Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6

УДК 517.95

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С КОНЦАМИ

С. А. Корольков

Аннотация. Исследуется вопрос разрешимости некоторых краевых задач на некомпактных римановых многообразиях с концами. Получены условия существования и единственности решений рассматриваемых задач. Также найдены условия выполнения теорем типа Лиувилля для гармонических функций на таких многообразиях.

Ключевые слова: гармоническая функция, риманово многообразие, теоремы типа Лиувилля, краевая задача.

§ 1. Введение

Изучение эллиптических уравнений на римановых многообразиях является достаточно новым направлением в современной математике и лежит на стыке дифференциальной геометрии, математического анализа и теории случайных процессов. Истоки указанной проблематики восходят к классификационной теории двумерных некомпактных римановых многообразий и поверхностей. Важный класс проблем данного направления относится к получению теорем типа Лиувилля, утверждающих тривиальность пространства ограниченных решений некоторых эллиптических уравнений на многообразии.

Классическая формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая в $\mathbb{R}^n$ функция тождественно постоянна. В последнее время осуществляется следующий подход к теоремам типа Лиувилля. Пусть на римановом многообразии M заданы класс функций A и эллиптический оператор L. Будем говорить, что на M *выполнено обобщенное* (A, L)-*лиувиллево свойство*, если пространство решений уравнения $Lu = 0$, принадлежащих функциональному классу A, имеет конечную размерность. Оценки размерностей различных пространств решений эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях получены в работах ряда математиков (см. [1–9] и др.). Достаточно подробно об этой тематике написано, например, в [1–3].

Ряд работ посвящен изучению гармонических функций на многообразиях с концами. Так, в [4] доказано, что если многообразие M имеет m концов, то размерность пространства гармонических на M функций, которые ограничены либо сверху, либо снизу на каждом конце, не меньше чем m. Там же доказано, что если M имеет гиперболический тип, то размерность конуса неотрицательных гармонических на M функций также не меньше чем m.

На многообразиях с *регулярными концами* А. А. Григорьяном в работе [5] доказана разрешимость некоторых краевых задач для положительных гармонических функций и получены оценки размерности пространства ограниченных функций и конуса положительных гармонических функций. Здесь под регулярностью конца понимается выполнение неравенства Харнака для неотрицательных гармонических функций на соответствующем конце.

А. Г. Лосевым в работе [6] получены условия выполнения теорем типа Лиувилля на многообразиях с модельными концами, а также даны точные оценки размерности пространства ограниченных функций и конуса положительных гармонических функций на таких многообразиях. В работах [7, 10] доказана разрешимость некоторых краевых задач для неотрицательных решений уравнения Лапласа — Бельтрами и для ограниченных решений стационарного уравнения Шредингера

$$Lu = \Delta u - c(x)u = 0$$

соответственно на многообразиях с модельными концами.

В настоящей работе развивается подход к постановке краевых задач на некомпактных римановых многообразиях, примененный в [11] и основанный на введении понятия класса $[f]$ эквивалентных на многообразии M непрерывных ограниченных функций.

Пусть M — полное некомпактное риманово многообразие и $B \subset M$ — компактное множество. Связную неограниченную компоненту $E \subset M \setminus B$ такую, что ∂E — компакт, будем называть *концом* M по отношению к B (см., например, [1]). Если число концов M относительно некоторого компактного множества равномерно ограниченно сверху целым числом, то говорят, что M *имеет конечное число концов*. В этом случае существуют положительное R и целое $k \geq 1$ такие, что если Ω — некоторая ограниченная область, содержащая $B(o, R)$, то $M \setminus \overline{\Omega}$ имеет ровно k неограниченных компонент. Здесь $B(o, R)$ — геодезический шар радиуса R с центром в точке $o \in M$.

Всюду далее рассматриваются многообразия без края с конечным числом концов.

Пусть $M = B \cup D_1 \cup \dots \cup D_m$ — произвольное многообразие без края с концами $D_1, \dots, D_m$. При этом предполагаем, что компакт B выбран таким образом, что многообразие M имеет ровно m концов относительно любого другого компакта $B' \supset B$.

Введем понятие емкостного потенциала произвольного конца D_i многообразия M. Пусть $\{B_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание конца D_i, т. е. последовательность предкомпактных открытых подмножеств с гладкими границами ∂B_k^i такая, что $\partial D_i \subset \overline{B}_k^i$, $B_k^i \subset D_i$, $\overline{B}_k^i \setminus \partial D_i \subset B_{k+1}^i$ для всех $k \geq 1$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k^i = D_i \setminus \partial D_i$. Пусть v_k^i, $k = 1, 2, \dots,$ — решения следующих задач Дирихле в B_k^i:

$$\Delta v_k^i = 0, \quad v_k^i\big|_{\partial B_k^i \setminus \partial D_i} = 0, \quad v_k^i\big|_{\partial D_i} = 1.$$

Последовательность функций $\{v_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ в силу принципа максимума монотонно возрастает. Кроме того, $0 \leq v_k^i \leq 1$ в B_k. Отсюда следует, что существует предельная функция

$$v_i(x) = \lim_{k \to \infty} v_k^i(x),$$

гармоническая на D_i и такая, что $0 \leq v_i(x) \leq 1$. Функция v_i называется *емкостным потенциалом* конца D_i.

