

УДК 517.984.46

ФОРМУЛА СЛЕДА ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ
ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНОГО
УРАВНЕНИЯ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ
Н. М. Асланова

Аннотация. Получена формула регуляризованного следа для операторного уравнения Штурма — Лиувилля с граничным условием, зависящим от спектрального параметра.

Ключевые слова: гильбертово пространство, самосопряженный оператор, дискретный спектр, регуляризованный след, ядерный оператор.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Пусть также $L_2 = L_2(H, (0, \pi)) \oplus H$, где $L_2(H, (0, \pi))$ — гильбертово пространство вектор-функций $y(t)$ ($t \in (0, \pi)$), для которых $\int_0^\pi \|y(t)\|_H^2 dt < \infty$. Скалярное произведение для $Y, Z \in L_2$ ($Y = \{y(t), y(\pi)\}$, $Z = \{z(t), z(\pi)\}$) определяется как

$$(Y, Z) = \int_0^\pi (y(t), z(t))_H dt + (y(\pi), z(\pi))_H.$$

Рассмотрим задачу

$$l[y] = -y'' + Ay + q(t)y = \lambda y, \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad (2)$$

$$y'(\pi) - \lambda y(\pi) = 0, \quad (3)$$

где A — самосопряженный положительно определенный оператор в H ($A \geq E$, E — тождественный оператор в H), являющийся обратным для вполне непрерывного, $q(t)$ при каждом t — самосопряженный ограниченный оператор в H .

Предположим также, что операторная функция $q(t)$ слабо измерима, $\|q(t)\|$ как функция от t ограничена на $[0, \pi]$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $q(t)$ имеет вторую слабую производную на отрезке $[0, \pi]$ и $q^{(l)}(t)$, $l = 0, 1, 2$, при каждом $t \in [0, \pi]$ являются ядерными самосопряженными операторами в H , т. е. $q^{(l)}(t) \in \sigma_1$, $[q^{(l)}(t)]^* = q^{(l)}(t)$;

2) функции $\|q^{(l)}(t)\|_1$, $l = 0, 1, 2$, ограничены на отрезке $[0, \pi]$;

3) $q'(0) = q'(\pi) = 0$;

4) $\int_0^\pi (q(t)f, f) dt = 0$ при любом $f \in H$.

При $q(t) = 0$ уравнение (1) запишется в виде

$$l_0[y] = -y'' + Ay = \lambda y. \quad (1')$$

С задачами (1'), (2), (3) и (1)–(3) в пространстве L_2 можно связать самосопряженные операторы L_0 и $L = L_0 + Q$ соответственно, где

$$L_0 : \{y(t), y(\pi)\} \rightarrow \{l_0[y], y'(\pi)\}, \quad Q : \{y(t), y(\pi)\} \rightarrow \{q(t)y(t), 0\}. \quad (4)$$

Как показано в работе [1], операторы L_0 и L имеют дискретный спектр. Пусть $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$ — собственные значения, $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ — соответствующие ортонормированные собственные вектор-функции оператора L_0 и $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ — собственные значения оператора L .

Обозначим через $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots$ собственные значения и через $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ортонормированные собственные элементы оператора A в H .

Известно [1], что если

$$\gamma_j \sim aj^\alpha \quad \text{при } j \rightarrow \infty \quad (0 < a, \alpha > 2), \quad (5)$$

то

$$\lambda_n(L) \sim \mu_n(L_0) \sim dn^\delta, \quad (6)$$

где $\delta = \frac{2\alpha}{2+\alpha}$.

Пользуясь этой асимптотикой, так же, как и в [2], можно доказать, что существует последовательность натуральных чисел $\{n_m\}_{m=1}^\infty$, для которой справедливо неравенство

$$\mu_k - \mu_{n_m} \geq d(k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} - n_m^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}), \quad k = n_m, n_m + 1, \dots \quad (7)$$

Пусть

$$\mu^{(j)} = \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} \mu_k, \quad \lambda^{(j)} = \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} \lambda_k, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $n_0 = 0$.

