены уравнения более общего вида и получен ряд важных результатов, связанных с разрешимостью задачи Коши в классах гёльдеровых функций, шаудеровскими оценками и свойством стабилизации решений [2–4]. Точное асимптотическое поведение фундаментального решения (ФР) на бесконечности, которое оказалось не экспоненциальным, как в случае дифференциальных уравнений, а степенным, установлено М. В. Федорюком [5].

Следует отметить, что методика исследования свойств ФР, используемая в указанных работах, своей спецификой налагает ограничение на порядок однородности γ главного символа уравнения: $\gamma > 1$.

Применяя новый подход к исследованию свойств параметрикса задачи Коши для линейного параболического ПДУ с однородными символами, зависящими от временной и пространственной переменных, истолковывая при этом псевдодифференциальный оператор (ПДО) как гиперсингулярный интеграл, А. Н. Кочубей впервые получил точные оценки параметрикса в случае, когда размерность пространства больше единицы и $\gamma \geq 1$, и доказал существование, а в некоторых случаях и единственность решения задачи Коши в классе непрерывных ограниченных функций [6].

В случае обобщенных начальных данных конечного порядка задача Коши исследовалась в [7, 8], при этом были установлены ее разрешимость и принцип локализации. Но, к сожалению, эти результаты не совсем правильно обоснованы. Дело в том, что в указанных работах при исследовании существенным образом используется критерий сходимости в пространстве

$$\Phi = \left\{\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) \mid \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \exists c > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \ \left|D_x^k \varphi(x)\right| \leq c(1 + \|x\|)^{-(n+|k|+\gamma)}\right\};$$

$$\|\varphi\|_p = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{\sum_{l=0}^{p} (1 + \|x\|)^{n+\gamma+l} \sum_{|k|=l} \left|D_x^k \varphi(x)\right|\right\}, \quad \varphi \in \Phi, \ p \in \mathbb{Z}_+$$

(здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$; $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$), а также факт плотности пространства $D(\mathbb{R}^n)$ финитных функций из $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ в Φ. Оказывается, что ни сформулированный в [8] критерий сходимости, ни плотность $D(\mathbb{R}^n)$ в Φ не имеют места (отсутствие плотности пространства $D(\mathbb{R}^n)$ в Φ установлено в процессе рецензирования первого варианта настоящей статьи).

Что касается систем ПДУ с однородными символами, то автору известны только работы С. Д. Эйдельмана и Я. М. Дриня [9, 10], в которых переносятся результаты А. Н. Кочубея, фактически без доказательств (не считая схемы), на случай параболических систем уравнений, рассмотренных в [6].

Таким образом, на сегодняшний день в теории задачи Коши для систем ПДУ с негладкими символами остаются проблемными следующие вопросы: 1) развитие методики исследования свойств ФР для линейных параболических псевдодифференциальных систем с однородными символами; 2) решение для таких систем в случае $0 < \gamma < 1$; 3) строгое обоснование результатов, полученных в [7], и распространение их на случай параболических систем с негладкими символами.

Изучению этих вопросов и посвящена настоящая статья.

Отметим основное содержание работы. В п. 1 определяются пространства основных и обобщенных функций, используемых в дальнейшем при решении задачи Коши для линейных параболических систем ПДУ, символами дифференцирования которых являются функции вида $a_\gamma(\cdot - h)$, где $a_\gamma(\cdot)$ — однородная функция измерения $\gamma > 0$ определенной гладкости, зависящая от параметра $t \in [0; T]$, а h — произвольно фиксированная точка пространства $\mathbb{R}^n$; изучаются их топологические свойства. Исследование свойств ФР и установление корректной разрешимости задачи Коши в классе начальных обобщенных функций медленного роста выполнены в п. 2. Следует отметить, что линейной подстановкой $x - h = y$ исходная задача Коши сводится к соответствующей задаче с однородными символами, поэтому особого интереса с точки зрения техники исследования не представляет, но в случае смещения «акцента» негладкости символов с начала координат в другую точку пространства существенно изменяются функциональные свойства ФР. Оказывается, что степенной порядок убывания на бесконечности производных ФР по пространственной переменной не зависит уже от порядка дифференцирования (ср. с асимптотикой, полученной в [5]).

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за внимание к работе и ценные замечания.

1. Пространства основных и обобщенных функций

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_m := \{1; \dots; m\}$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}_+^n$ — соответствующая декартова степень множества $\mathbb{Z}_+$; $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, (x, y) — скалярное произведение в нем, $\|x\|^2 = (x, x)$; $\gamma > 0$ — фиксированное число; $M_p(\cdot) = (1 + \|\cdot\|)^{n+\gamma-1/p}$, $p \in \mathbb{N}$; $\Omega_{\alpha,h}(\cdot) =$

$((1+\|\cdot\|)^{-1}+\|h\|)^{-\alpha}$, $\alpha>0$, и h — фиксированная точка из $\mathbb{R}^n$. Обозначим

$$\Phi_h^\gamma = \big\{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)\mid \forall q\in\mathbb{Z}_+^n\,\exists c_q>0\,\forall x\in\mathbb{R}^n\ \big|D_x^q\varphi(x)\big|\le c_q(1+\|x\|)^{-(n+\gamma)}\Omega_{-|q|,h}(x)\big\}.$$

Введем в Φ_h^γ счетную систему норм

$$\|\varphi\|_p=\sup_{x\in\mathbb{R}^n,|q|\le p}\big\{M_p(x)\Omega_{|q|,h}(x)\big|D_x^q\varphi(x)\big|\big\},\quad p\in\mathbb{N},\tag{1}$$

и определим в нем сходимость следующим образом: $\{\varphi_\nu,\nu\ge 1\}\subset\Phi_h^\gamma$ сходится в Φ_h^γ к элементу $\varphi\in\Phi_h^\gamma$ при $\nu\to+\infty$ (в обозначениях $\varphi_\nu\xrightarrow[\nu\to+\infty]{\Phi_h^\gamma}\varphi$), если $\|\varphi_\nu-\varphi\|_p\underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow}0$ $(\forall p\in\mathbb{N})$.

Символом $\Phi_{p,h}^\gamma$ обозначим совокупность всех функций φ, имеющих непрерывные производные до порядка p включительно, для которых выражения $M_p(x)\Omega_{|q|,h}(x)|D_x^q\varphi(x)|$, $|q|\le p$, непрерывны и ограничены в $\mathbb{R}^n$. С нормой (1) пространство $\Phi_{p,h}^\gamma$ становится линейным нормированным, причем $\Phi_h^\gamma=\bigcap\limits_{p=1}^\infty\Phi_{p,h}^\gamma$. Последовательность $\{\varphi_\nu,\nu\ge1\}\subset\Phi_h^\gamma$ будем называть *ограниченной в* Φ_h^γ, если она ограничена в каждом пространстве $\Phi_{p,h}^\gamma$.

Лемма 1. *Пусть последовательность $\{\varphi_\nu,\nu\ge1\}\subset\Phi_{p,h}^\gamma$ равномерно сходится на каждом компакте $\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n$ вместе со своими производными до порядка p. Тогда ее предельное значение φ также является дифференцируемой функцией до порядка p, при этом если $\|\varphi_\nu\|_p\le c$, $\nu\ge1$, то $\varphi\in\Phi_{p,h}^\gamma$ и $\|\varphi\|_p\le c$.*

Доказательство. Дифференцируемость φ (до порядка p) следует из известной теоремы Больцано — Коши о почленном дифференцировании равномерно сходящейся последовательности. Докажем конечность $\|\varphi\|_p$. Зафиксируем точку $x_0\in\mathbb{R}^n$. Так как $M_p(\cdot)$ непрерывна в этой точке, то для каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $x\in U_\delta(x_0):=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\|x-x_0\|<\delta\}$ имеет место

$$M_p(x)<\varepsilon+M_p(x_0).\tag{2}$$

Далее, поскольку $\big\{D_x^q\varphi_\nu(x),\nu\ge1\big\}$, $|q|\le p$, равномерно сходящаяся на произвольном $\mathbb{K}$, то для любых $\eta>0$ и $q\in\mathbb{Z}_+^n$, $|q|\le p$, существует номер ν_0 такой, что для всех $\nu>\nu_0$ и x из $\mathbb{K}_1:=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\|x-x_0\|\le\delta_1\}$ при $\delta_1>\delta$ будет выполняться неравенство $\big|D_x^q(\varphi_\nu(x)-\varphi(x))\big|<\eta$. Умножив почленно последнее неравенство на $\Omega_{|q|,h}(x)$ и приняв во внимание то, что $\Omega_{|q|,h}(x)\le A$, где $A>0$ — константа, не зависящая от q, $|q|\le p$, и $x\in\mathbb{K}_1$, приходим к тому, что для каждого $\eta>0$ существует номер $\nu_0=\nu_0(\eta)$ такой, что для всех $\nu>\nu_0$, $x\in U_\delta(x_0)$ и $|q|\le p$ имеет место оценка $\Omega_{|q|,h}(x)|D_x^q(\varphi_\nu(x)-\varphi(x))|<\eta A$. Полагая здесь $\eta=\varepsilon((\varepsilon+M_p(x_0))A)^{-1}$, из (2) получим

$$M_p(x)\Omega_{|q|,h}(x)\big|D_x^q\varphi(x)\big|<\varepsilon+M_p(x)\Omega_{|q|,h}\big|D_x^q\varphi_\nu(x)\big|\le\varepsilon+\|\varphi_\nu\|_p\le\varepsilon+c,\ x\in U_\delta(x_0).$$

Учитывая произвольность выбора точки x_0, приходим к существованию $\|\varphi\|_p$, причем $\|\varphi\|_p\le\varepsilon+c$. Поскольку $\varepsilon>0$ произвольно, то $\|\varphi\|_p\le c$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть $\{\varphi_\nu,\nu\ge1\}\subset\Phi_{p,h}^\gamma$ поточечно стремится к нулю в $\mathbb{R}^n$ и фундаментальна по норме $\|\cdot\|_p$. Тогда она стремится к нулю и по этой норме.*

Доказательство. Поскольку $\{\varphi_\nu,\nu\ge1\}$ поточечно стремится к нулю в $\mathbb{R}^n$ и фундаментальна по $\|\cdot\|_p$, непосредственно из определения этой нормы и критерия сходимости Больцано — Коши имеем $D_x^k\varphi_\nu(x) \underset{\nu\to+\infty}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0$, $|k|\le p$, для каждого компакта $\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n$. Следовательно, и $D_x^k g_\mu(\nu,x) \underset{\mu\to+\infty}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} D_x^k\varphi_\nu(x)$, $|k|\le p$, $\nu\ge 1$, где $g_\mu(\nu,\cdot):=\varphi_\nu(\cdot)-\varphi_\mu(\cdot)$, $\mu\ge 1$.

Из фундаментальности $\{\varphi_\nu,\nu\ge 1\}$ по норме $\|\cdot\|_p$ следует существование такого номера ν_0 для каждого $\varepsilon>0$, что для всех $\mu>\nu_0$ будет $\|g_\mu(\nu,\cdot)\|_p<\varepsilon$ $(\forall\nu>\nu_0)$. Отсюда, исходя из утверждения леммы 1, приходим к выводу, что $\|\varphi_\nu\|_p \underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Следствие 1. *В пространстве Φ_h^γ нормы $\|\cdot\|_p$ попарно согласованы.*

Теорема 1. *Пространство $\Phi_{p,h}^\gamma$ полное относительно нормы $\|\cdot\|_p$.*

Доказательство. Из фундаментальности по $\|\cdot\|_p$ последовательности $\{\varphi_\nu,\nu\ge 1\}\subset\Phi_{p,h}^\gamma$ следует, во-первых, что она вместе со своими производными до порядка p включительно равномерно стремится на каждом компакте $\mathbb{K}$ к некоторой функции φ и соответствующим ее производным, во-вторых, ее ограниченность в $\Phi_{p,h}^\gamma$. Тогда согласно утверждению леммы 1 $\varphi\in\Phi_{p,h}^\gamma$. Последовательность разностей $\{\varphi_\nu-\varphi,\nu\ge 1\}$ также фундаментальна по $\|\cdot\|_p$ и стремится к нулю в каждой точке. Поэтому по лемме 2 $\|\varphi_\nu-\varphi\|_p \underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Теорема доказана.