Определение 1. Говорят, что конец D_i многообразия M *имеет параболический тип*, если его емкостный потенциал тождественно равен единице. В противном случае говорят, что конец D_i *имеет гиперболический* (или *непараболический*) *тип.*

Зафиксируем некоторый конец D_i. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непрерывные ограниченные на D_i функции. Будем говорить, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны на* D_i, и использовать обозначение $f_1(x) \sim f_2(x)$, если для некоторого гладкого исчерпания $\{B_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ конца D_i выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{D_i \setminus B_k^i} |f_1(x) - f_2(x)| = 0.$$

Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности, не зависит от выбора исчерпания конца D_i и, таким образом, разбивает множество всех непрерывных ограниченных на D_i функций на классы эквивалентности (см., например, [11]). Обозначим класс эквивалентных f функций через $[f]$.

Будем говорить, что функции f_1 и f_2 *слабо эквивалентны на* D_i, если

$$|f_1(x) - f_2(x)| \le C v_i(x)$$

на D_i для некоторой константы C. Обозначим класс слабо эквивалентных f функций через $[f]^*$.

Определение 2. Будем говорить, что конец гиперболического типа D_j многообразия M является Δ-*строгим*, если $v_j(x) \in [0]$ на D_j (см. [11]). Будем говорить, что конец параболического типа D_i является Δ-*строгим*, если для всякой неотрицательной гармонической на D_i функции $u(x)$ выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \Big(\sup_{\partial B_k^i \setminus \partial D_i} u(x) - \inf_{\partial B_k^i \setminus \partial D_i} u(x) \Big) = 0,$$

где $\{B_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание конца D_i.

Заметим, что в силу принципа максимума определение Δ-строго конца параболического типа корректно.

Замечание 1. Если D_j — Δ-строгий конец гиперболического типа, то из того, что $f_1(x) \in [f]^*$, следует, что $f_1(x) \in [f]$.

Введем понятие предела по концу многообразия.

Определение 3. Будем говорить, что число b является *пределом функции* $u(x)$ *по концу* D_i, и использовать обозначение $\lim\limits_{D_i} u(x) = b$, если $u(x) \sim b$ на D_i, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{D_i \setminus B_k} |u(x) - b| = 0$$

для некоторого исчерпания $\{B_k\}$ конца D_i.

Будем говорить, что *предел функции* $u(x)$ *по концу* D_i *равен бесконечности*, и писать

$$\lim_{D_i} u(x) = +\infty \quad (\lim_{D_i} u(x) = -\infty),$$

если

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{D_i \setminus B_k} u(x) = +\infty \quad (\lim_{k\to\infty} \sup_{D_i \setminus B_k} u(x) = -\infty)$$

для некоторого исчерпания $\{B_k\}$ конца D_i.

Несложно показать, что определение предела не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ в силу свойств отношения $\sim$ (см., например, [11]).

Определим поток гармонической функции по концу многообразия.

Определение 4. *Потоком гармонической функции* u по концу D_i назовем число

$$\operatorname*{flux}_{D_i} u = \int\limits_{\partial B(0,r)\cap D_i} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\mu',$$

где $B(0,r)$ — геодезический шар радиуса r такой, что $B \subset B(0,r)$, ν — единичная внешняя нормаль к $B(0,r)$.

Заметим, что в силу формулы Грина определение потока не зависит от r.

Всюду далее будем считать, что $D_1, \dots, D_s$ — концы параболического типа, $D_{s+1}, \dots, D_{s+l}$ — концы гиперболического типа, $s + l = m$.

Обозначим через $\mathbb{H}(M)$ пространство гармонических на M функций. Через $\mathbb{H}'(M)$ и $\mathbb{BH}(M)$ обозначим пространство гармонических на M функций, ограниченных с одной стороны на каждом конце многообразия, и пространство ограниченных гармонических на M функций соответственно.

Пусть D_j — конец гиперболического типа. Будем говорить, что функция f_j принадлежит *классу допустимых на конце* D_j *функций*, если на конце D_j существует гармоническая функция u такая, что $u \sim f_j$ на D_j.

Всюду далее через K_j будем обозначать класс допустимых на конце D_j функций, $j = s+1, \dots, s+l$.

Будем рассматривать многообразия M, которые имеют гиперболический тип. Заметим, что многообразие с концами имеет гиперболический тип тогда и только тогда, когда оно содержит хотя бы один конец гиперболического типа (см. [1]).

Пусть $a_1, \dots, a_s$ — некоторый набор констант, а $f_{s+1}, \dots, f_{s+l}$ — набор функций, заданных на концах $D_{s+1}, \dots, D_{s+l}$ соответственно. Будем говорить, что на многообразии M разрешима *обобщенная краевая задача третьего рода* (1) для набора констант $a_1, \dots, a_s$ и набора функций $f_{s+1}, \dots, f_{s+l}$, если на M существует функция $u(x) \in \mathbb{H}'(M)$ такая, что

$$\operatorname*{flux}_{D_i} u(x) = a_i,\ i = 1, \dots, s, \quad u(x)|_{D_j} \in [f_j],\ j = s+1, \dots, s+l. \tag{1}$$

Основные результаты работы содержатся в следующих утверждениях.

Теорема 1. *Для любых констант $a_1, \dots, a_s$ и любых непрерывных ограниченных функций $f_j \in K_j$, $j = s+1, \dots, s+l$, существует функция $u(x) \in \mathbb{H}'(M)$ такая, что*

$$\operatorname*{flux}_{D_i} u(x) = a_i,\ i = 1, \dots, s, \quad u(x) \in [f_j]^*,\ j = s+1, \dots, s+l.$$

Теорема 2. *Пусть M такое, что все его концы являются Δ-строгими. Тогда на многообразии M разрешима обобщенная краевая задача третьего рода* (1) *для любых констант $a_1, \dots, a_s$ и любых непрерывных ограниченных функций $f_j \in K_j$, $j = s+1, \dots, s+l$, причем единственным образом.*

Теорема 3. *Если для всех $j = s+1, \dots, s+l$ классы допустимых функций K_j состоят только из констант и им эквивалентных функций и все концы параболического типа $D_1, \dots, D_s$ являются Δ-строгими, то*

$$\dim \mathbb{BH}(M) = l, \quad \dim \mathbb{H}'(M) = s + l.$$

В § 3 приведен пример, показывающий существенность требования Δ-строгости концов гиперболического типа для разрешимости на M обобщенной краевой задачи третьего рода.

Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н. профессору А. Г. Лосеву, а также к.ф.-м.н. доценту Е. А. Мазепе за полезные обсуждения и замечания по теме настоящей работы.

§ 2. Гармонические функции на концах многообразия

Пусть $M = B \cup D_1 \cup \dots \cup D_m$ — многообразие без края с концами $D_1, \dots, D_m$, B — некоторый компакт. Зафиксируем некоторый конец D_i. Пусть $D_i(0) = \partial D_i$.

Переобозначим для фиксированного i конец D_i через D и класс K_i через K соответственно. Обозначим через $\mathbb{H}(D)$ пространство гармонических на D функций, через $\mathbb{BH}(D)$ и $\mathbb{H}'(D)$ — пространство ограниченных и пространство ограниченных с одной стороны гармонических на D функций соответственно.

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание конца D. Положим также

$$D(k) = \partial B_k \setminus \partial D.$$

Гиперповерхностью будем называть всякое $(n-1)$-мерное подмногообразие M, где $n = \dim M$.

Следующее утверждение доказано в [5].

Лемма 1. *Пусть Ω — предкомпактное открытое множество в M, граница $\partial\Omega$ которого состоит из непересекающихся компактных гиперповерхностей F_1 и F_2. Пусть u — гармоническая функция в Ω, непрерывная в $\overline{\Omega}$, причем $u|_{F_1} \le 0$, $u|_{F_2} > 0$. Тогда*

$$\int\limits_{F_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\mu' = -\int\limits_{F_2} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\mu' > 0,$$

где ν — единичная внутренняя нормаль.

Лемма 2. *Пусть D — конец параболического типа и $u(x) \in \mathbb{BH}(D)$. Тогда $\operatorname*{flux}_D u(x) = 0$. Если $\lim\limits_D u(x) = +\infty$ ($\lim\limits_D u(x) = -\infty$ соответственно), то $\operatorname*{flux}_D u(x) > 0$ (соответственно $\operatorname*{flux}_D u(x) < 0$).*

Доказательство. Докажем первую часть леммы 2.

Пусть $u \in \mathbb{BH}(D)$. Не ограничивая общности, считаем, что $u(x) > 0$ на D. Тогда существует такая константа $C_1 > 0$, что $0 \le \inf\limits_D u(x) \le \sup\limits_D u(x) < C_1$.

Пусть $v_k(x)$, $x \in D$, — последовательность гармонических функций таких, что

$$v_k|_{D(0)} = 0, \quad v_k|_{D(k)} = 1.$$

Тогда в силу того, что конец D имеет параболический тип, последовательность $\{v_k\}$ убывает и сходится к нулю. Из последнего получаем, что

$$\int\limits_{\partial B(0,r)\cap D} \frac{\partial v_k}{\partial \nu}\, d\mu' \to 0$$

при $k \to \infty$, где $B(0,r)$ — геодезический шар радиуса r такой, что $B \subset B(0,r)$, ν — единичная внешняя нормаль к $B(0,r)$, т. е. $\operatorname*{flux}_D v_k \to 0$ при $k \to \infty$. Так как функции $f_1 = C_1 v_k - u$ и $f_2 = u + C_1(v_k - 1)$ отрицательны на $D(0)$ и положительны на $D(k)$, в силу леммы 1 получаем, что

$$\operatorname*{flux}_D (C_1 v_k - u) > 0, \quad \operatorname*{flux}_D (u + C_1(v_k - 1)) > 0.$$

Из последнего следует, что

$$-C_1 \operatorname*{flux}_D v_k \leq \operatorname*{flux}_D u \leq C_1 \operatorname*{flux}_D v_k.$$

При $k \to \infty$ получаем $\operatorname*{flux}_D u = 0$, что и требовалось показать.

Докажем вторую часть леммы 2. Если $\lim\limits_D u(x) = +\infty$ ($\lim\limits_D u(x) = -\infty$), то, используя лемму 1, получаем, что $\operatorname*{flux}_D u(x) > 0$ ($\operatorname*{flux}_D u(x) < 0$ соответственно).

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть D — конец параболического типа. Тогда для любых констант a, b существует функция $\tilde{u}(x) \in \mathbb{H}'(D)$ такая, что*

$$\tilde{u}(x)|_{D(0)} = b, \quad \operatorname*{flux}_D \tilde{u}(x) = a.$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ — гармоническая на D функция, равная нулю на $D(0)$ и такая, что $\lim\limits_D u(x) = +\infty$ (существование такой функции следует, в частности, из [12]). Тогда в силу леммы 2 $\operatorname*{flux}_D u(x) > 0$. Очевидно, что искомой функцией является

$$\tilde{u}(x) = \frac{a}{\operatorname*{flux}_D u(x)} u(x) + b.$$

Обозначим через $v(x)$ емкостный потенциал конца D.