Цель этой работы — вычисление суммы ряда $\sum_{j=1}^\infty (\lambda^{(j)} - \mu^{(j)})$, который называется *регуляризованным следом оператора L_0* . Сумма этого ряда, как будет показано ниже, не зависит от того, каким образом выбрана последовательность n_1, n_2, \dots , при котором верно неравенство (7).

Вычислению регуляризованного следа для скалярных дифференциальных операторов, являющегося обобщением понятия следа матрицы, посвящено много работ. Впервые И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном получена формула для суммы разностей собственных значений двух регулярных операторов Штурма — Лиувилля. Эта работа получила многочисленные продолжения. Здесь приведем ссылки на статьи [3–10], где в различных случаях вычислены регуляризованные следы для скалярных операторов.

Регуляризованные следы операторов в абстрактной постановке рассматривались в [11–15] и др. Для дифференциальных операторов с операторными коэффициентами формулы следов исследованы, например, в [2, 16]. Более подробную библиографию можно найти в обзоре [15].

В настоящей статье рассматривается задача, отличающаяся от задачи в [2] краевым условием, содержащим спектральный параметр.

Пусть R_λ^0 и R_λ — резольвенты операторов L_0 и L . Учитывая асимптотику (6) и неравенство (7) и пользуясь техникой работы [6], можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $\|q(t)\|$ ограничена на отрезке $[0, \pi]$ и выполняется условие (5). Тогда при больших m имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{n_m} (\lambda_n - \mu_n) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=l_m} \text{Sp}(QR_\lambda^0) d\lambda,$$

где $l_m = \frac{1}{2}(\mu_{n_m+1} + \mu_{n_m})$, μ_{n_m} , $m = 1, 2, 3, \dots$, — подпоследовательность, которая удовлетворяет неравенству (7).

Поскольку QR_λ^0 — ядерный оператор и собственные вектор-функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \dots$ оператора L_0 образуют ортонормированный базис в L_2 , то при больших значениях m

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m (\lambda^{(j)} - \mu^{(j)}) &= \sum_{n=1}^{n_m} (\lambda_n - \mu_n) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=l_m} \text{Sp}(QR_\lambda^0) d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=l_m} \sum_{n=1}^{\infty} (QR_\lambda^0 \psi_n, \psi_n) d\lambda \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(Q\psi_n, \psi_n) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=l_m} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu_n} \right] = \sum_{n=1}^{n_m} (Q\psi_n, \psi_n). \end{aligned}$$

Скалярное произведение рассматривается в L_2 .

Ортонормированные собственные вектор-функции оператора L_0 имеют вид

$$\sqrt{\frac{4x_{j,k}}{2x_{j,k}\pi - \sin 2x_{j,k}\pi + 4x_{j,k} \sin^2 x_{j,k}\pi}} \{ \sin(x_{j,k}t)\varphi_j, \sin(x_{j,k}\pi)\varphi_j \} \quad (8)$$

($k = \overline{0, \infty}$, $j = \overline{1, \infty}$), где $x_{j,k}$ — корни уравнения (см. [1])

$$\text{ctg } x\pi = \frac{\gamma_j + x^2}{x}, \quad x = \sqrt{\lambda - \gamma_j}. \quad (9)$$

Известно, что собственные числа оператора L_0 распадаются на две серии: $\mu_{j,0} \sim \sqrt{\gamma_j}$ при $j \rightarrow \infty$, соответствующие мнимым корням уравнения (9), и $\mu_{j,k} = \gamma_j + x_{j,k}^2 = \gamma_j + \eta_k$, где $\eta_k \sim k^2$, соответствующие вещественным корням уравнения (9).