Будем называть последовательность $\{\varphi_\nu(\cdot),\nu\ge 1\}\subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *правильно сходящейся* [11], если при всех $q\in\mathbb{Z}_+^n$ последовательность $\{D_x^q\varphi_\nu(x),\nu\ge 1\}$ сходится равномерно по x на каждом компактном множестве пространства $\mathbb{R}^n$.

Лемма 3. *Если последовательность $\{\varphi_\nu,\nu\ge 1\}\subset\Phi_h^\gamma$ ограничена в Φ_h^γ и правильно сходится к некоторой функции φ, то $\varphi\in\Phi_h^\gamma$ и $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\Phi_h^\gamma} \varphi$.*

Доказательство. Принадлежность φ пространству Φ_h^γ следует из леммы 1. Покажем, что $g_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\Phi_h^\gamma} 0$, где $g_\nu=\varphi-\varphi_\nu$. Отметим, что $\{g_\nu,\nu\ge 1\}$ ограничена по всем нормам $\|\cdot\|_p$ и правильно сходится к нулю. Зафиксируем произвольно p из $\mathbb{N}$ и рассмотрим $p'>p$. Поскольку $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} M_p(x)/M_{p'}(x)=0$, то для каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что неравенство $M_p(x)<\frac{\varepsilon}{c}M_{p'}(x)$ выполняется для всех $\|x\|>\delta$ (здесь c — константа, ограничивающая $\|g_\nu\|_{p'}$, $\nu\ge 1$). Таким образом, для указанных x и произвольного $q\in\mathbb{Z}_+^n$, $|q|\le p$,

$$M_p(x)\Omega_{|q|,h}(x)\left|D_x^q g_\nu(x)\right| \le (\varepsilon/c)M_{p'}(x)\Omega_{|q|,h}(x)\left|D_x^q g_\nu(x)\right| \le (\varepsilon/c)\|g_\nu\|_{p'}\le\varepsilon. \quad (3)$$

Для остальных x из $\mathbb{R}^n$ согласно правильной сходимости $\{g_\nu,\nu\ge 1\}$ к нулю имеем, что для каждого $\eta=\varepsilon/A>0$ существует $\nu_0\in\mathbb{N}$ такое, что для всех $\nu\ge\nu_0$ и $q\in\mathbb{Z}_+^n$, $|q|\le p$,

$$M_p(x)\Omega_{|q|,h}(x)\left|D_x^q g_\nu(x)\right| < \eta(1+\delta)^{n+\gamma-1/p}((1+\delta)^{-1}+\|h\|)^{-|q|}\le\varepsilon, \quad (4)$$

где $A=\max\limits_{|q|\le p}\{(1+\delta)^{n+\gamma-1/p}((1+\delta)^{-1}+\|h\|)^{-|q|}\}$.

Объединяя (3) и (4), получим неравенство $\|g_\nu\|_p<\varepsilon$, выполняющееся для каждого $\varepsilon>0$ и всех натуральных ν, превосходящих некий номер ν_0, зависящий от ε. Лемма доказана.

Теорема 2 (критерий сходимости). *Для сходимости последовательности $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Phi_h^\gamma$ в Φ_h^γ необходимо и достаточно, чтобы она была правильно сходящейся и ограниченной в этом пространстве.*

Доказательство. Достаточность следует из леммы 3. Докажем необходимость. Из сходимости последовательности $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\}$ по $\|\cdot\|_p$, $p \in \mathbb{N}$, вытекает ее ограниченность по каждой из этих норм (т. е. ограниченность в Φ_h^γ).

Далее, поскольку $\|\varphi_\nu - \varphi\|_p \underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $p \in \mathbb{N}$, то для каждого компакта $\mathbb{K}$ из $\mathbb{R}^n$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер ν_0 такой, что для всех $\nu \geq \nu_0$, $x \in \mathbb{K}$ и $q \in \mathbb{Z}_+^n$, $|q| \leq p$,

$$\left|D_x^q(\varphi_\nu(x) - \varphi(x))\right| < \varepsilon \max_{x\in\mathbb{K},|q|\leq p}\{M_p(x)\Omega_{|q|,h}(x)\}. \tag{5}$$

Учитывая, что (5) выполняется для всех $p \in \mathbb{N}$, приходим к утверждению теоремы.

Пусть $D(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех финитных функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда $D(\mathbb{R}^n)$ содержится в Φ_h^γ, причем плотно.

Доказательство этого факта сводится к проверке сходимости в Φ_h^γ к соответствующему элементу φ из Φ_h^γ последовательности $\{\mu(x/\nu)\varphi(x), \nu \geq 1\}$, содержащейся в $D(\mathbb{R}^n)$ (здесь $\mu(\cdot)$ — финитная функция, равная единице при $\|x\| \leq 1$ и нулю при $\|x\| \geq 2$), которую легко осуществить непосредственно с помощью установленного критерия сходимости в Φ_h^γ.

Теорема 3. *Пространство Φ_h^γ совершенно.*

Доказательство. Пусть M — произвольное ограниченное множество из Φ_h^γ; надо доказать, что M — компактное множество. Для этого достаточно убедиться в том, что каждая ограниченная последовательность $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset M$ содержит в себе правильно сходящуюся подпоследовательность.

Из ограниченности $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\}$ по норме $\|\cdot\|_1$ непосредственно следует равномерная ограниченность на $\mathbb{R}^n$ функций $|\partial_{x_j}\varphi_\nu(x)|$, $j \in \mathbb{N}_n$. Поэтому согласно теореме Арцела существует подпоследовательность $\{\varphi_{1\nu}, \nu \geq 1\}$, равномерно сходящаяся при $\|x\| \leq 1$. Так как эта последовательность ограничена и по норме $\|\cdot\|_2$, то равномерно ограниченными будут также и $\left|\partial^2_{x_i x_j}\varphi_{1\nu}(x)\right|$ на $\mathbb{R}^n$. Отсюда по той же теореме Арцела приходим к существованию $\{\varphi_{2\nu}, \nu \geq 1\} \subset \{\varphi_{1\nu}, \nu \geq 1\}$, для которой в области $\|x\| \leq 2$ равномерно сходятся значения первых производных: $\partial_{x_j}\varphi_{2\nu}(x)$.

Из сходимости функций $\varphi_{2\nu}$ при $\|x\| \leq 1$ и равномерной сходимости их производных при $\|x\| \leq 2$ следует равномерная сходимость этих функций и при $\|x\| \leq 2$.

Устремляя этот процесс в бесконечность, получим ограниченную в Φ_h^γ подпоследовательность $\{\varphi_{\nu\nu}, \nu \geq 1\} \subset M$, правильно сходящуюся к некоторой функции φ_0 из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Отсюда согласно теореме 4 $\varphi_{\nu\nu} \overset{\Phi_h^\gamma}{\underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow}} \varphi_0$. Теорема доказана.

Пусть S — пространство Шварца [12]. Очевидно, что $S \subset \Phi_h^\gamma$. Более того, вложение S в Φ_h^γ плотное, так как $D(\mathbb{R}^n)$ плотно вкладывается в S и Φ_h^γ.

Нетрудно убедиться, что в пространстве Φ_h^γ определены и непрерывны операции сложения, вычитания, умножения, сдвига и дифференцирования. При этом операция сдвига не только непрерывна, но и бесконечно дифференцируема, так как Φ_h^γ — совершенное пространство (см. [11]).

Символом $(\Phi_h^\gamma)'$ обозначим совокупность всех линейных непрерывных функционалов, определенных на Φ_h^γ, со слабой сходимостью. При этом $(\Phi_h^\gamma)' = \big(\lim\limits_{p\to+\infty} \operatorname{pr} \Phi_{h,p}^\gamma\big)' = \lim\limits_{p\to+\infty} \operatorname{ind}(\Phi_{h,p}^\gamma)'$, где $(\Phi_{h,p}^\gamma)'$ — пространство, топологически сопряженное с $\Phi_{h,p}^\gamma$. Итак, если $f \in (\Phi_h^\gamma)'$, то $f \in (\Phi_{h,p}^\gamma)'$ при некотором $p \in \mathbb{N}$, т. е. каждая обобщенная функция f из $(\Phi_h^\gamma)'$ имеет конечный порядок. Пространство $(\Phi_h^\gamma)'$ полное.

Пусть $\mathfrak{F}$ — совокупность всех элементов f из $(\Phi_h^\gamma)'$ таких, что $F[f]$ — мультипликатор в пространстве $F[\Phi_h^\gamma]$ (здесь F — оператор Фурье). Тогда согласно теореме 1 из [13] каждый элемент f из $\mathfrak{F}$ — свертыватель в Φ_h^γ, причем $F[f * \varphi](\xi) = \overline{F[f](\xi)} F[\varphi](\xi)$, $\varphi \in \Phi_h^\gamma$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, где «$*$» — операция свертки, а $\overline{(\cdot)}$ — комплексное сопряжение. Кроме того, так как в Φ_h^γ операция сдвига бесконечно дифференцируема, то для всех $f \in \mathfrak{F}$, $\varphi \in \Phi_h^\gamma$ и $x \in \mathbb{R}^n$ будет $(f * \varphi)(x) = \langle f, \varphi(x - \cdot)\rangle$.

Отметим также, что каждая финитная обобщенная функция является элементом класса $\mathfrak{F}$ [12, с. 145]. Более того, каждый элемент f из S — регулярный функционал из $\mathfrak{F}$ (т. е. $S \subset \mathfrak{F}$).

Теорема 4. *Преобразование Фурье элемента φ из Φ_h^γ убывает на бесконечности быстрее, чем степенным образом.*

Доказательство. Для любого $\tau \in \mathbb{N}$ и x_j такого, что $|x_j| \geq |x_k|$, $k \in \mathbb{N}_n$, $x \in \mathbb{R}^n$, верно равенство $F[\varphi](x) = (-(ix_j)^{-1})^\tau F\big[D_{\xi_j}^\tau \varphi\big](x)$, $\|x\| \geq 1, \varphi \in \Phi_h^\gamma$. Поскольку $\varphi \in \Phi_h^\gamma$, имеем

$$|F[\varphi](x)| \leq (2\pi)^{-n} \|x\|^{-\tau} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|D_{\xi_j}^\tau \varphi(\xi)\big|\, d\xi \leq c_1(h)\|x\|^{-\tau}, \quad \|x\| > 1,\ \tau \in \mathbb{N}.$$

Теорема доказана.

Обозначим через $\mathbf{\Phi}_h^\gamma = (\Phi_h^\gamma)^m$, $(\mathbf{\Phi}_h^\gamma)' = ((\Phi_h^\gamma)')^m$ декартовы степени (с натуральным показателем m) пространств Φ_h^γ и $(\Phi_h^\gamma)'$ с покомпонентной сходимостью соответственно в Φ_h^γ и $(\Phi_h^\gamma)'$; $\mathrm{P}(\mathbf{\Phi}_h^\gamma)$ — множество всех квадратных матриц порядка m со столбцами из $\mathbf{\Phi}_h^\gamma$ (также с поэлементной сходимостью в Φ_h^γ) и $\Lambda([0;T])$ — совокупность всех функций a_α: $[0;T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, таких, что 1) $a_\alpha(t, sx) = s^\alpha a_\alpha(t,x)$ ($\forall t \in [0;T]\ \forall s \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$); 2) $a_\alpha(t,\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ($\forall t \in [0;T]$); 3) $\big|D_x^k a_\alpha(t,x)\big| \leq c_k \|x\|^{\alpha - |k|}$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $t \in [0;T]$, $x \in M(k)$, где $M(k) := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, если $k \neq 0$, и $M(0) := \mathbb{R}^n$.