Лемма 4. *Пусть D — конец гиперболического типа. Тогда для любых констант a_1, a_2 и для любой непрерывной ограниченной на конце D функции $f(x) \in K$ существуют гармонические на D функции $\underline{u}(x)$ и $\overline{u}(x)$ такие, что*

$$\underline{u}(x)|_{D(0)} \leq a_1,\ \overline{u}(x)|_{D(0)} \geq a_2, \quad \underline{u}(x)|_D \in [f]^*,\ \overline{u}(x)|_D \in [f]^*.$$

Доказательство. По определению класса K на D существует функция $u(x) \in \mathbb{H}(D)$ такая, что $u(x) \in [f]$.

Очевидно, что искомыми являются следующие функции:

$$\underline{u}(x) = (a_1 - \sup_{D(0)} u(x))v(x) + u(x), \quad \overline{u}(x) = (a_2 - \inf_{D(0)} u(x))v(x) + u(x).$$

Лемма 5. *Пусть D — конец гиперболического типа. Следующие утверждения эквивалентны.*

(A) *Для любой константы a_1 и для любой непрерывной ограниченной на конце D функции $f(x) \in K$ существует гармоническая на D функция $\underline{u}(x)$ такая, что*

$$\underline{u}(x)|_{D(0)} \leq a_1, \quad \underline{u}(x)|_D \in [f].$$

(B) *Для любой константы a_2 и для любой непрерывной ограниченной на конце D функции $f(x) \in K$ существует гармоническая на D функция $\overline{u}(x)$ такая, что*

$$\overline{u}(x)|_{D(0)} \geq a_2, \quad \overline{u}(x)|_D \in [f].$$

(C) *Конец D является Δ-строгим.*

Доказательство. Утверждения (A) и (B) следуют из утверждения (C) в силу леммы 4 и замечания 1.

Покажем, что из утверждения (B) вытекает утверждение (C).

Предположим противное, т. е. что $v(x) \notin [0]$ на D. Заметим, что $v(x) \in K$ по определению класса K. Из утверждения (B) следует, что на D существует гармоническая функция $u(x)$ такая, что $u(x)|_{D(0)} > 1$ и $u \sim v$ на D.

Рассмотрим функцию

$$w(x) = \frac{u(x)}{\min\limits_{D(0)} u(x)} < u(x).$$

Отметим, что $w(x)|_{D(0)} \geq 1$. Отсюда, из принципа максимума и того, что $u(x) \sim v(x)$, $v(x) \geq 0$ на D, получаем, что $w(x) \geq 0$ на D. Из того, что $u(x) \sim v(x) \not\sim 0$ и $w(x) < u(x)$ на D, следует существование точки $x^* \in D$ такой, что

$$w(x^*) < v(x^*). \tag{2}$$

Действительно, так как $u(x) \sim v(x)$ на D, то и

$$\frac{u(x)}{\min\limits_{D(0)} u(x)} \sim \frac{v(x)}{\min\limits_{D(0)} u(x)}$$

на D, или

$$w(x) \sim \frac{v(x)}{\min\limits_{D(0)} u(x)}$$

на D. Из последнего следует, что

$$w(x) - v(x) \sim v(x)\left(\frac{1}{\min\limits_{D(0)} u(x)} - 1\right)$$

на D. Поскольку $v(x) \notin [0]$ и $\min\limits_{D(0)} u(x) > 1$, найдется такая точка $x^* \in D$, что $w(x^*) - v(x^*) < 0$, откуда вытекает (2).

Пусть $\{B_k\}$, как и ранее, гладкое исчерпание конца D. Обозначим через v_k решение следующей задачи Дирихле в B_k:

$$\Delta v_k = 0, \quad v_k|_{D(k)} = 0, \quad v_k|_{D(0)} = 1.$$

Тогда по определению емкостного потенциала $v_k(x) \to v(x)$ при $k \to \infty$.

Заметим, что

$$w(x)|_{D(0)} \geq v_k(x)|_{D(0)} = 1, \quad w(x)|_{D(k)} \geq v_k(x)|_{D(k)} = 0.$$

Из последнего получаем, что при всех k

$$v_k(x) \leq w(x)$$

на $D \cap B_k$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ получаем, что $w(x) \geq v(x)$ на D. Пришли к противоречию с (2).

Таким образом, предположение о том, что $v(x) \notin [0]$ на D, неверно.

Нам осталось показать, что из утверждения (A) следует утверждение (C).

Предположим противное, т. е. что $v(x) \notin [0]$ на D. Заметим, что $v(x) \in K$ по определению класса K. Согласно утверждению (A) на D существует гармоническая функция $u(x)$ такая, что $u(x)|_{D(0)} < 1$ и $u \sim v$ на D.

Рассмотрим функцию

$$w(x) = \frac{v(x) - u(x)}{1 - \max\limits_{D(0)} u(x)}.$$

Заметим, что $w(x)|_{D(0)} \geq 1$, откуда в силу принципа максимума и того, что $u(x) \sim v(x)$, $v(x) \geq 0$ на D, следует, что $w(x) \geq 0$ на D.

Заметим также, что существует точка $x^* \in D$ такая, что

$$w(x^*) < v(x^*). \tag{3}$$

Действительно, если $\max\limits_{D(0)} u(x) < 0$, то в силу того, что $u(x) \sim v(x) \not\sim 0$, найдется такая точка x^*, что $u(x^*) = 0$. Тогда

$$w(x^*) = \frac{v(x^*)}{1 - \max\limits_{D(0)} u(x)} < v(x^*),$$

так как $\max\limits_{D(0)} u(x) < 0$.