Из теоремы 1, учитывая (4) и (8), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n_m} (Q\psi_n, \psi_n) &= \sum_{n=1}^{n_m} \int_0^\pi \frac{4x_{j_n, k_n}}{2x_{j_n, k_n}\pi - \sin 2x_{j_n, k_n}\pi + 4x_{j_n, k_n} \sin^2 x_{j_n, k_n}\pi} \\ &\quad \times \sin^2 x_{j_n, k_n} t (q(t)\varphi_{j_n}, \varphi_{j_n}) dt. \end{aligned}$$

Обозначим $f_j(t) = (q(t)\varphi_j, \varphi_j)$. Из условия $\int_0^\pi (q(t)\varphi_j, \varphi_j) dt = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n_m} (Q\psi_n, \psi_n) &= -\sum_{n=1}^{n_m} \int_0^\pi \frac{4x_{j_n, k_n}}{2x_{j_n, k_n}\pi - \sin 2x_{j_n, k_n}\pi + 4x_{j_n, k_n} \sin^2 x_{j_n, k_n}\pi} \\ &\quad \times \cos 2x_{j_n, k_n} t (q(t)\varphi_{j_n}, \varphi_{j_n}) dt. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть выполняется условие (5). Если операторная функция $q(t)$ удовлетворяет условиям 1–4, то справедлива формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m (\lambda^{(j)} - \mu^{(j)}) = -\frac{\text{Sp } q(\pi) + \text{Sp } q(0)}{4}.$$

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. Если операторная функция $q(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{4x_{j,k}}{2x_{j,k}\pi - \sin 2x_{j,k}\pi + 4x_{j,k} \sin^2 x_{j,k}\pi} \int_0^{\pi} \cos(2x_{j,k}t) f_j(t) dt \right| < \infty. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя дважды по частям и используя условие 3 для операторной функции $q(t)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(2x_{j,k}t) f_j(t) dt &= \frac{1}{2x_{j,k}} \sin(2x_{j,k}t) f_j(t) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2x_{j,k}} \int_0^{\pi} \sin(2x_{j,k}t) f_j'(t) dt \\ &= \frac{1}{2x_{j,k}} \sin(2x_{j,k}\pi) f_j(\pi) - \frac{1}{(2x_{j,k})^2} \int_0^{\pi} \cos(2x_{j,k}t) f_j''(t) dt. \quad (10') \end{aligned}$$

С учетом асимптотики $x_{j,k} \sim k + \frac{k}{\gamma_j + k^2}$ из последнего выражения вытекает, что

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{4x_{j,k}}{2x_{j,k}\pi - \sin 2x_{j,k}\pi + 4x_{j,k} \sin^2 x_{j,k}\pi} \int_0^{\pi} \cos(2x_{j,k}t) f_j(t) dt \right| \\ &= \text{const} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \left(O\left(\frac{1}{k^2}\right) f_j(\pi) + \int_0^{\pi} \frac{1}{(2x_{j,k})^2} \cos(2x_{j,k}t) f_j''(t) dt \right) \right| \\ &\leq \text{const} \sum_{j=1}^{\infty} \left(|(q(\pi)\varphi_j, \varphi_j)| + \int_0^{\pi} |(q(t)\varphi_j, \varphi_j)| dt \right). \quad (11) \end{aligned}$$

По условию 2 $\|q^{(l)}(t)\|_1 < \text{const}$ ($l = 0, 1, 2$). Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(q(t)\varphi_j, \varphi_j)| \leq \|q^{(l)}(t)\|_1 < \text{const}.$$

По теореме Лебега знак суммы по j в неравенстве (11) можно внести под знак интеграла, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{4x_{j,k}}{2x_{j,k}\pi - \sin 2x_{j,k}\pi + 4x_{j,k} \sin^2 x_{j,k}\pi} \int_0^{\pi} \cos(2x_{j,k}t) f_j(t) dt \right| < \infty. \quad (12)$$

Рассмотрим внутренний ряд в (10) при $k = 0$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{4x_{j,0}}{2x_{j,0}\pi - \sin 2x_{j,0}\pi + 4x_{j,0} \sin^2 x_{j,0}\pi} \cos(2x_{j,0}t) f_j(t) dt, \quad (13)$$

соответствующий мнимому корню уравнения (9).