По функции a_α из класса $\Lambda([0;T])$ построим оператор $A_{a_\alpha,h} : \Phi_h^\gamma \to (\Phi_h^\gamma)'$ по правилу

$$(A_{a_\alpha,h}\varphi)(t,\cdot) = F^{-1}[a_\alpha(t,\xi - h)F[\varphi]](t,\cdot), \quad \varphi \in \Phi_h^\gamma,\ t \in [0;T], \tag{6}$$

где h — ранее фиксированный элемент из $\mathbb{R}^n$. Отметим, что этот оператор линейный и непрерывный в Φ_h^γ, поскольку такими являются операторы Фурье в этом пространстве. В случае, когда $a_\alpha(t,\cdot) \equiv \|\cdot\|^\alpha$, оператор $A_{a_\alpha,0}$ совпадает с известным оператором Рисса дробного дифференцирования [14]. Относительно продолжения $A_{a_\alpha,0}$ на более широкие классы функций и выражения его через гиперсингулярные интегралы см. [6, 14].

Исходя из определения $A_{a_\alpha,h}$ и утверждения теоремы 4, имеем

$$|(A_{a_\alpha,h}\varphi)(t,x)| \leq c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |a_\alpha(t,\xi - h)|\, |F[\varphi](\xi)|\, d\xi \leq c_\varphi < +\infty, \tag{7}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0;T], \quad \varphi \in \Phi_h^\gamma,$$

где $c_\varphi > 0$ — постоянная, не зависящая от t и x. Построим сопряженный с $A_{a_\alpha,h}$ оператор в Φ_h^γ, т. е. такой оператор $A^*_{a_\alpha,h}$, что для всех $\{f,\varphi\} \subset \Phi_h^\gamma$ выполняется равенство $\langle A_{a_\alpha,h}\varphi, f\rangle = \langle \varphi, A^*_{a_\alpha,h} f\rangle$.

Использовав регулярность функционала $A_{a_\alpha,h}\varphi$ из $\big(\Phi_h^\gamma\big)'$ при $\varphi \in \Phi_h^\gamma$, свойства элементов пространства Φ_h^γ, структуру (6) оператора $A_{a_\alpha,h}$, а также неравенство (7), изменяя при этом соответственно порядок интегрирования согласно теореме Фубини, приходим к равенству

$$\langle A_{a_\alpha,h}\varphi, f\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F[a_\alpha(t,\xi-h)F^{-1}[f](\xi)](t,x)\varphi(x)\,dx$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (A^*_{a_\alpha h} f)(t,x)\varphi(x)\,dx, \quad \{f,\varphi\} \subset \Phi_h^\gamma.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 5. *Для ПДО $A_{a_\alpha,h}$ в Φ_h^γ существует сопряженный оператор $A^*_{a_\alpha,h}$ такой, что $(A^*_{a_\alpha,h}f)(t,\cdot) = F[a_\alpha(t,\xi-h)F^{-1}[f](\xi)](t,\cdot)$, $t \in [0;T]$, $f \in \Phi_h^\gamma$.*

Обозначим через $A_{\mathscr{A}_{t,h}} = (A_{a^{ij},h})_{i,j=1}^m$ матричный ПДО в $\mathbf{\Phi}_h^\gamma$ с параметром $t \in [0;T]$, построенный по матрице-символу

$$\mathscr{A}_{t,h}(\cdot) = \left(a^{ij}(t,\cdot-h) := a_\alpha^{ij}(t,\cdot-h) + \sum_{l=1}^{g(i,j)} a^{ij}_{\alpha_l(i,j)}(t,\cdot-h)\right)_{i,j=1}^m,$$

где $g(i,j) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 < \alpha_1(i,j) \le \dots \le \alpha_{g(i,j)}(i,j) < \alpha < +\infty$ — произвольные фиксированные величины; a_α^{ij}, $a^{ij}_{\alpha_l(i,j)}$ — элементы из класса $\Lambda([0;T])$, $\{i,j\} \subset \mathbb{N}_m$, т. е. оператор, действие которого на элементы φ из $\mathbf{\Phi}_h^\gamma$ при каждом фиксированном t из $[0;T]$ задается формулой $(A_{\mathscr{A}_{t,h}}\varphi)(t,\cdot) = \left\{\sum\limits_{j=1}^m (A_{a^{ij},h}\varphi_j)(t,\cdot)\right\}_{i=1}^m$. Здесь $A_{a^{ij},h}$ — ПДО вида (6), построенный по символу a^{ij}.

2. Задача Коши

Рассмотрим систему

$$\partial_t u(t,x) = (A_{\mathscr{A}_{t,h}} u)(t,x), \quad (t,x) \in (0;T] \times \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

где $u = \mathrm{col}\{u_1,\dots,u_m\}$. Представим символ $\mathscr{A}_{t,h}$ в виде $\mathscr{A}_{t,h} = \mathscr{A}^0_{t,h} + \mathscr{A}^1_{t,h}$, где $\mathscr{A}^0_{t,h} := \big(a_\alpha^{ij}(t,\cdot-h)\big)_{i,j=1}^m$, и будем считать, что для (8) выполняются следующие условия:

(A) $a^{ij}_{\alpha_l}(i,j)(\cdot,x) \in C([0;T])$, $l \in \mathbb{N}_{g(i,j)}$, $\{i,j\} \subset \mathbb{N}_m$, $x \in \mathbb{R}^n$;

(B) $\big|a_\alpha^{ij}(t+\varepsilon,\xi) - a_\alpha^{ij}(t,\xi)\big| \le \nu(\varepsilon)(\|\xi\|^\alpha + c)$, $t \in [0;T]$, $\varepsilon \in (0;1)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\{i,j\} \subset \mathbb{N}_m$, где $\nu(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0;1)$, — бесконечно малая величина в 0, не зависящая от ξ, а $c > 0$ — константа, не зависящая от t,ε и ξ;

(C) $\max\limits_{j \in \mathbb{N}_m} \mathrm{Re}\,\lambda_j(t,\xi) \le -\delta_*\|\xi\|^\alpha$, $t \in [0;T]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ (здесь λ_j, $j \in \mathbb{N}_m$, — собственные числа матрицы $\mathscr{A}^0_{t,h}$, а $\delta_* > 0$ — константа, не зависящая от t и ξ).

Пусть теперь $\gamma := \min\limits_{\{i,j\} \subset \mathbb{N}_m} \{\gamma(i,j)\}$, где $\gamma(i,j) = \begin{cases} \alpha_1(i,j), & g(i,j) \ne 0 \\ \alpha, & g(i,j) = 0, \end{cases}$ $\{i,j\} \subset \mathbb{N}_m$. Если для системы (8) задать начальное условие

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in \big(\mathbf{\Phi}_h^\gamma\big)', \tag{9}$$

то *решением задачи Коши* (8), (9) назовем такую дифференцируемую по t функцию u, принадлежащую при каждом фиксированном $t \in (0;T]$ пространству $\mathbf{\Phi}_h^\gamma$, которая удовлетворяет системе (8) в обычном понимании, а начальному условию (9) в смысле слабой сходимости в $\big(\mathbf{\Phi}_h^\gamma\big)'$.

Перейдем теперь к решению задачи Коши (8), (9). Для этого сначала подействуем формально на систему (8) преобразованием Фурье относительно переменной x. Получим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром ξ:

$$\partial_t v(t,\xi) = (\mathscr{A}_{t,h} v)(t,\xi), \quad (t,\xi) \in (0;T] \times \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Пусть $\theta_h(t;\xi,\tau) = \big(\theta_h^{ij}(t;\xi,\tau)\big)_{i,j=1}^m$ — решение системы (10) для всех $\tau \in [0;T)$, $t \in (\tau;T]$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее в обычном понимании начальному условию

$$\theta_h(t;\xi,\tau)|_{t=\tau} = E \tag{11}$$

(здесь E — единичная матрица). Такое решение впредь будем называть *матрицантом системы* (10).

Лемма 4. *Для каждого* $\tau \in [0;T)$ *существует* $0 < \varepsilon \ll 1$ *такое, что для всех* $t \in (\tau, \tau+\varepsilon]$ *и* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *выполняется неравенство*

$$|\theta(t;\xi,\tau)| \le c \exp\{-\delta(t-\tau)\|\xi\|^\alpha\},$$

где $\theta \equiv \theta_0$, $\big|(b_{ij})_{i,j=1}^m\big| = \max\limits_{\{i,j\}\subset\mathbb{N}_m} |b_{ij}|$, *а* $c>0$, $\delta>0$ — *постоянные, не зависящие от* t, τ, ξ *и* ε.

Доказательство. Представим (10) при $h=0$ в виде

$$\partial_t \theta = \mathscr{A}_{t^*}^0(\xi)\theta + q(t,\xi), \tag{12}$$

где $q(t,\xi) = \big\{\big(\mathscr{A}_t^0(\xi) - \mathscr{A}_{t^*}^0(\xi)\big) + \mathscr{A}_t^1(\xi)\big\}\theta(t;\xi,\tau)$; $\mathscr{A}_t^0 \equiv \mathscr{A}_{t,0}^0$, $\mathscr{A}_t^1 \equiv \mathscr{A}_{t,0}^1$, а t^* — фиксированная точка из $[\tau;T]$.

Решив задачу Коши (12), (11), получим равенство

$$\theta(t;\xi,\tau) = e^{(t-\tau)\mathscr{A}_{t^*}^0(\xi)} + \int\limits_\tau^t e^{(t-\sigma)\mathscr{A}_{t^*}^0(\xi)} q(\sigma;\xi)\,d\sigma,$$

где $e^{(t-\tau)\mathscr{A}_{t^*}^0} = E + \sum\limits_{j=1}^\infty \big((t-\tau)\mathscr{A}_{t^*}^0\big)^j/j!$.

Согласно утверждению соответствующей леммы из [15, с. 78] имеем

$$\|e^{(t-\tau)\mathscr{A}_{t^*}^0(\xi)}\| \le e^{(t-\tau)\max\limits_{j\in\mathbb{N}_m} \mathrm{Re}\,\lambda_j(t^*,\xi)} \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \big(2(t-\tau)\big\|\mathscr{A}_{t^*}^0(\xi)\big\|\big)^j\right) \ \forall t \in [\tau;T],$$

где $\|\mathscr{A}\|$ — норма матрицы $\mathscr{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^m$. Отсюда, принимая во внимание условие (С) и свойства элементов матрицы $\mathscr{A}_{t^*}^0$, воспользовавшись при этом оценкой [15]

$$\max_{j\in\mathbb{N}_m} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|^2 \le \|\mathscr{A}\|^2 \le \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2,$$

приходим к

$$|e^{(t-\tau)\mathscr{A}_{t^*}^0(\xi)}| \le c_0 e^{-\frac{\delta_*}{2}(t-\tau)\|\xi\|^\alpha} \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \sup_{z>0}\{z^j e^{-z}\}\right) \le c_1 e^{-\frac{\delta_*}{2}(t-\tau)\|\xi\|^\alpha}, \tag{13}$$

$\tau \in [0;T)$, $\{t^*, t\} \subset [\tau;T]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, где константа $c_1 > 0$ не зависит от t, t^*, τ и ξ.