Пусть теперь $\max\limits_{D(0)} u(x) \geq 0$. Из условия $u(x) \sim v(x) \not\sim 0$ и $\max\limits_{D(0)} u(x) < 1$ следует, что найдется такая точка $x^* \in D$, для которой

$$v(x^*) < \frac{u(x^*)}{\max\limits_{D(0)} u(x)}.$$

Из последнего получаем $v(x^*) - u(x^*) < v(x^*)(1 - \max\limits_{D(0)} u(x))$, откуда следует (3).

Пусть v_k — решение следующей задачи Дирихле в B_k:

$$\Delta v_k = 0, \quad v_k|_{D(k)} = 0, \quad v_k|_{D(0)} = 1.$$

Тогда по определению емкостного потенциала $v_k(x) \to v(x)$ при $k \to \infty$.

Заметим, что

$$w(x)|_{D(0)} \geq v_k(x)|_{D(0)} = 1, \quad w(x)|_{D(k)} \geq v_k(x)|_{D(k)} = 0.$$

Из последнего получаем, что при всех k

$$v_k(x) \leq w(x)$$

на $D \cap B_k$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем, что $w(x) \geq v(x)$ на D. Пришли к противоречию с (3).

Таким образом, предположение о том, что $v(x) \notin [0]$ на D, неверно.

Лемма 5 доказана.

Следствие 1. *Если $v(x) \notin [0]$ и $u(x)$ — некоторая гармоническая на D функция такая, что $u(x) \sim v(x)$ на D, то*

$$\min_{D(0)} u(x) \leq 1 \leq \max_{D(0)} u(x).$$

Доказательство. Предположим, что $u|_{D(0)} > 1$ либо $u|_{D(0)} < 1$. Тогда, как и при доказательстве импликаций $(B) \to (C)$ и $(A) \to (C)$ соответственно, несложно показать, что $v(x) \in [0]$. Пришли к противоречию с тем, что $v(x) \notin [0]$. Отсюда заключаем, что $\min\limits_{D(0)} u(x) \leq 1 \leq \max\limits_{D(0)} u(x)$.

Следствие 2. *Если $v(x)$ — емкостный потенциал конца D гиперболического типа, то $\inf_D v(x) = 0$.*

Доказательство. Пусть $c = \inf_D v(x) \neq 0$. Рассмотрим функцию

$$w(x) = v + \frac{c}{c-1}(1-v).$$

Заметим, что $w(x)|_{D(0)} = 1$, $w(x) \leq v(x)$ и $w(x) \geq 0$ на D. Поступая, как и при доказательстве импликации $(B) \to (C)$, получаем, что $w(x) \geq v(x)$. Учитывая, что $w(x) \leq v(x)$, заключаем, что $w(x) \equiv v(x)$, откуда $c = 0$. Пришли к противоречию.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Построим на многообразии M функцию $u \in \mathbb{H}'(M)$ такую, что

$$\operatorname*{flux}_{D_i} u(x) = a_i,\ i = 1, \dots, s, \quad u(x)|_{D_j} \in [f_j]^*,\ j = s+1, \dots, s+l.$$

Зафиксируем произвольным образом индекс $i = 1, \dots, s+l$. Для данного i построим на M функцию $u_i(x) \in \mathbb{H}'(M)$ такую, что

$$\operatorname*{flux}_{D_i} u_i(x) = a_i,\ 1 \leq i \leq s, \quad u_i(x)|_{D_i} \in [f_i]^*,\ s+1 \leq i \leq s+l, \tag{4}$$

и

$$\operatorname*{flux}_{D_j} u_i(x) = 0,\ 1 \leq j \leq s, j \neq i, \quad u_i(x)|_{D_j} \in [0]^*,\ s+1 \leq j \leq s+l,\ j \neq i. \tag{5}$$

Если $1 \leq i \leq s$ то, не ограничивая общности, считаем, что $a_i \geq 0$.

Пусть $u_i^0(x) \in \mathbb{H}'(D_i)$ — функция такая, что $-c \leq u_i^0\big|_{D_i(0)} \leq c$ и

$$\operatorname*{flux}_{D_i} u_i^0(x) = a_i,\ 1 \leq i \leq s, \quad u_i^0(x)|_{D_i} \in [f_i]^*,\ s+1 \leq i \leq s+l. \tag{6}$$

Здесь $0 \leq c < +\infty$ — некоторая постоянная. Существование функции u_i^0 непосредственно следует из лемм 3 и 4.

Пусть $\{B_k\}$ — гладкое исчерпание M, т. е. последовательность предкомпактных открытых подмножеств с гладкими границами ∂B_k такая, что $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$ для всех $k \geq 1$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k = M$. Рассмотрим последовательность функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, определенных в B_k и являющихся решением задачи

$$\Delta\varphi_k = 0 \text{ на } B_k, \quad \varphi_k|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k},$$

где $u_0(x) = u_i^0(x)$ на D_i и $u_0(x) = 0$ на D_j, $1 \leq j \leq s+l$, $j \neq i$.

Для доказательства существования предела $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k$ поступаем, как и в [6].

Обозначим через $G_k(x, y)$ функцию Грина в B_k.

Пусть φ_0 — финитная функция, равная нулю в B и единице вне некоторой окрестности B. Положим $U = u_0\varphi_0$, $\Delta U = f$. Заметим, что $\operatorname{supp} f$ лежит в окрестности B. Рассмотрим последовательность функций $\psi_k = \varphi_k - U$. Для них выполнено $\Delta\psi_k = -f$, $\psi_k|_{\partial B_k} = 0$. Тогда

$$\psi_k(x) = \int\limits_{B_k} G_k(x, y) f(y)\, dy.$$

Так как M — многообразие гиперболического типа, существует предел функций Грина $G_k(x,y)$. Из существования предела функций Грина следует существование предела последовательности $\{\psi_k\}$ и соответственно существование предела последовательности $\{\varphi_k\}$. Пусть $u_i = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k$. Заметим, что $u_i \in \mathbb{H}(M)$ в силу того, что $\Delta\varphi_k = 0$ на B_k.