Из асимптотики $x_{j,0} \sim \sqrt{\gamma_j} - \frac{1}{2}$ ($j \rightarrow \infty$) имеем (по условию (5) $\gamma_j \sim aj^\alpha$, $\alpha > 2$)

$$\begin{aligned} \frac{4x_{j,0}}{2x_{j,0}\pi - \sin 2x_{j,0}\pi + 4x_{j,0} \sin^2 x_{j,0}\pi} &= \frac{2}{1 - \frac{\sin 2x_{j,0}\pi}{2x_{j,0}} + 2 \sin^2 x_{j,0}\pi} \\ &< \frac{2}{1 - \frac{\sin 2x_{j,0}\pi}{2x_{j,0}}} = 2 + O\left(\frac{1}{x_{j,0}}\right). \quad (14) \end{aligned}$$

Так как $q(t) \in \sigma_1$, пользуясь (10') при $k = 0$ и оценками

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{1}{j^{\frac{\alpha}{2}}} |f_j(\pi)| &\leq \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{j^\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^N |f_j(\pi)|^2 \right)^{1/2}, \\ \sum_{j=1}^N \frac{1}{j^\alpha} \int_0^\pi |f_j(t)| dt &\leq \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{j^{2\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^N \left(\int_0^\pi |f_j(t)| dt \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{j^{2\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\sum_{j=1}^N \int_0^\pi |f(t)| dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (15)$$

в (13) получим

$$\left| \sum_{j=1}^\infty \int_0^\pi \frac{2x_{j,0}\pi - \sin 2x_{j,0}\pi + 4x_{j,0} \sin^2 x_{j,0}\pi}{4x_{j,0}} \cos 2x_{j,0}t f_j(t) dt \right| < \infty. \quad (16)$$

Из (12) и (16) вытекает справедливость (10).

Вернемся к доказательству теоремы 1. Ранее было получено, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^\infty (\lambda^{(j)} - \mu^{(j)}) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{n_m} \int_0^\pi \frac{4x_{j_n, k_n}}{2x_{j_n, k_n}\pi - \sin 2x_{j_n, k_n}\pi + 4x_{j_n, k_n}} \\ &\quad \times \sin^2 x_{j_n, k_n}\pi \sin^2 x_{j_n, k_n}t (q(t)\varphi_{j_n}, \varphi_{j_n}) dt \\ &= \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=0}^\infty \int_0^\pi \frac{4x_{j,k}}{2x_{j,k}\pi - \sin 2x_{j,k}\pi + 4x_{j,k} \sin^2 x_{j,k}\pi} \sin^2 x_{j,k}t f_j(t) dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Вычислим сумму повторного ряда, стоящего в правой части равенства (17). Сначала вычислим значение суммы ряда

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^\infty \frac{4x_{j,k}}{2x_{j,k}\pi - \sin 2x_{j,k}\pi + 4x_{j,k} \sin^2 x_{j,k}\pi} \int_0^\pi \sin^2 x_{j,k}t f_j(t) dt \\ = - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{2x_{j,k}}{2x_{j,k}\pi - \sin 2x_{j,k}\pi + 4x_{j,k} \sin^2 x_{j,k}\pi} \int_0^\pi \cos 2x_{j,k}t f_j(t) dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Для каждого фиксированного j при $N \rightarrow \infty$ исследуем асимптотическое поведение функции

$$T_N(t) = \sum_{k=0}^N \frac{2x_{j,k}}{-2x_{j,k}\pi + \sin 2x_{j,k}\pi - 4x_{j,k} \sin^2 x_{j,k}\pi} \cos 2x_{j,k}t.$$

Чтобы вывести формулу для $T_N(t)$, выразим m -й член суммы $T_N(t)$ в виде вычета в точке $x_{j,k}$ некоторой функции комплексного переменного z , имеющей полюсы в точках $x_{j,0}, x_{j,1}, \dots, x_{j,N}$. Рассмотрим следующую комплексную функцию:

$$g(z) = \frac{z \cos 2zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j) \sin^2 z\pi}. \quad (19)$$