Используя неравенство (13), находим

$$|\theta(t;\xi,\tau)| \leq c_1 e^{-\frac{\delta_*}{2}(t-\tau)\|\xi\|^\alpha} + c_1 m \int\limits_\tau^t e^{-\frac{\delta_*}{2}(t-\sigma)\|\xi\|^\alpha} |q(\sigma,\xi)|\, d\sigma. \tag{14}$$

Поскольку

$$|q(t,\xi)| \leq m\big(\big|\mathscr{A}_t^0(\xi) - \mathscr{A}_{t^*}^0(\xi)\big| + \big|\mathscr{A}_t^1(\xi)\big|\big)|\theta(t;\xi,\tau)|,$$

то, учитывая условие (B) и свойства элементов матриц $\mathscr{A}_t^0(\cdot)$, $\mathscr{A}_t^1(\cdot)$, положив при этом $t^* = \tau$, для всех t из $(\tau, \tau+\varepsilon]$, $0 < \varepsilon \ll 1$, и $\xi \in \mathbb{R}^n$ получим

$$|q(t,\xi)| \leq m(\nu(\varepsilon)(\|\xi\|^\alpha + c) + \bar{c}\|\xi\|^{\gamma_*})|\theta(t;\xi,\tau)|, \quad \gamma_* < \alpha, \tag{15}$$

где c, $\bar{c}$ — положительные константы, не зависящие от t, τ, ξ и ε.

С помощью неравенства $\bar{c}\|\xi\|^{\gamma_*} \leq \nu(\varepsilon)\|\xi\|^\alpha$ при $\|\xi\| \geq (\bar{c}/\nu(\varepsilon))^{\frac{1}{\alpha-\gamma_*}}$ упростим правую часть (15) и, подставляя ее в (14), находим

$$|\theta(t;\xi,\tau)|e^{\frac{\delta_*}{2}(t-\tau)\|\xi\|^\alpha} \leq c_1\left(1 + m^2\nu(\varepsilon)(2\|\xi\|^\alpha + c)\int\limits_\tau^t e^{\frac{\delta_*}{2}(\sigma-\tau)\|\xi\|^\alpha}|\theta(\sigma;\xi,\tau)|\, d\sigma\right).$$

Теперь, использовав утверждение леммы 2 из [16, с. 300], получим

$$|\theta(t;\xi,\tau)|e^{\delta_*/2(t-\tau)\|\xi\|^\alpha} \leq c_1 + (c_1 m)^2\nu(\varepsilon)(2\|\xi\|^\alpha + c)\int\limits_\tau^t \exp\{(t-\sigma)c_1 m^2\nu(\varepsilon)$$
$$\times (2\|\xi\|^\alpha + c)\, d\sigma \leq c_2(1 + \exp\{c_1 m^2\nu(\varepsilon)(t-\tau)(2\|\xi\|^\alpha + c)\}).$$

Отсюда, зафиксировав $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\delta_* > 4c_1 m^2\nu(\varepsilon)$, приходим к такой оценке:

$$|\theta(t;\xi,\tau)| \leq c_3\exp\{-\delta_1(t-\tau)\|\xi\|^\alpha),\ \tau \in [0;T),\ t \in (\tau;\tau+\varepsilon],\ \|\xi\| \geq (\bar{c}/\nu(\varepsilon))^{\frac{1}{\alpha-\gamma_*}}, \tag{16}$$

где $c_3 > 0$, $\delta_1 > 0$ — постоянные, не зависящие от τ, t, ξ и ε. Если же $\|\xi\| < (\bar{c}/\nu(\varepsilon))^{\frac{1}{\alpha-\gamma_*}}$, то (16) также выполняется при соответствующем выборе константы c_3. Лемма доказана.

Следствие 2. *Существуют положительные постоянные c и δ такие, что $|\theta(t;\xi,\tau)| \leq c\exp\{-\delta(t-\tau)\|\xi\|^\alpha\}$ для всех $t \in (\tau;T]$, $\tau \in [0;T)$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$.*

Следствие становится очевидным, если учесть существование такого разбиения $\{t_j\}_{j=1}^k$ промежутка $(\tau;t]$, $t \in (\tau;T]$, на каждом элементе $(t_j;t_{j+1}]$ которого для θ выполняется неравенство (16) с оценивающими константами, не зависящими от t, t_j, t_{j+1} и ξ, а также одно из известных свойств матрицанта [17]: $\theta(t;\cdot,t_0) = \theta(t;\cdot,t_1)\theta(t_1;\cdot,t_0)$ $\forall\{t_0,t,t_1\} \subset (\tau;T]$.

Лемма 5. *Матрицант θ системы* (10) *при $h = 0$ бесконечно дифференцируем по пространственной переменной на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, причем существует $\delta > 0$ такое, что для всех $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$, $\tau \in [0;T)$, $t \in (\tau;T]$, $\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $t_0 \in (0;T]$ выполняется неравенство*

$$\big|D_\zeta^k\theta(t;t_0^{-1/\alpha}\zeta,\tau)\big| \leq c_k\|\zeta\|^{-|k|}\left(\sum_{l=1}^{|k|}\big((t-\tau)t_0^{-\hat{\gamma}/\alpha}\|\zeta\|^{\hat{\gamma}}\big)^l\right)\exp\big\{-\delta(t-\tau)t_0^{-1}\|\zeta\|^\alpha\big\},$$

где константа $c_k > 0$ *не зависит от* t, τ, ζ *и* t_0, *а* $\hat{\gamma} := \begin{cases} \alpha, & \|\zeta\| \geq 1, \\ \gamma, & \|\zeta\| < 1. \end{cases}$

Доказательство. Сначала докажем такое вспомогательное утверждение: если θ — матрицант системы (10), то $D_\xi^k \theta$ является решением задачи Коши

$$\partial_t v(t,\xi) = \mathscr{A}_t(\xi) v(t,\xi) + f(t,\xi), \quad (t,\xi) \in (\tau; T] \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad v|_{t=\tau} = 0, \tag{17}$$

где $f(t,\xi) = D_\xi^k(\mathscr{A}_t(\xi)\theta(t;\xi,\tau)) - \mathscr{A}_t(\xi) D_\xi^k \theta(t;\xi,\tau)$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$ и $\tau \in [0; T)$.

Для этого воспользуемся равенством [17]

$$\theta(t;\xi,\tau) = E + \sum_{r=1}^{\infty} \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \cdots \int_\tau^{t_{r-1}} \left(\prod_{j=1}^r \mathscr{A}_{t_j}(\xi) \right) dt_r \ldots dt_2 dt_1, \tag{18}$$

а также оценкой

$$\left| D_\xi^k \left(\prod_{j=1}^r \mathscr{A}_{t_j}(\xi) \right) \right| \leq (m 2^{|k|})^{r-1} (c_k)^r \|\xi\|^{r\hat{\gamma} - |k|}, \quad \{|k|, r\} \subset \mathbb{N} \tag{19}$$

(здесь $c_k > 0$ не зависит от t_j, ξ и r), в правильности которой убеждаемся непосредственно исходя из свойств элементов матрицы $\mathscr{A}_t(\cdot)$. Отметим, что неравенство (19) обеспечивает выполнение такой оценки:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \cdots \int_\tau^{t_{r-1}} \left| D_\xi^k \left(\prod_{j=1}^r \mathscr{A}_{t_j}(\xi) \right) \right| dt_r \ldots dt_2 dt_1 \leq (t-\tau) c_k \|\xi\|^{\hat{\gamma} - |k|} \\ \times \exp\{(t-\tau) c_k m 2^{|k|} \|\xi\|^{\hat{\gamma}}\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, \ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

из которой получаем бесконечную дифференцируемость по ξ матрицанта θ на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, а также то, что $\lim\limits_{t \to \tau+0} D_\xi^k \theta(t;\xi,\tau) = 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\tau \in [0; T)$ и $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$.

Продифференцируем формально по t ряд $D_\xi^k \theta$. Учитывая при этом (19), получим, что для всех $\tau \in [0; T)$, $t \in (\tau; T]$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$

$$\left| D_\xi^k \mathscr{A}_t(\xi) + \sum_{r=1}^{\infty} \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \cdots \int_\tau^{t_{r-1}} \left(D_\xi^k \left(\mathscr{A}_t(\xi) \prod_{j=1}^r \mathscr{A}_{t_j}(\xi) \right) \right) dt_r \ldots dt_2 dt_1 \right| \\ \leq c_k \|\xi\|^{\hat{\gamma} - |k|} (1 + m T c_k 2^{|k|} \|\xi\|^{\hat{\gamma}} \exp\{m T c_k 2^{|k|} \|\xi\|^{\hat{\gamma}}\}),$$

т. е. равномерную сходимость по t формально продифференцированного ряда.

Итак, существует частная производная по t матричной функции $D_\xi^k \theta(t;\xi,\tau)$, причем

$$\partial_t \big(D_\xi^k \theta(t;\xi,\tau) \big) = D_\xi^k \mathscr{A}_t(\xi) + \sum_{r=1}^{\infty} \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \cdots \int_\tau^{t_{r-1}} D_\xi^k \left(\mathscr{A}_t(\xi) \prod_{j=1}^r \mathscr{A}_{t_j}(\xi) \right) dt_r \ldots dt_2 dt_1$$

$$= D_\xi^k \mathscr{A}_t(\xi) + \sum_{r=1}^{\infty} \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \cdots \int_\tau^{t_{r-1}} \left(\sum_{l=0}^k C_k^l \left(D_\xi^l \mathscr{A}_t(\xi) D_\xi^{k-l} \left(\prod_{j=1}^r \mathscr{A}_{t_j}(\xi) \right) \right) \right) dt_r \ldots dt_2 dt_1$$

$$= \sum_{l=0}^{k} C_k^l D_\xi^l \mathscr{A}_t(\xi) D_\xi^{k-l} \left(E + \sum_{r=1}^{\infty} \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \cdots \int_\tau^{t_{r-1}} \left(\prod_{j=1}^{r} \mathscr{A}_{t_j}(\xi) \right) dt_r \dots dt_2 dt_1 \right)$$

$$= \sum_{l=0}^{k} C_k^l D_\xi^l \mathscr{A}_t(\xi) D_\xi^{k-l} \theta(t;\xi,\tau),\ \tau \in [0;T),\ t \in (\tau;T],\ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}.$$

Здесь $\sum\limits_{l=0}^{k} C_k^l = \sum\limits_{l_1=0}^{k_1} \cdots \sum\limits_{l_n=0}^{k_n} \left(\prod\limits_{j=1}^{n} C_{k_j}^{l_j} \right)$, $\{k,\, l\} \subset \mathbb{Z}_+^n$.

Таким образом, доказано, что $D_\xi^k \theta$ — решение задачи Коши (17) для всех $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$.