Докажем, что функция $u_i(x)$ удовлетворяет условиям (4) и (5).

Действительно, так как $u_i = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k$, в силу непрерывности функции u_i^0 существуют

$$U_1 = \min_{\partial B\cap D_i} u_i, \quad U_2 = \max_{\partial B\cap D_i} u_i.$$

Тогда $U_1 \le u_i|_{\partial B\cap D_i} \le U_2$ и при достаточно больших k

$$U_1 - 1 \le \varphi_k|_{\partial B\cap D_i} \le U_2 + 1.$$

Кроме того, $-c \le u_0|_{\partial B\cap D_i} \le c$.

Пусть $A_1 = \min\{-c, U_1 - 1\}$, $A_2 = \max\{c, U_2 + 1\}$. Очевидно, $A_1 \le u_i^0\big|_{\partial B\cap D_i} \le A_2$ и $A_1 \le \varphi_k|_{\partial B\cap D_i} \le A_2$. Согласно леммам 3 и 4 на D_i существуют функции $\underline{u}_i(x) \in \mathbb{H}'(D_i)$ и $\overline{u}_i(x) \in \mathbb{H}'(D_i)$ такие, что

$$\underline{u}_i(x)|_{\partial B\cap D_i} \le A_1, \quad \overline{u}_i(x)|_{\partial B\cap D_i} \ge A_2 \tag{7}$$

и

$$\operatorname*{flux}_{D_i} \underline{u}_i(x) = \operatorname*{flux}_{D_i} \overline{u}_i(x) = a_i,\ 1 \le i \le s,\ \underline{u}_i(x) \in [f_i]^*,\ \overline{u}_i(x) \in [f_i]^*,\ s+1 \le i \le s+l. \tag{8}$$

Из (7) получаем, что

$$\underline{u}_i|_{\partial B\cap D_i} \le u_i^0|_{\partial B\cap D_i} \le \overline{u}_i|_{\partial B\cap D_i}. \tag{9}$$

Рассмотрим сначала случай $1 \le i \le s$. Покажем, что

$$\operatorname*{flux}_{D_i} u_i = a_i.$$

В силу (8) и (6) имеем

$$\operatorname*{flux}_{D_i}\big(\overline{u}_i - u_i^0\big) = \operatorname*{flux}_{D_i}(\overline{u}_i - \underline{u}_i) = \operatorname*{flux}_{D_i}\big(u_i^0 - \underline{u}_i\big) = 0.$$

Учитывая формулу (9) и лемму 1 получаем, что $\underline{u}_i \le u_i^0 \le \overline{u}_i$ на D_i и при достаточно больших k на $D_i \cap B_k$ имеем $\underline{u}_i \le \varphi_k \le \overline{u}_i$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\underline{u}_i \le u_i \le \overline{u}_i \quad \text{на } D_i, \tag{10}$$

откуда следует, что $u_i \in \mathbb{H}'(D)$. Так как $\overline{u}_i - \underline{u}_i = \mathrm{const}$ (см. доказательство леммы 3), из (10) выводим, что

$$0 \le u_i - \underline{u}_i \le \overline{u}_i - \underline{u}_i \equiv \mathrm{const},$$

т. е. $u_i - \underline{u}_i \in \mathbb{BH}(M)$, откуда в силу леммы 2 следует, что $\operatorname*{flux}\limits_{D_i}(u_i - \underline{u}_i) = 0$, тем самым $\operatorname*{flux}\limits_{D_i} u_i = a_i$.

Рассуждая аналогично, несложно показать, что потоки функции $u_i(x)$ по остальным концам параболического типа равны нулю.

Покажем, что $u_i(x) \in [0]^*$ на всех концах D_j, $j = s+1, \dots, s+l$, гиперболического типа.

Положим $\alpha_k = \max_B \varphi_k$. Заметим, что последовательность $\alpha_k \to a = \mathrm{const}$ при $k \to \infty$ в силу того, что существует предельная для последовательности $\{\varphi_k\}$ функция. Положим $\widetilde{\varphi}_k = \frac{\varphi_k}{\alpha_k}$ на B_k. Тогда каждая функция $\widetilde{\varphi}_k$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\Delta\widetilde{\varphi}_k = 0 \text{ на } B_k, \quad \widetilde{\varphi}_k|_{\partial B_k} = \frac{1}{\alpha_k} u_0|_{\partial B_k}, \quad \max_B \widetilde{\varphi}_k = 1,$$

откуда в силу принципа максимума и того, что $u_0 = 0$ на D_j, заключаем, что

$$0 \le \widetilde{\varphi}_k \le 1 \quad \text{на } B_k \cap D_j,$$

причем $\widetilde{\varphi}_k = 0$ на $\partial B_k \cap D_j$, $\max_B \widetilde{\varphi}_k = 1$. Отсюда вытекает, что

$$0 \le \widetilde{\varphi}_k \le v_j \quad \text{на } B_k \cap D_j, \tag{11}$$

где D_j — произвольный конец гиперболического типа, $v_j(x)$ — емкостный потенциал конца D_j. Из (11) получаем, что

$$0 \le u_i(x) = \lim_{k\to\infty} \alpha_k \widetilde{\varphi}_k \le a v_j$$

на D_j, откуда следует требуемое.