Она имеет простые полюсы в точках $x_{j,k}$ и k . Вычет в точке $x_{j,k}$ будет равен

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=x_{j,k}} g(z) &= \frac{x_{j,k} \cos 2x_{j,k}t}{\left(\operatorname{ctg} x_{j,k}\pi - \frac{x_{j,k}\pi}{\sin^2 x_{j,k}\pi} - 2x_{j,k}\right) \sin^2 x_{j,k}\pi} \\ &= \frac{x_{j,k} \cos 2x_{j,k}t}{\frac{1}{2} \sin 2x_{j,k}\pi - x_{j,k}\pi - 2x_{j,k} \sin^2 2x_{j,k}\pi} = \frac{2x_{j,k} \cos 2x_{j,k}t}{\sin 2x_{j,k}\pi - 2x_{j,k}\pi - 4x_{j,k} \sin^2 2x_{j,k}\pi}, \end{aligned}$$

а в точке k

$$\operatorname{res}_{z=k} g(z) = \frac{k \cos 2kt}{k(-1)^k \pi (-1)^k} = \frac{\cos 2kt}{\pi}.$$

В качестве контура интегрирования возьмем прямоугольник с вершинами в $\pm iB$, $A_N \pm iB$, который обходит точку $ix_{j,0}$ справа, а точки $-ix_{j,0}$ и 0 — слева. При каждом фиксированном j имеем $B > x_{j,0}$. Впоследствии B стремится в бесконечность, а $A_N = N + \frac{1}{2}$. При таком выборе A_N будет $x_{j,N} < A_N < x_{j,N+1}$.

Функция (18) является нечетной функцией от z , поэтому интеграл вдоль части контура, находящейся на мнимой оси, а также по полуокружностям с центрами в точках $\pm x_{j,0}$, обращается в нуль.

Если $z = u + iv$, то при больших v и при $u \geq 0$ (17) будет иметь порядок $O\left(\frac{1}{e^{2|v|(\pi-x)|v|}}\right)$, и для заданного значения A_N интегралы, взятые вдоль верхней и нижней сторон контура, стремятся к нулю при $B \rightarrow \infty$.

Таким образом, мы получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned} T_N(t) = -S_N(t) + \frac{1}{2\pi i} \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{A_N - iB}^{A_N + iB} \frac{z \cos 2zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j) \sin^2 z\pi} dz \\ + \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}} \frac{z \cos 2zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j) \sin^2 zt} dz, \end{aligned}$$

где $S_N(t) = \sum_{k=1}^N \frac{\cos 2kt}{\pi}$.

При $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{A_N - iB}^{A_N + iB} \frac{z \cos 2zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j) \sin^2 z\pi} &\sim \frac{1}{\pi i} \int_{A_N - i\infty}^{A_N + i\infty} \frac{\cos 2zt}{\sin 2z\pi - 2z \sin^2 z\pi} dz \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2N+1)t \operatorname{ch} 2tv - i \sin(2N+1)t}{-i \operatorname{sh} 2v\pi - 2(A_N + iv)(1 + \operatorname{ch} 2v\pi)} i dv \\ &= \frac{1}{\pi} \cos(2N+1)t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} 2tv}{-i \operatorname{sh} 2v\pi - 2(A_N + iv)(1 + \operatorname{ch} 2v\pi)} dv \\ &\quad + \frac{1}{i\pi} \sin(2N+1)t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} 2tv}{\frac{1}{i} \operatorname{sh} 2v\pi - 2(A_N + iv)(1 + \operatorname{ch} 2v\pi)} dv. \end{aligned}$$

Обозначим интегралы в правой части последнего соотношения через I_{1N} , I_{2N} соответственно. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{A_N - iB}^{A_N + iB} \frac{z \cos 2zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j) \sin^2 z\pi} dz = I_{1N} + I_{2N} + \psi(A_N t), \quad (20)$$