Зафиксируем произвольно t_0 из $(0;T]$ и умножим на $t_0^{-|k|/\alpha}$ систему, а также начальное условие задачи (17). Положив при этом $\xi = t_0^{-1/\alpha}\zeta$, получим такую задачу Коши:

$$\partial_t \big(D_\zeta^k \theta\big(t; t_0^{-1/\alpha}\zeta, \tau\big)\big) = \mathscr{A}_t\big(t_0^{-1/\alpha}\zeta\big) D_\zeta^k \theta\big(t; t_0^{-1/\alpha}\zeta, \tau\big) + \hat{f}(t,\zeta),$$

$$D_\zeta^k \theta\big(t; t_0^{-1/\alpha}\zeta, \tau\big)\big|_{t=\tau} = 0,$$

где $\hat{f}(t,\zeta) = D_\zeta^k \big(\mathscr{A}_t\big(t_0^{-1/\alpha}\zeta\big)\theta\big(t; t_0^{-1/\alpha}\zeta, \tau\big)\big) - \mathscr{A}_t\big(t_0^{-1/\alpha}\zeta\big) D_\zeta^k \theta\big(t; t_0^{-1/\alpha}\zeta, \tau\big)$, решение которой согласно формуле (45′) из [17, с. 407] имеет вид

$$D_\zeta^k \theta\big(t; t_0^{-1/\alpha}\zeta, \tau\big) = \int_\tau^t \theta\big(t; t_0^{-1/\alpha}\zeta, \tau\big) \theta^{-1}\big(\sigma; t_0^{-1/\alpha}\zeta, \tau\big) \hat{f}(\sigma,\zeta)\, d\sigma.$$

Поскольку [17] $E = \theta(\tau;\cdot,\tau) = \theta(\tau;\cdot,t)\theta(t;\cdot,\tau)$, $t \in (\tau;T]$, то $\theta^{-1}(t;\cdot,\tau) = \theta(\tau;\cdot,t)$, $t \in (\tau;T]$, $\tau \in [0;T)$. Учитывая это, приходим к рекуррентной формуле

$$D_\zeta^k \theta\big(t; t_0^{-1/\alpha}\zeta, \tau\big) = \int_\tau^t \theta\big(t; t_0^{-1/\alpha}\zeta, \sigma\big) \big(D_\zeta^k \big(\mathscr{A}_\sigma\big(t_0^{-1/\alpha}\zeta\big)\theta\big(\sigma; t_0^{-1/\alpha}\zeta, \tau\big)\big)$$

$$- \mathscr{A}_\sigma\big(t_0^{-1/\alpha}\zeta\big) D_\zeta^k \theta\big(\sigma; t_0^{-1/\alpha}\zeta, \tau\big)\big)\, d\sigma,$$

выполняющейся для всех $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$, $\tau \in [0;T)$, $t \in (\tau,T]$ и $\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Из этой формулы уже, приняв во внимание свойства элементов матрицы $\mathscr{A}_\sigma(\cdot)$, а также следствие 2, приходим к утверждению леммы.

Лемма 6. *Пусть* $P_r(t;\cdot,\tau) = \int\limits_\tau^t \int\limits_\tau^{t_1} \cdots \int\limits_\tau^{t_{r-1}} \left(\prod\limits_{j=1}^{r} \mathscr{A}_{t_j}(\cdot) \right) dt_r \dots dt_2 dt_1$, *а* $H_r(t;\cdot,\tau)$ *такая, что* $\theta(t;\cdot,\tau) = E + \sum\limits_{j=1}^{r-1} P_j(t;\cdot,\tau) + H_r(t;\cdot,\tau)$. *Тогда для всех* $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $\zeta \in M(k)$, $t \in (\tau;T]$ *и* $\tau \in [0;T)$

$$\big| D_\zeta^k H_r\big(t; t_0^{-1/\alpha}\zeta, \tau\big)\big| \le c\big(\big(t_0^{\check{\alpha}} B\big)^r / r!\big) \|\zeta\|^{r\hat{\gamma} - |k|} e^{B t_0^{\check{\alpha}} \|\zeta\|^{\hat{\gamma}}}, \quad t_0 = t - \tau,$$

где $c > 0$, $B > 0$ — *постоянные, не зависящие от* t, ζ *и* τ, *а* $\check{\alpha} := 0$ *при* $t_0 \in (0;1)$ *и* $\check{\alpha} := 1 - \gamma/\alpha$, *если* $t_0 \ge 1$.

Доказательство. Обозначим через P_r^{ij}, $\{i,j\} \subset \mathbb{N}_m$, элементы матрицы P_r, $r \in \mathbb{N}$. Исходя из определения умножения матриц, убеждаемся в том, что

$$P_r^{ij}(t;\cdot,\tau) = \sum_{q=1}^{m^{r-1}} \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \cdots \int_\tau^{t_{r-1}} b_q^{ij}(t_1,\dots,t_r;\cdot)\, dt_r \dots dt_2 dt_1,$$

где b_q^{ij} — выражения вида $\prod\limits_{s=1}^{r} a^{i_s j_s}(t_s,\cdot)$, а $a^{i_s j_s}(t_s,\cdot)$ — элементы матрицы $\mathscr{A}_{t_s}(\cdot)$. Поскольку $b_q^{ij}(t_1,\ldots,t_r;\cdot)=\sum\limits_{\mu} R_\mu^q(t_1,\ldots,t_r;\cdot)$ — сумма с конечным количеством слагаемых R_μ^q, каждый из которых является однородной функцией по пространственной переменной (как произведение однородных функций) измеримости β, $r\gamma\le\beta\le r\alpha$, с теми же свойствами, что и элементы матрицы $\mathscr{A}_t$, то для $\zeta\in\mathbb{R}^n$, $t\in(\tau;T]$

$$P_r^{ij}\big(t;t_0^{-1/\alpha}\zeta,\tau\big)=t_0^{-\frac{\beta}{\alpha}}\sum_{q=1}^{m^{r-1}}\sum_{\mu}\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\tau}^{t_1}\cdots\int\limits_{\tau}^{t_{r-1}}R_\mu^q(t_1,\ldots,t_r;\zeta)\,dt_r\ldots dt_2dt_1$$

и соответственно для всех $k\in\mathbb{Z}_+^n$

$$D_\zeta^k P_r^{ij}\big(t;t_0^{-1/\alpha}\zeta,\tau\big)=t_0^{-\frac{\beta}{\alpha}}\sum_{q=1}^{m^{r-1}}\sum_{\mu}\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\tau}^{t_1}\cdots\int\limits_{\tau}^{t_{r-1}}D_\zeta^k R_\mu^q(t_1,\ldots,t_r;\zeta)\,dt_r\ldots dt_2dt_1.$$

Учитывая структуру R_μ^q и свойства элементов матрицы $\mathscr{A}_t$, получим

$$\big|D_\zeta^k R_\mu^q(t_1,\ldots,t_r;\zeta)\big|\le c_k\|\zeta\|^{r\hat\gamma-|k|},\quad \zeta\in M(k),\ k\in\mathbb{Z}_+^n,\ r\in\mathbb{N},$$

здесь константа не зависит от ζ и $t_j, j\in\mathbb{N}_r$.

Итак, для $\zeta\in M(k)$, $k\in\mathbb{Z}_+^n$, $r\in\mathbb{N}$, $t\in(\tau;T]$ и $\tau\in[0;T)$

$$\big|D_\zeta^k P_r\big(t;t_0^{-1/\alpha}\zeta,\tau\big)\big|\le\bar c_k\big(\big(Bt_0^{\check\alpha}\big)^r/r!\big)\|\zeta\|^{r\hat\gamma-|k|},\tag{20}$$

при этом положительные постоянные $\bar c_k$ и B не зависят от r,t,τ и ζ.

Неравенство (20) позволяет установить оценку

$$\sum_{j=r}^{+\infty}\big|D_\zeta^k P_j\big(t;t_0^{-1/\alpha}\zeta,\tau\big)\big|\le\bar c_k\big(\big(Bt_0^{\check\alpha}\big)^r/r!\big)\|\zeta\|^{r\hat\gamma-|k|}e^{Bt_0^{\check\alpha}\|\zeta\|^{\hat\gamma}}$$

для всех r, t, ζ, τ и k, изменяющихся указанным образом. Отсюда согласно теореме о почленном дифференцировании ряда и структуре (18) матрицанта θ приходим к утверждению леммы 6.

Теорема 6. *Пусть $G_h(t;x,\tau):=F^{-1}[\theta_h](t;x,\tau)$, $t\in(\tau;T]$, $\tau\in[0;T)$, $x\in\mathbb{R}^n$. Тогда для всех $\nu\in\mathbb{Z}_+^n$*

$$\big|D_x^\nu G_h(t;x,\tau)\big|\le c_1t_0^{\gamma/\alpha}\big(t_0^{1/\alpha}+\|x\|\big)^{-(n+\gamma)}\big(\big(t_0^{1/\alpha}+\|x\|\big)^{-1}+\|h\|\big)^{|\nu|};\tag{21}$$

$$\big|\partial_t D_x^\nu G_h(t;x,\tau)\big|\le c_2t_0^{\gamma-\gamma^*/\alpha}\big(t_0^{1/\alpha}+\|x\|\big)^{-(n+\gamma)}\big(\big(t_0^{1/\alpha}+\|x\|\big)^{-1}+\|h\|\big)^{|\nu|},\tag{22}$$

где $c_1>0$, $c_2>0$ — постоянные, не зависящие от t, τ и x; $t_0=t-\tau$, γ^* равно α, при $t_0\in(0;1)$ и γ при $t_0\ge1$.

Доказательство. В интеграле

$$D_x^\nu G_h(t;x,\tau)=i^{|\nu|}(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\xi^\nu e^{i(x,\xi)}\theta_h(t;\xi,\tau)\,d\xi,\quad \xi^\nu=\prod_{j=1}^n\xi_j^{\nu_j},\ i^2=-1,$$

сделаем замену $\xi_j-h_j=t_0^{-1/\alpha}\zeta_j$, $j\in\mathbb{N}_n$. Предположив, что $z=t_0^{-1/\alpha}x$, получим

$$D_x^\nu G_h(t;x,\tau)=i^{|\nu|}(2\pi)^{-n}e^{i(x,h)}\sum_{|l|=0}^{|\nu|}C_\nu^l t^{-(n+|l|)/\alpha}h^{\nu-l}\Psi_l(t;z,\tau),\tag{23}$$

где $\Psi_l(t;z,\tau)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\zeta^l e^{i(z,\zeta)}\theta\big(t;t_0^{-1/\alpha}\zeta,\tau\big)\,d\zeta$.

Пусть η_0 из $D(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\eta_0(\zeta)=1$ при $\|\zeta\|\le 1$ и $\eta_0(\zeta)=0$, если $\|\zeta\|\ge 2$. Обозначим $\eta_1=1-\eta_0$, $\Psi_l^k(t;z,\tau)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_k(\zeta)\zeta^l e^{i(z,\zeta)}\theta\big(t;t_0^{-1/\alpha}\zeta,\tau\big)\,d\zeta$, $k\in\{0;1\}$. Тогда $\Psi_l=\Psi_l^0+\Psi_l^1$. Отметим, что

$$\Psi_l^0(t;z,\tau)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_0(\zeta)\zeta^l e^{i(z,\zeta)}E\,d\zeta+\sum_{j=1}^{r-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_0(\zeta)\zeta^l e^{i(z,\zeta)}P_j\big(t;t_0^{-1/\alpha}\zeta,\tau\big)\,d\zeta$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_0(\zeta)\zeta^l e^{i(z,\zeta)}H_r\big(t;t_0^{-1/\alpha}\zeta,\tau\big)\,d\zeta:=\Psi_l^{0,0}+\sum_{j=1}^{r-1}\Psi_l^{0,j}+\Psi_l^{0,r}.$$

Поскольку каждый элемент матрицы $\Psi_l^{0,0}(\cdot)$ принадлежит S, то $\big|\Psi_l^{0,0}(z)\big|\le c\|z\|^{-r}$, $r\in\mathbb{N}$, $\|z\|\ge 1$, где константа не зависит от z.