Таким образом, мы показали выполнение условий (4) и (5) для построенной функции $u_i(x)$ в случае $1 \le i \le s$.

Используя лемму 5 и действуя, как и в [11], можно показать справедливость формул (4) и (5) для случая $s+1 \le i \le s+l$.

Очевидно, что функция

$$u(x) = \sum_{i=1}^{s+l} u_i(x)$$

является искомой.

Теорема 1 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Из условия теоремы 2 в силу замечания 1 сразу следует разрешимость обобщенной краевой задачи третьего рода для любых констант $a_1, \dots, a_s$ и любых непрерывных ограниченных функций $f_j \in K_j$, $j = s+1, \dots, s+l$. Также из условия теоремы 2 вытекает, что всякая гармоническая на M функция ограничена с одной стороны на каждом конце многообразия M.

Пусть $u_1 \in \mathbb{H}'(M)$ и $u_2 \in \mathbb{H}'(M)$ — две функции, удовлетворяющие условиям (1).

Рассмотрим функцию $w = u_1 - u_2 \in \mathbb{H}'(M)$. В силу замечания 1 ее пределы по всем концам гиперболического типа многообразия M равны нулю. Также равны нулю ее потоки по всем концам параболического типа. Покажем, что $w(x) \equiv 0$, откуда будет следовать единственность.

Пусть D_i — конец параболического типа, т. е. $1 \le i \le s$. В силу Δ-строгости конца D_i и леммы 2 получаем, что существует конечный предел $\lim_{D_i} w(x)$.

Положим $p_i = \lim_{D_i} w(x)$, $i = 1, \dots, s+l$, и $p = \min_{i=1,\dots,s+l} p_i$. Так как пределы функции $w(x)$ по всем концам гиперболического типа равны нулю, то $p_j = 0$ для $j = s+1, \dots, s+l$.

Предположим, что $p < 0$. Пусть I — набор индексов таких, что

$$\lim_{D_i, i\in I} w(x) = p.$$

Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что $p < -\varepsilon < p_i$, $i \notin I$. Рассмотрим функцию $y(x) = w(x) + \varepsilon$. Заметим, что $\operatorname{flux}\limits_{D_i} y(x) = \operatorname{flux}\limits_{D_i} w(x) = 0$ для всех $i = 1, \dots, s$. Рассмотрим при достаточно больших r область, ограниченную всеми сечениями $D_i(r) = D_i \cap \partial B(0, r)$, $i = 1, \dots, s + l$. Тогда

$$y(x)|_{D_i(r), i\in I} < 0, \quad y(x)|_{D_i(r), i\notin I} > 0$$

и из леммы 1 получаем

$$-\sum_{i\in I} \operatorname{flux}_{D_i} y(x) > 0,$$

что противоречит условию $\operatorname{flux}\limits_{D_i} y(x) = 0$ для всех $i = 1, \dots, s$.

Таким образом, предположение о том, что $p < 0$, неверно, откуда в силу принципа максимума функция $w(x)$ неотрицательна на M. Аналогично можно показать, что

$$P = \max_{i=1,\dots,l} p_i \leq 0,$$

так что $w(x)$ неположительна на M. Отсюда заключаем, что $w(x) \equiv 0$ на M.

Теорема 2 доказана.

Существенность требования того, чтобы все концы гиперболического типа были Δ-строгими, показана в следующем примере.

Пример 1. Пусть многообразие M не имеет концов параболического типа и $f_1(x) \equiv v_1(x)$, $f_2 \equiv \dots \equiv f_l \equiv 0$. Здесь $v_1(x)$ — емкостный потенциал конца D_1, причем конец D_1 не является Δ-строгим, т. е. $v_1(x) \notin [0]$.

Предположим, что существует гармоническая функция $u(x)$ на M, удовлетворяющая задаче (1), где $s = 0$, $f_1 \equiv v_1, f_2 \equiv 0, \dots, f_l \equiv 0$.

Заметим, что в силу следствия 1 $\min\limits_{\partial D_1} u(x) \leq 1 \leq \max\limits_{\partial D_1} u(x)$, и мы приходим к противоречию с принципом максимума (так как пределы функции $u(x)$ по концам $D_2, \dots, D_l$ равны нулю, а на конце D_1 будет $u \sim v \leq 1$).

Таким образом, условие Δ-строгости всех концов гиперболического типа многообразия M в условии теоремы 2 существенно.

§ 5. Доказательство теоремы 3

Замечание. Условие теоремы 3 эквивалентно тому, что для всякой гармонической на конце D_j функции u существует конечный предел $\lim\limits_{D_j} u$, $j = s+1, \dots, s+l$. Отсюда, учитывая следствие 2, получаем, что $v_j(x) \in [0]$ на D_j для всех $j = s+1, \dots, s+l$, т. е. концы D_j являются Δ-строгими для всех $j = s+1, \dots, s+l$. Обратное, вообще говоря, неверно, т. е. из Δ-строгости конца гиперболического типа не следует, что класс допустимых на этом конце функций состоит только из констант и им эквивалентных функций (см., например, [10]).

Пусть $f_{D_i} \in \mathbb{H}'(M)$, $i = 1, \dots, s$, — набор функций таких, что

$$\operatorname{flux}_{D_i} f_{D_i} = 1, \quad \operatorname{flux}_{D_j} f_{D_i} = 0, \quad j = 1, \dots, s, \; j \neq i;$$

$$\lim_{D_j} f_{D_i} = 0, \quad j = s+1, \dots, s+l.$$

Существование и единственность таких функций вытекает из теоремы 2 и условия теоремы 3.