где

$$\psi(A_N t) = O \left(\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{A_N - iB}^{A_N + iB} \frac{\cos 2zt}{z^3 \sin^2 z\pi} dz \right). \quad (20')$$

Оценим I_{1N} :

$$\begin{aligned} |I_{1N}| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{A_N^2 + v^2}} \left| \frac{\operatorname{ch} 2tv}{\frac{\operatorname{sh} 2v\pi}{2i(A_N + iv)} - (1 + \operatorname{ch} 2v\pi)} \right| dv \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{A_N^2 + v^2}} \frac{\operatorname{ch} 2tv}{\left| \frac{\operatorname{sh} 2v\pi}{2i(A_N + iv)} - (1 + \operatorname{ch} 2v\pi) \right|} dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{A_N^2 + v^2}} \frac{\operatorname{ch} 2tv}{\left| \frac{\operatorname{sh} 2v\pi}{2(A_N^2 + v^2)} - (1 + \operatorname{ch} 2v\pi) \right|} dv \\ &\leq \frac{1}{2A_N\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} 2tv}{\left| \frac{\operatorname{sh} 2v\pi}{2} - (1 + \operatorname{ch} 2v\pi) \right|} dv \\ &\leq \frac{1}{2A_N\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} 2tv}{\left| \frac{1 + \operatorname{ch} 2v\pi}{2} - (1 + \operatorname{ch} 2v\pi) \right|} dv < \frac{1}{A_N\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} 2tv}{1 + \operatorname{ch} 2v\pi} dv \\ &= \frac{2}{A_N\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} 2tv}{1 + \operatorname{ch} 2v\pi} dv = \frac{\operatorname{const}}{A_N \cos \frac{\pi}{2}}. \quad (20'') \end{aligned}$$

Подобная оценка получается и для I_{2N} . Можно также показать, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \psi(A_N t) = 0. \quad (21)$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} T_N(t) f_j(t) dt &= - \int_0^{\pi} S_N(t) f_j(t) dt \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\pi} f_j(t) \int_{A_N - i\infty}^{A_N + i\infty} \frac{z \cos 2zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \mu_j) \sin^2 z\pi} dz dt \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{\pi} f_j(t) \int_{\substack{|z|=r, \\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}}} \frac{z \cos 2zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \mu_j) \sin^2 z\pi} dz dt. \quad (22) \end{aligned}$$

Пользуясь условием 4 для третьего члена правой части равенства (21), имеем

$$\int_0^{\pi} f_j(t) \int_{\substack{|z|=r \\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}}} \frac{z \cos 2zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \mu_j) \sin^2 z\pi} dz dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\pi f_j(t) \int_{\substack{|z|=r, \\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}}} \frac{z(\cos 2zt - 1)}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \mu_j) \sin^2 z\pi} dz dt \\
&= \int_0^\pi f_j(t) \int_{\substack{|z|=r, \\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}}} \frac{-2z \sin^2 zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \mu_j) \sin^2 z\pi} dz dt.
\end{aligned}$$

Отсюда при $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi f_j(t) \int_{\substack{|z|=r, \\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}}} \frac{-2z \sin^2 zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j) \sin^2 z\pi} dz dt \\
&\sim \int_0^\pi f_j(t) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2re^{i\varphi}(re^{i\varphi}t)^2}{\gamma_j(re^{i\varphi}\pi)^2} d\varphi dt = \int_0^\pi -\frac{2t^2}{\gamma_j\pi^2} f_j(t) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} re^{i\varphi} d\varphi dt, \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi -\frac{2t^2}{\gamma_j\pi^2} f_j(t) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} re^{i\varphi} d\varphi dt = 0. \quad (24)$$

Из (22)–(24) получаем

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi T_N(t) f_j(t) dt &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi S_N(t) f_j(t) dt \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f_j(t) \int_{A_N - i\infty}^{A_N + i\infty} \frac{z \cos 2zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j) \sin^2 z\pi} dz dt. \quad (25)
\end{aligned}$$