Зафиксируем произвольно $k\in\mathbb{N}_{(r-1)}$ и рассмотрим $\Psi_l^{0,k}=\big(\Psi_{ij}^k\big)_{i,j=1}^m$. В соответствии с обозначениями из доказательства леммы 6 имеем

$$\Psi_{ij}^k(t;z,\tau)=\sum_{q=1}^{m^{k-1}}\sum_{\mu}t_0^{-\frac{\beta}{\alpha}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_0(\zeta)\zeta^l e^{i(z,\zeta)}$$
$$\times\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\tau}^{t_1}\dots\int\limits_{\tau}^{t_{k-1}}R_\mu^q(t_1,\dots,t_k;\zeta)\,dt_k\dots dt_2dt_1d\zeta=:\sum_{q=1}^{m^{k-1}}\sum_{\mu}\Psi_\mu^q(t;z,\tau),\ k\gamma\le\beta<k\alpha.$$

Далее, пусть $\varphi\in D(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(z)=0$ при $\|z\|\le 1$, $\psi(z):=\varphi(-z)$. Тогда

$$\big\langle\Psi_\mu^q,\varphi\big\rangle=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_0(\zeta)a_l(t;\zeta,\tau)\varphi(z)e^{i(z,\zeta)}\,d\zeta dz=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_0(\zeta)a_l(t;\zeta,\tau)\tilde{\psi}(\zeta)\,d\zeta$$
$$=\langle\tilde{a}_l(t;\cdot,\tau),\psi(\cdot)\rangle-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_1(\zeta)a_l(t;\zeta,\tau)\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}(L^N e^{i(z,\zeta)})\varphi(z)\,dz\Bigg)d\zeta,$$

где $a_l(t;\zeta,\tau):=t_0^{-\frac{\beta}{\alpha}}\zeta^l\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\tau}^{t_1}\cdots\int\limits_{\tau}^{t_{k-1}}R_\mu^q(t_1,\dots,t_k;\zeta)\,dt_k\dots dt_2dt_1$, а $\tilde{a}_l$ — преобразование Фурье a_l в смысле обобщенных функций из S'; $L=-i\|z\|^{-2}\sum\limits_{j=1}^n z_j\partial_{\zeta_j}$, $Le^{i(z,\zeta)}=e^{i(z,\zeta)}$ (см. [5]).

Разложим функцию $a_l(t;\zeta,\tau)$, $\|\zeta\|=1$, в ряд по сферическим гармоникам:

$$a_l(t;\zeta,\tau)=t_0^{-\frac{\beta}{\alpha}}\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\tau}^{t_1}\cdots\int\limits_{\tau}^{t_{k-1}}\Bigg(\sum_{\nu=0}^{+\infty}\sum_{\eta=1}^{\delta_\nu}g_{\nu\eta}(t_1,\dots,t_k)Y_{\nu\eta}(\zeta)\Bigg)dt_k\dots dt_2dt_1,$$

где $\{Y_{\nu\eta}\}_{\eta=1}^{\delta_\nu}$ — нормированный базис из сферических гармоник порядка ν; $g_{\nu\eta}(t_1,\dots,t_k)=\int\limits_{S^{n-1}}\xi^l R_\mu^q(t_1,\dots,t_k;\xi)\overline{Y_{\nu\eta}(\xi)}\,d\xi$, S^{n-1} — сфера единичного радиуса в пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. [18,19]). Тогда для всех $\sigma\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$

$$a_l(t;\sigma,\tau)=t_0^{-\frac{\beta}{\alpha}}\|\sigma\|^{\beta+|l|}\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\tau}^{t_1}\dots\int\limits_{\tau}^{t_{k-1}}\Bigg(\sum_{\nu=0}^{+\infty}\sum_{\eta=1}^{\delta_\nu}g_{\nu\eta}(t_1,\dots,t_k)Y_{\nu\eta}(\sigma/\|\sigma\|)\Bigg)dt_k\dots dt_2dt_1.$$

Известно [19, 20], что преобразование Фурье функций $\|\sigma\|^{\beta+|l|}Y_{\nu\eta}(\sigma/\|\sigma\|)$ равно

$$(-i)^{\nu}2^{n+\beta+|l|}\pi^{n/2}Y_{\nu\eta}(z/\|z\|)\|z\|^{-n-\beta-|l|}\Gamma((n+\nu+\beta+|l|)/2)/\Gamma((\nu-\beta-|l|)/2),$$

если $\nu-\beta-|l|\notin\{0;-2;-4;\dots\}$. Здесь $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. В противном случае, возможном только для конечного числа значений ν, указанное преобразование Фурье есть обобщенная функция, сосредоточенная в нуле [19, с. 49]. Тогда при $\|z\|\geq 1$

$$\tilde{a}_l(t;z,\tau)=t_0^{-\frac{\beta}{\alpha}}\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\tau}^{t_1}\cdots\int\limits_{\tau}^{t_{k-1}}\Biggl(\sum_{\nu=\nu_0}^{+\infty}\sum_{\eta=1}^{\delta_\nu}g_{\nu\eta}(t_1,\dots,t_k)(-i)^{\nu}2^{n+\beta+|l|}\pi^{n/2}\times Y_{\nu\eta}(z/\|z\|)$$
$$\times\|z\|^{-n-\beta-|l|}\Gamma((n+\nu+\beta+|l|)/2)/\Gamma((\nu-\beta-|l|)/2)\Biggr)dt_k\dots dt_2dt_1,\ \nu_0\geq 0.$$

Оценим последний ряд. Для этого воспользуемся следующими оценками из [6, 20]:

$$|Y_{\nu\eta}(z/\|z\|)|\leq c_0\nu^{(n-2)/2};\ \delta_\nu\leq c_1\nu^{n-2};\ \frac{\Gamma((n+\nu+\beta+|l|)/2)}{\Gamma((\nu-\beta-|l|)/2)}\leq c_2\nu^{n/2+\beta+|l|};$$
$$|g_{\nu\eta}(t_1,\dots,t_k)|\leq\nu^{-2r}\sqrt{\int\limits_{S^{n-1}}\bigl|\delta^r\bigl(\zeta^lR^q_\mu(t_1,\dots,t_k;\zeta)\bigr)\bigr|\,d\zeta},\quad r\in\mathbb{Z}_+,$$

где δ — сферический оператор Лапласа, а также неравенством

$$\bigl|\delta^r\bigl(\zeta^lR^q_\mu(t_1,\dots,t_k;\zeta)\bigr)\bigr|\leq c_r,\quad\zeta\in S^{n-1},$$

здесь константа не зависит от t_j, $j\in\mathbb{N}_k$, и ζ, которое устанавливается непосредственно исходя из структуры R^q_μ, свойств элементов матрицы $\mathscr{A}_t$ и того, что на S^{n-1} оператор δ совпадает с обычным оператором Лапласа. Получим

$$\Biggl|\sum_{\nu=1}^{\delta_\nu}g_{\nu\eta}(t_1,\dots,t_k)\Gamma((n+\nu+\beta+|l|)/2)/\Gamma((\nu-\beta-|l|)/2)Y_{\nu\eta}(z/\|z\|)\Biggr|$$
$$\leq c_3\nu^{|l|+\beta+2n-2r-3}.$$

Отсюда уже при $\|z\|\geq 1$, предположив, что $2r\geq|l|+2n+[\beta]$, придем к

$$|\tilde{a}_l(t;z,\tau)|\leq c_4t_0^{k-\beta/\alpha}\|z\|^{-(n+\beta+|l|)},\quad t\in(\tau;T],\ \tau\in[0;T),\tag{24}$$

где константа не зависит от τ, t и z.

Далее, учитывая, что $\eta_1(\zeta)=0$ при $\|\zeta\|\leq 1$, и равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(L^Ne^{i(z,\zeta)})\varphi(z)\,dz=(-i)^N\sum_{|j|=N}D^j_\zeta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\|z\|^{-2N}z^je^{i(z,\zeta)}\varphi(z)\,dz,$$

после интегрирования получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_1(\zeta)a_l(t;\zeta,\tau)\Biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^n}(L^Ne^{i(z,\zeta)})\varphi(z)\,dz\Biggr)d\zeta$$
$$=i^N\sum_{|j|=N}\int\limits_{\mathbb{R}^n}D^j_\zeta(\eta_1(\zeta)a_l(t;\zeta,\tau))\Biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\|z\|^{-2N}z^je^{i(z,\zeta)}\varphi(z)\,dz\Biggr)d\zeta.$$

Поскольку $D_\zeta^j(\eta_1(\zeta)a_l(t;\zeta,\tau)) = \eta_1(\zeta)D_\zeta^j a_l(t;\zeta,\tau)+Q(t;\zeta,\tau)$, где $Q(t;\zeta,\tau)=0$ при $\|\zeta\|\leq 1$ и $\|\zeta\|\geq 2$ для всех $t\in(\tau;T]$, $\tau\in[0;T)$, а функция $D_\zeta^j a_l(t;\zeta,\tau)$ однородная (по пространственной переменной) измеримости $|l|+\beta-N<-n$, согласно теореме Фубини

$$\langle\Psi_\mu^q,\varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\tilde{a}_l(t;-\zeta,\tau)\varphi(\zeta)\,d\zeta$$
$$-\,i^N\sum_{|j|=N}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}D_\zeta^j(\eta_1(\zeta)a_l(t;\zeta,\tau))e^{i(z,\zeta)}\,d\zeta\Bigg)\|z\|^{-2N}z^j\varphi(z)\,dz.$$

Таким образом, при $\|z\|\geq 1$

$$\Psi_\mu^q(t;z,\tau)=\tilde{a}_l(t;z,\tau)-i^N\|z\|^{-2N}\sum_{|j|=N}z^j\int\limits_{\mathbb{R}^n}D_\zeta^j(\eta_1(\zeta)a_l(t;\zeta,\tau))e^{i(z,\zeta)}\,d\zeta. \qquad (25)$$

Учитывая, что $D_\zeta^j\eta_1(\zeta)=D_\zeta^j\eta_0(\zeta)$, $|j|\neq 0$, $\eta_0\in D$, а

$$\big|D_\zeta^j a_l(t;\zeta,\tau)\big|\leq c_4 t_0^{k-\beta/\alpha}\|\zeta\|^{k\hat{\gamma}+|l|-|j|},\quad \zeta\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\ t\in(\tau;T],\ \tau\in[0;T),$$

получим

$$\big|D_\zeta^j(\eta_1(\zeta)a_l(t;\zeta,\tau))\big|\leq c_5 t^{k-\beta/\alpha}\|\zeta\|^{k\alpha+|l|-N},\quad \|\zeta\|>1,\ |j|=N.$$

Таким образом,

$$\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^n}D_\zeta^j(\eta_1(\zeta)a_l(t;\zeta,\tau))e^{i(z,\zeta)}\,d\zeta\Bigg|\leq c_6 t_0^{k-\beta/\alpha},\quad l\in\mathbb{Z}_+^n,\ z\in\mathbb{R}^n,\ t\in(\tau;T],$$

при $N=n+[k\alpha]+1+|l|$, где $c_6>0$ — постоянная, не зависящая от t, τ и z.

Отсюда, а также из (24) и (25) приходим сначала к

$$\big|\Psi_\mu^q(t;z,\tau)\big|\leq c_7 t_0^{k-\beta/\alpha}\|z\|^{-(n+k\gamma+|l|)},\quad \big|\Psi_{ij}^k(t;z,\tau)\big|\leq c_8 t_0^{k-\beta/\alpha}\|z\|^{-(n+k\gamma+|l|)},$$

а затем уже и к

$$\big|\Psi_l^{0,k}(t;z,\tau)\big|\leq c_9 t_0^{k-\beta/\alpha}\|z\|^{-(n+k\gamma+|l|)},\quad k\in\mathbb{N}_{(r-1)},$$

при $\|z\|\geq 1$, $t\in(\tau;T]$ и $\tau\in[0;T)$ (здесь $c_9>0$ — постоянная, не зависящая от t, z и τ).