Пусть $h_{D_j} \in \mathbb{H}'(M)$, $j = s+1, \dots, s+l$, — набор функций таких, что

$$\operatorname*{flux}_{D_i} h_{D_j} = 0, \quad i = 1, \dots, s;$$

$$\lim_{D_j} h_{D_j} = 1, \quad \lim_{D_i} h_{D_j} = 0, \quad i = s+1, \dots, s+l, \ i \neq j.$$

Существование и единственность таких функций следует из теоремы 2. Заметим, что для всех $j = s+1, \dots, s+l$ существуют пределы

$$p_i^j = \lim_{D_i} h_{D_j}(x), \quad i = 1, \dots, s. \tag{12}$$

В силу замечания к теореме 3 пределы (12) конечны. Учитывая лемму 2 и то, что все концы многообразия Δ-строгие, получаем, что $h_{D_j}(x) \in \mathbb{BH}(M)$ для всех $j = s+1, \dots, s+l$.

Очевидно, что функции $f_{D_1}, \dots, f_{D_s}, h_{D_{s+1}}, \dots, h_{D_{s+l}}$ линейно независимы.

Пусть $u(x) \in \mathbb{BH}(M)$. Из условия теоремы 3 следует, что на концах гиперболического типа $D_{s+1}, \dots, D_{s+l}$ существуют конечные пределы функции $u(x)$. Пусть $b_{s+1}, \dots, b_{s+l}$ — набор этих пределов. Рассмотрим функцию

$$w(x) \equiv u(x) - \sum_{j=s+1}^{s+l} b_j h_{D_j}(x).$$

Очевидно, что $w(x) \in \mathbb{BH}(M)$ и ее пределы по всем концам гиперболического типа равны нулю. Кроме того, в силу леммы 2 потоки функции $w(x)$ по всем концам параболического типа также равны нулю. Тогда, как и при доказательстве теоремы 2, получаем, что $w(x) \equiv 0$, откуда

$$u(x) \equiv \sum_{j=s+l}^{s+l} b_j h_{D_j}(x),$$

т. е. набор $h_{D_{s+1}}, \dots, h_{D_{s+l}}$ является базисом пространства $\mathbb{BH}(M)$. Отсюда получаем, что $\dim \mathbb{BH}(M) = l$.

Пусть теперь $u(x) \in \mathbb{H}'(M)$. Из условия теоремы 3 следует, что на концах гиперболического типа $D_{s+1}, \dots, D_{s+l}$ существуют конечные пределы функции $u(x)$. Пусть $b_{s+1}, \dots, b_{s+l}$ — набор этих пределов. Пусть также $a_1, \dots, a_s$ — потоки функции $u(x)$ по концам $D_1, \dots, D_s$.

Рассмотрим функцию

$$w(x) \equiv u(x) - \sum_{i=1}^{s} a_i f_{D_i}(x) - \sum_{j=s+1}^{s+l} b_j h_{D_j}(x).$$

Очевидно, что потоки функции $w(x)$ по всем концам параболического типа, как и пределы по всем концам гиперболического типа, равны нулю. Из условия теоремы 3, как и при доказательстве теоремы 2, следует, что $w(x) \equiv 0$, откуда

$$u(x) \equiv \sum_{i=1}^{s} a_i f_{D_i}(x) + \sum_{j=s+l}^{s+l} b_j h_{D_j}(x),$$

т. е. набор $f_{D_1}, \dots, f_{D_s}, h_{D_{s+1}}, \dots, h_{D_{s+l}}$ является базисом пространства $\mathbb{H}'(M)$. Отсюда получаем, что $\dim \mathbb{H}'(M) = s + l$.

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Grigor'yan A.* Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1999. V. 36. P. 135–249.
2. *Yau S. T.* Nonlinear analysis in geometry // Enseign. Math. (2). 1987. V. 33. P. 109–158.
3. *Миклюков В. М.* Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей // Изв. РАН. Сер. мат. 1996. Т. 60, № 4. С. 111–158.
4. *Li P., Tam L. F.* Harmonic functions and the structure of complete manifolds // J. Differential Geom. 1992. V. 35, N 2. P. 359–383.
5. *Григорьян А. А.* О множестве положительных решений уравнения Лапласа — Бельтрами на римановых многообразиях специального вида // Изв. вузов. Математика. 1987. № 2. С. 30–37.
6. *Лосев А. Г.* Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида // Изв. вузов. Математика. 1991. № 12. С. 15–24.
7. *Корольков С. А., Лосев А. Г.* О множестве положительных решений уравнения Лапласа—Бельтрами на модельных многообразиях // Вестн. ВолГУ. Сер.1: Математика. Физика. 2003–2004. № 8. С. 48–61.
8. *Colding T. H., Minicozzi II V. P.* Harmonic functions with polynomial growth // J. Differential Geom. 1997. V. 46, N 1. P. 1–77.
9. *Li P.* Harmonic functions of polynomial growth // Math. Res. Lect. 1997. V. 4. P. 35–44.
10. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Ограниченные решения уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях специального вида // Докл. РАН. 1999. Т. 367, № 2. С. 166–167.
11. *Мазепа Е. А.* Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 3. С. 591–599.
12. *Nakai M.* On Evans potential // Proc. Japan Acad. 1962. V. 38. P. 624–629.

Статья поступила 28 декабря 2006 г.

Корольков Сергей Алексеевич
Волгоградский гос. университет,
кафедра математического анализа и теории функций,
Университетский пр., 100, Волгоград 400062
sergei.korolkov@rambler.ru