Учитывая оценки для I_{1N} и I_{2N} , а также (20), приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
&\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int_0^\pi f_j(t) \int_{A_N - i\infty}^{A_N + i\infty} \frac{z \cos 2zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j) \sin^2 z\pi} dz dt \right| \\
&\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int_0^\pi \frac{\operatorname{const}}{A_N} \frac{1}{\cos \frac{t}{2}} f_j(t) dt \right| + \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int_0^\pi \psi(A_N t) f_j(t) dt \right|. \quad (26)
\end{aligned}$$

При выполнении для $f_j(t)$ условия $\int_{\pi-\delta}^\pi \frac{f_j(t)}{\pi-t} < \infty$ ($\delta > 0$) имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{const}}{A_N} \int_0^\pi \frac{f_j(t)}{\cos \frac{t}{2}} dt = 0. \quad (27)$$

Поэтому, используя (20), (26), (27) в (25), получим

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi T_N(t) f_j(t) dt &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi S_N(t) f_j(t) dt \\
&= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\pi f_j(t) \cos 2kt dt = -\frac{f_j(\pi) + f_j(0)}{4}. \quad (28)
\end{aligned}$$

Из (17) и (28) окончательно следует, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^{(j)} - \mu^{(j)}) = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j(\pi) + f_j(0)}{4} = - \frac{\operatorname{Sp} q(\pi) + \operatorname{Sp} q(0)}{4}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыбак М. А. Об асимптотическом распределении собственных значений некоторых граничных задач для операторного уравнения Штурма — Лиувилля // Укр. мат. журн. 1980. Т. 32, № 2. С. 248–252.
2. Максудов Ф. Г., Байрамоглы М., Адыгезалов А. А. О регуляризованном следе оператора Штурма — Лиувилля на конечном отрезке с неограниченным операторным коэффициентом // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 4. С. 795–799.
3. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88, № 4. С. 593–596.
4. Дикий Л. А. Об одной формуле Гельфанда — Левитана // Успехи мат. наук. 1953. Т. 8, № 2. С. 119–123.
5. Гасымов М. Г. О сумме разностей собственных значений двух самосопряженных операторов // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150, № 6. С. 1201–1205.
6. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176, № 2. С. 259–262.
7. Гусейнов Г. Ш., Левитан Б. М. О формулах следов для оператора Штурма — Лиувилля // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1978. № 1. С. 40–49.
8. Садовничий В. А. О следах обыкновенных дифференциальных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 179–188.
9. Печенцов А. С. Регуляризованные следы дифференциальных операторов. Метод Лидского — Садовничего // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 4. С. 490–497.
10. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Формула следа для операторов Штурма — Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 427–442.
11. Любшкин В. А., Подольский В. Е. О суммируемости регуляризованных следов дифференциальных операторов // Мат. заметки. 1993. Т. 54, № 2. С. 33–38.
12. Садовничий В. А., Любшкин В. А. Формулы следов и теория возмущений // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 5. С. 1064–1066.
13. Дубровский В. В. Абстрактные формулы регуляризованных следов эллиптические гладких дифференциальных операторов, заданных на компактных многообразиях // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 12. С. 2164–2166.
14. Садовничий В. А., Подольский В. Е. Следы операторов с относительно компактным возмущением // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 2. С. 129–152.
15. Садовничий В. А., Подольский В. Е. Следы операторов // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, № 5. С. 89–156.
16. Халилова Р. З. Регуляризация следа операторного уравнения Штурма — Лиувилля // Функци. анализ, теория функций и их приложения. 1976. № 3. С. 154–161.

Статья поступила 19 мая 2007 г., окончательный вариант — 7 мая 2008 г.

Асланова Нигяр Махар кызы
Институт математики и механики НАН Азербайджана,
ул. Ф. Агаева, 9, Баку AZ 1141, Азербайджан
nigar.aslanova@yahoo.com