Оценим теперь $\Psi_l^{0,r}(t;z,\tau)$, $t\in(\tau;T]$, $\tau\in[0;T)$, $\|z\|\geq 1$. Пусть $z=(z_1,\dots,z_n)$; рассмотрим номер j такой, что $|z_j|\geq|z_i|$, $i\in\mathbb{N}_n$. Тогда $\|z\|\leq\sqrt{n}|z_j|$. Проинтегрируем по частям k раз интеграл $\Psi_l^{0,r}$ по переменной ζ_j:

$$\Psi_l^{0,r}(t;z,\tau)=(-iz_j)^{-k}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{i(z,\zeta)}\partial_{\zeta_j}^k\big\{\eta_0(\zeta)\zeta^l H_r\big(t;t_0^{-1/\alpha}\zeta,\tau\big)\big\}\,d\zeta$$
$$=(-iz_j)^{-k}\Bigg(\int\limits_{\|\zeta\|\leq 2}e^{i(z,\zeta)}\eta_0(\zeta)\partial_{\zeta_j}^k\big\{\zeta^l H_r\big(t;t_0^{-1/\alpha}\zeta,\tau\big)\big\}\,d\zeta+\sum_{q=1}^k C_k^q\int\limits_{1\leq\|\zeta\|\leq 2}e^{i(z,\zeta)}$$
$$\times\,\partial_{\zeta_j}^q\eta_0(\zeta)\partial_{\zeta_j}^{k-q}\big\{\zeta^l H_r\big(t;t_0^{-1/\alpha}\zeta,\tau\big)\big\}\,d\zeta\Bigg)=:(-iz_j)^{-k}\Bigg(\Psi_l^{0,r,0}+\sum_{q=1}^k C_k^q\Psi_l^{0,r,q}\Bigg).$$

Сначала оценим выражение

$$\left|\partial^k_{\zeta_j}\left(\zeta^l H_r\left(t;t_0^{-1/\alpha}\zeta,\tau\right)\right)\right| = \left|\sum_{q=0}^{k} C^q_k \partial^q_{\zeta_j}\zeta^l \partial^{k-q}_{\zeta_j} H_k\left(t;t_0^{-1/\alpha}\zeta,\tau\right)\right|.$$

Воспользовавшись утверждением леммы 6, приняв при этом во внимание неравенство

$$\left|\partial^q_{\zeta_j}\zeta^l\right| \le c_{q,l}\|\zeta\|^{|l|-q}, \tag{26}$$

получим

$$\left|\partial^k_{\zeta_j}\left(\zeta^l H_r\left(t;t_0^{-1/\alpha}\zeta,\tau\right)\right)\right| \le \bar c_{k,l} t_0^{r\check\alpha}\|\zeta\|^{r\hat\gamma+|l|-k}, \quad \|\zeta\|\le 2,\ t\in(\tau;T],\ \tau\in[0;T).$$

Отсюда для всех $t\in(\tau;T]$, $\tau\in[0;T)$ и $\|z\|\ge 1$

$$\left|\Psi_l^{0,r,q}(t;z,\tau)\right| \le c t_0^{r\check\alpha}\int\limits_{1\le\|\zeta\|\le 2}\|\zeta\|^{r\alpha+|l|+q-k}\,d\zeta = \bar c_1 t_0^{r\check\alpha}, \quad q\in\mathbb{N}_k,\ k\in\mathbb{N};$$

$$\left|\Psi_l^{0,r,0}(t;z,\tau)\right| \le \bar c_2 t_0^{r\check\alpha}\left(\int\limits_{\|\zeta\|<1}\|\zeta\|^{r\gamma+|l|-k}\,d\zeta + \int\limits_{1\le\|\zeta\|\le 2}\|\zeta\|^{r\alpha+|l|-k}\,d\zeta\right).$$

Для обеспечения сходимости интеграла в последнем неравенстве положим $k=n+|l|+[(r-1)\gamma]$, а в качестве $r-1$ выберем наименьшее из натуральных m, для которых выполняется $[m\gamma]\ge\gamma$. Тогда

$$\left|\Psi_l^{0,r}(t;z,\tau)\right| \le \bar c_3\|z\|^{-n-|l|-\gamma}, \quad \|z\|\ge 1,\ t\in(\tau;T],\ \tau\in[0;T),\ \bar c_3=\bar c_3(T).$$

Таким образом,

$$\left|\Psi_l^{0}(t;z,\tau)\right| \le \bar c_4\|z\|^{-n-|l|-\gamma}, \quad \|z\|\ge 1,\ t\in(\tau;T],\ \tau\in[0;T),\ \bar c_4=\bar c_4(T).$$

Перейдем к оценке Ψ_l^1 при $\|z\|\ge 1$. Как и в случае $\Psi_l^{0,r}$, проинтегрируем по частям k раз Ψ_l^1 по переменной ζ_j:

$$\left|\Psi_l^1(t;z,\tau)\right| \le \frac{c}{|z_j|^k}\left(\int\limits_{\|\zeta\|\ge 1}\left|\partial^k_{\zeta_j}\left\{\zeta^l\theta\left(t;t_0^{-1/\alpha}\zeta,\tau\right)\right\}\right|d\zeta\right.$$
$$\left. + \sum_{q=1}^{k}\int\limits_{1\le\|\zeta\|\le 2}\left|\partial^{k-q}_{\zeta_j}\left\{\zeta^l\theta\left(t;t_0^{-1/\alpha}\zeta,\tau\right)\right\}\right|d\zeta\right).$$

Отсюда согласно утверждению леммы 5 и неравенству (26) получим

$$\left|\Psi_l^1(t;z,\tau)\right| \le \bar c_5\|z\|^{-k}, \quad \bar c_5=\bar c_5(T),\ \|z\|\ge 1,\ t\in(\tau;T],\ \tau\in[0;T),\ k\in\mathbb{N}.$$

С помощью следствия 2 при $\|z\|\le 1$, $t\in(\tau;T]$, $\tau\in[0;T)$ имеем

$$|\Psi_l(t;z,\tau)| \le c\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\prod_{j=1}^{n}|\zeta_j|^{l_j}\right)e^{-\delta\|\zeta\|^\alpha}\,d\zeta < +\infty.$$

Поэтому для каждого $l\in\mathbb{Z}^n_+$ существует константа $c>0$ такая, что

$$|\Psi_l(t;z,\tau)| \le c(1+\|z\|)^{-(n+|l|+\gamma)}, \quad t\in(\tau;T],\ \tau\in[0;T),\ z\in\mathbb{R}^n.$$

Используя полученную оценку, из равенства (23) приходим к оценке

$$\left|D_x^\nu G_h(t;x,\tau)\right| \le c t_0^{-n/\alpha}(1+\|z\|)^{-(n+\gamma)}\left(\left(t_0^{1/\alpha}(1+\|z\|)\right)^{-1}+\|h\|\right)^{|\nu|}.$$

Отсюда, поскольку $z = t_0^{-1/\alpha}x$, получаем неравенство (21). В случае

$$\partial_t D_x^\nu G_h(t;x,\tau) = i^{|\nu|}(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\xi^\nu e^{i(x,\xi)}\mathscr{A}_{t,h}(\xi)\theta_h(t;\xi,\tau)\,d\xi$$

будем действовать аналогичным образом. После замены $\xi_j - h_j = t_0^{-1/\alpha}\zeta_j$, $j \in \mathbb{N}_n$, и подстановки $z = t_0^{-1/\alpha}x$ имеем

$$\partial_t D_x^\nu G_h(t;x,\tau) = i^{|\nu|}(2\pi)^{-n}e^{i(x,h)}\sum_{l=0}^{\nu}C_\nu^l h^{\nu-l}t_0^{-(n+|l|)/\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\zeta^l e^{i(z,\zeta)}\mathscr{A}_t\left(t_0^{-1/\alpha}\zeta\right)$$

$$\times\,\theta_h\left(t;t_0^{-1/\alpha}\zeta,\tau\right)d\zeta := i^{|\nu|}(2\pi)^{-n}e^{i(x,h)}\sum_{l=0}^{\nu}C_\nu^l h^{\nu-l}t_0^{-(n+|l|)/\alpha}\widehat{\Psi}_l(t;z,\tau).$$

Отметим, что интеграл $\widehat{\Psi}_l$ является интегралом вида Ψ_l, так как элементы матрицы $\zeta^l\mathscr{A}_t\left(t_0^{-1/\alpha}\zeta\right)$ — линейные комбинации однородных функций. Однако эти однородные функции ограниченной гладкости, поэтому элементы матрицы $\widehat{\Psi}_l^{0,0}$ (аналога $\Psi_l^{0,0}$), вообще говоря, не принадлежат пространству S, но их можно считать интегралами вида $\Psi_{i,j}^k$. Таким образом, доказательство неравенства (22) сводится к повторению рассуждений, проведенных при доказательстве (21).

Следствие 3. *При каждом фиксированном $t \in (\tau;T]$, $\tau \in [0;T)$, матричная функция $G_h(t;\cdot,\tau)$ принадлежит $\mathrm{P}\left(\mathbf{\Phi}_h^\gamma\right)$.*

Следующие вспомогательные утверждения характеризуют свойства G_h.

Лемма 7. *Каждый элемент матрицы $G_h(t;x,\tau)$ дифференцируем по $t \in (\tau;T]$ в смысле топологии пространства Φ_h^γ.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что предельное соотношение

$$\Psi_{\Delta t}(t;\cdot,\cdot) := (G_h(t+\Delta t;\cdot,\cdot) - G_h(t;\cdot,\cdot))/\Delta t \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} D_t G_h(t;\cdot,\cdot)$$

выполняется в соответствии со сходимостью в классе $\mathrm{P}\left(\mathbf{\Phi}_h^\gamma\right)$.

Поскольку матрица G_h дифференцируема по $t \in (\tau;T]$ в обычном понимании, то

$$\Psi_{\Delta t}(t;\cdot,\cdot) = \partial_t G_h(t+\varepsilon\Delta t;\cdot,\cdot), \quad \{t;t+\varepsilon\Delta t\}\subset(\tau;T], \quad \varepsilon\in(0;1).$$

Отсюда, учитывая свойства матрицанта θ_h и элементов матрицы $\mathscr{A}_{t,h}$, получим

$$\left|D_x^k(\Psi_{\Delta t}(t;x,\tau) - \partial_t G_h(t;x,\tau))\right| \le c\int\limits_{\mathbb{R}^n}\|\xi\|^{|k|}|\mathscr{A}_{(t+\varepsilon\Delta t),h}(\xi)\theta_h(t+\varepsilon\Delta t;\xi,\tau)$$

$$-\,\mathscr{A}_{t,h}(\xi)\theta_h(t;\xi,\tau)|\,d\xi \underset{\Delta t\to 0}{\overset{x\in\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows}} 0, \quad k\in\mathbb{Z}_+^n.$$

Докажем, что каждый элемент матрицы $\Psi_{\Delta t}$ равномерно ограничен в пространстве Φ_h^γ по Δt (для достаточно малых $|\Delta t|$). Действительно, по теореме 6

$$\left|D_x^k\Psi_{\Delta t}(t;x,\tau)\right| = \left|\partial_t D_x^k G_h(t+\varepsilon\Delta t;x,\tau)\right| \le c_1(t_0/2)^{\frac{\gamma-\gamma^*}{\alpha}}((t_0/2)^{1/\alpha}+\|x\|)^{-(n+\gamma)}$$

$$\times(((t_0/2)+\|x\|)^{-1}+\|h\|)^{|k|}, \quad t\in(\tau;T],\ x\in\mathbb{R}^n,\ 2|\Delta t|\le t_0,\ t_0=t-\tau,\ k\in\mathbb{Z}_+^n,$$

здесь использовано то, что $t_0/2 \le t_0+\varepsilon\Delta t \le 3t_0/2$ для всех $|\Delta t| \le t_0/2$, $\varepsilon\in(0;1)$. Отсюда в силу критерия сходимости в Φ_h^γ приходим к утверждению леммы 7.

Следствие 4. *Для любых* $f \in \mathfrak{F}$, $t \in (\tau; T]$ *и* $\tau \in [0; T)$ *функции* $\big(f * G_h^{ij}\big)(t; \cdot, \tau)$ *дифференцируемы по* t *в обычном понимании, здесь* G_h^{ij} *— элементы матрицы* G_h.

Лемма 8. *Матричная функция* $G_h(t; \cdot, \tau)$ *стремится к* $\delta(\cdot)E$ *при* $t \to \tau + 0$ *в* $\mathrm{P}\big((\mathbf{\Phi}_h^\gamma)'\big)$, *где* $\mathrm{P}\big((\mathbf{\Phi}_h^\gamma)'\big)$ *— класс всех квадратных матриц со столбцами из* $\big(\mathbf{\Phi}_h^\gamma\big)'$ *с поэлементной сходимостью в* $\big(\Phi_h^\gamma\big)'$, *а* $\delta(\cdot)$ *— дельта-функция.*

Доказательство. Непосредственно из определения G_h приходим к

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_h(t; x, \tau)\, dx = F[F^{-1}[\theta_h](t; x, \tau)](t; 0, \tau) = E + O(t, \tau),$$

где $O(t,\tau) = \int\limits_\tau^t \mathscr{A}_{t_1,h}(0) dt_1 + \int\limits_\tau^t \mathscr{A}_{t_1,h}(0) \int\limits_\tau^{t_1} \mathscr{A}_{t_2,h}(0)\, dt_2 dt_1 + \dots$ Отсюда для произвольной функции φ из Φ_h^γ имеем

$$|\langle G_h(t; \cdot, \tau), \varphi\rangle - \langle \delta(\cdot)E, \varphi\rangle| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_h(t; x, \tau)(\varphi(x) - \varphi(0))\, dx + \varphi(0) O(t, \tau) \right|$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{R}^n} |G_h(t; x, \tau)|\, |\varphi(x) - \varphi(0)|\, dx + |\varphi(0)|\, |O(t, \tau)| := I_1(t) + I_2(t).$$

В силу непрерывности функции φ для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $t_* > \tau$ такое, что $(t_* - \tau)^{\gamma/2\alpha} < \varepsilon$ и $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon$, как только $\|x\| < (t_* - \tau)^{1/2\alpha}$. Тогда

$$I_1(t) < \varepsilon \int\limits_{\|x\| < (t_* - \tau)^{1/2\alpha}} |G_h(t; x, \tau)|\, dx + \int\limits_{\|x\| \ge (t_* - \tau)^{1/2\alpha}} |G_h(t; x, \tau)|\, |\varphi(x) - \varphi(0)|\, dx$$

$$=: \varepsilon I_1^0(t) + I_1^1(t).$$

Согласно оценке (21) матричной функции G_h

$$I_1^0(t) \le c(t - \tau)^{\gamma/\alpha} \int\limits_{\|x\| < (t_* - \tau)^{1/2\alpha}} \frac{dx}{((t - \tau)^{1/\alpha} + \|x\|)^{n+\gamma}} \le c \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dy}{(1 + \|y\|)^{n+\gamma}} = c_1.$$

Из ограниченности функции φ на $\mathbb{R}^n$, учитывая (21), приходим к оценке

$$I_1^1(t) \le c(t - \tau)^{\gamma/\alpha} \int\limits_{(t_* - \tau)^{1/2\alpha}}^\infty \rho^{-(1+\gamma)} d\rho = c_2 (t - \tau)^{\gamma/\alpha} (t_* - \tau)^{-\gamma/2\alpha},$$

где $c_2 > 0$ — постоянная, не зависящая от t. Отсюда уже для всех $t \in (\tau, t_*]$ получаем, что $I_1^1(t) \le c_2 (t_* - \tau)^{\gamma/2\alpha} \le c_2 \varepsilon$.

Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ существует $t_* > \tau$, $(t_* - \tau)^{\gamma/2\alpha} < \varepsilon$, такое, что $|\langle G_h, \varphi\rangle - \langle \delta(\cdot)E, \varphi\rangle| \le (c_1 + c_2)\varepsilon + c_3 O_1(\varepsilon)$ для всех $t \in (\tau, t_*]$, где $O_1(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to +0}{\longrightarrow} 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 7. *Задача Коши* (8), (9) *корректно разрешима в классе* $\mathfrak{F}^m$ *начальных обобщенных функций. Ее решение дифференцируемо по* t, *бесконечно дифференцируемо по* x *и изображается формулой* $u(t; x, 0) = (f * G_h)(t; x, 0)$,

$(t,x)\in(0;T]\times\mathbb{R}^n$, при этом $u(t;\cdot,0)\in\mathbf{\Phi}_h^\gamma$ для каждого $t\in(0;T]$, здесь $\mathfrak{F}^m$ — декартова степень класса $\mathfrak{F}$ с показателем m, а

$$(f*G_h)(t;\cdot,0)=\left(\sum_{j=1}^m\bigl\langle f_j(\xi),G_h^{ij}(t;\cdot-\xi,0)\bigr\rangle\right)_{i=1}^m.$$

Доказательство. Как уже отмечалось, в пространстве Φ_h^γ операция сдвига бесконечно дифференцируема, поэтому $G_h^{ij}(t;x-\cdot,0)$, $\{i,j\}\subset\mathbb{N}_m$, как абстрактные функции параметра x в пространстве Φ_h^γ бесконечно дифференцируемы по x. Дифференцируемость по t функции $G_h(t;x-\cdot,0)$ утверждается в лемме 7. Таким образом, $u(t;x,0)=\left(\sum\limits_{j=1}^m\bigl\langle f_j(\xi),G_h^{ij}(t;x-\xi,0)\bigr\rangle\right)_{i=1}^m$ является обычной функцией, дифференцируемой по t и бесконечно дифференцируемой по x. Кроме того, поскольку компоненты обобщенной функции f — свертыватели в пространстве Φ_h^γ, то $(f*G_h)(t,\cdot)\in\mathbf{\Phi}_h^\gamma$ при каждом фиксированном $t\in(0;T]$.

Далее, так как для $f_l\in\mathfrak{F}$ и $G_h^{ij}(t;\cdot,0)$, $\{i,j\}\subset\mathbb{N}_m$,

$$F\bigl[f_l*G_h^{ij}\bigr](t;\xi,0)=\overline{F[f_l](\xi)}F\bigl[G_h^{ij}\bigr](t;\xi,0),\quad t\in(0;T],\ \xi\in\mathbb{R}^n,$$

(см. п. 1), то

$$F[f*G_h](t;\cdot,0)=F[G_h](t;\cdot,0)\overline{F[f](\cdot)}=\theta_h(t;\cdot,0)\overline{F[f](\cdot)},\quad f\in\mathfrak{F},\ t\in(0;T].$$

Отсюда для всех $t\in(0;T]$ и $x\in\mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned}(A_{\mathscr{A}_{t,h}}u)(t;x,0)&=F^{-1}[\mathscr{A}_{t,h}(\xi)\theta_h(t;\xi,0)\overline{F[f]}(\xi)](t;x,0)\\&=F^{-1}[\partial_t\theta_h(t;\xi,0)\overline{F[f]}(\xi)](t;x,0)=(f*\partial_tG_h)(t;x,0)=\partial_tu(t;x,0),\end{aligned}$$

т. е. u удовлетворяет системе (8) в обычном понимании.

Из утверждения леммы 8 для любых $\varphi\in\Phi_h^\gamma$ и $j\in\mathbb{N}_m$ получим

$$\langle u_j(t;\cdot,0),\varphi\rangle=\sum_{i=1}^m\bigl\langle f_i*G_h^{ji},\varphi\bigr\rangle=\sum_{i=1}^m\bigl\langle G_h^{ji},f_i*\varphi\bigr\rangle\underset{t\to+0}{\longrightarrow}\langle f_j,\varphi\rangle,$$

здесь использовано то, что $f_i*\varphi\in\Phi_h^\gamma$, так как $f_i\in\mathfrak{F}$. Таким образом, $u(t;\cdot,0)$ удовлетворяет начальному условию (9).

Докажем теперь единственность решения задачи Коши (8), (9) и его непрерывную зависимость от начальной функции $f\in\bigl(\Phi_h^\gamma\bigr)'$. Для этого воспользуемся аналогом общей теоремы единственности из [15, с. 41]. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\partial_tv(t;x,\tau)=-(A^*_{\mathscr{A}_{t,h}}v)(t;x,\tau),\quad v\in\mathbf{\Phi}_h^\gamma,\ (t,x)\in[0;\tau)\times\mathbb{R}^n,\tag{27}$$

$$v(t;\cdot,\tau)|_{t=\tau}=\varphi,\quad\varphi\in\mathfrak{F}^m,\tag{28}$$

где условие (28) выполняется в смысле слабой сходимости; τ — произвольным образом фиксированное число из $(0;T]$;

$$(A^*_{\mathscr{A}_{t,h}}\varphi)(t,\cdot)=\left\{\sum_{j=1}^m(A^*_{a^{ji},h}\varphi_j)(t,\cdot)\right\}_{i=1}^m,$$

$A^*_{a,h}$ — сопряженный к $A_{a,h}$ оператор (см. п. 1), а $\mathscr{A}_{t,h}$ — матрица-символ системы (8).

В соответствии с указанным аналогом теоремы из [15] решение задачи Коши (8), (9) единственно и непрерывно зависит от начальных данных, если задача (27), (28) разрешима для произвольных $\tau\in(0,T]$ и $\varphi\in\Phi_h^\gamma$. В этом легко убедиться, если рассуждать, как при доказательстве разрешимости задачи Коши (8), (9). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эйдельман С. Д., Дринь Я. М.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений // Приближенные методы математического анализа. Киев: Киевск. пед. ин-т, 1974. С. 60–69.

2. *Дрінь Я. М.* Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гельдерових функцій // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1974. № 1. С. 19–21.

3. *Дринь Я. М.* Фундаментальное решение задачи Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. 1977. № 3. С. 198–202.

4. *Эйдельман С. Д., Дринь Я. М.* Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений // Мат. исследования. 1981. Т. 63. С. 18–33.

5. *Федорюк М. В.* Асимптотика функции Грина псевдодифференциальных параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 7. С. 1296–1301.

6. *Кочубей А. Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52, № 5. С. 909–934.

7. *Городецький В. В., Літовченко В. А.* Задача Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь у просторах узагальнених функцій типу S' // Доп. НАН України. 1992. № 10. С. 6–9.

8. *Городецький В. В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. Чернівці: Рута, 1958.

9. *Ейдельман С. Д., Дрінь Я. М.* До теорії систем параболічних псевдодиференціальних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1989. № 4. С. 10–12.

10. *Дрінь Я. М., Ейдельман С. Д.* Фундаментальні матриці розв'язків псевдодиференціальних систем з негладкими символами // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями. Чернівці: Редакційно-видавничий відділ облполіграфвидаву, 1990. С. 21–31.

11. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958.

12. *Schwartz L.* Theorie des distributions. Paris: Hermann, 1950. V. 1.

13. *Борок В. М.* Решение задачи Коши для некоторых типов систем линейных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. 1954. Т. 97, № 6. С. 949–952.

14. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

15. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.

16. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.

17. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1968.

18. *Neri U.* Singular integrals. Berlin; New York: Springer-Verl., 1971. (Lect. Notes Math.; V. 200).

19. *Самко С. Г.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Ростов-на Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1984.

20. *Lemoine C.* Fourier transforms of homogeneous distributions // Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa. 1972. V. 26, N 1. P. 117–149.

Статья поступила 15 февраля 2006 г., окончательный вариант — 5 октября 2007 г.

Литовченко Владислав Антонович
Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича,
математический факультет, кафедра математического моделирования,
ул. Коцюбинского, 2, Черновцы 58012, Украина
vladlit@chnu.cv.ua