*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1*

*УДК 517.51*

# О НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ $\mathbf{P}$–ИЧНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ПРИБЛИЖЕНИИ СИСТЕМОЙ $\mathbf{P}$–ИЧНЫХ СДВИГОВ ОДНОЙ ФУНКЦИИ

**С. С. Волосивец**

**Аннотация.** При некоторых условиях на последовательность функций доказана равносильность сходимости в пространстве $\mathbf{P}$-ичных обобщенных функций и в пространстве локально интегрируемых функций. Получены аналоги тауберовой теоремы Винера и теоремы Винера о плотности сдвигов для $\mathbf{P}$-ичных сверток и сдвигов.

**Ключевые слова:** $\mathbf{P}$-ичная обобщенная функция, $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, мультипликативное преобразование Фурье, точки Лебега порядка $p$, тауберова теорема Винера, теорема Винера о плотности сдвигов.

## Введение

Классическая теория обобщенных функций создана в работах С. Л. Соболева [1] и Л. Шварца [2]. При этом обобщенные функции вводились как линейные непрерывные функционалы в различных пространствах бесконечно дифференцируемых функций. В случае двоичных производных подобная идея развита Б. И. Голубовым [3]. Мы будем использовать понятия основных и обобщенных функций на $\mathbb{R}_+$, аналогичные рассмотренным в книге В. С. Владимирова, И. В. Воловича и Е. И. Зеленова [4] в случае поля $p$-адических чисел.

Дадим необходимые определения. Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{|j|\in\mathbb{N}}$, где $p_j \in \mathbb{N}$ и $2 \le p_j \le N$ для всех $|j| \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_j = p_1 \dots p_j$ при $j \in \mathbb{N}$, $m_0 = 1$, $m_{-j} = 1/m_j$ при $j \in \mathbb{N}$. Тогда каждому $x \in \mathbb{R}_+$ соответствует разложение

$$x = \sum_{j=1}^{k(x)} x_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}, \quad x_j \in \mathbb{Z},\ 0 \le x_j < p_j. \tag{1}$$

Представление (1) определяется однозначно, если при $x = k/m_n$, $k, n \in \mathbb{N}$, брать разложения с конечным числом $x_j \ne 0$. Если $x, y \in \mathbb{R}_+$ записаны в виде (1), то по определению

$$z = x \oplus y = \sum_{j=1}^{\max(k(x),k(y))} z_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_j}{m_j},$$

где $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$, $0 \le z_j < p_j$, $|j| \in \mathbb{N}$. Аналогично определяется $x \ominus y$. Функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ называется $\mathbf{P}$-*непрерывной в точке* $x$, если $\lim\limits_{h\to 0} |f(x \oplus h) -$

© 2009 Волосивец С. С.

$f(x)| = 0$. Для $x, y \in \mathbb{R}_+$ вида (1) запишем ядро

$$\chi(x,y) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty}(x_{-j}y_j + x_j y_{-j})\right)$$

(сумма в правой части конечна). Из определения следует, что $\chi(x,y) = \chi(y,x)$ и $|\chi(x,y)| = 1$ при $x, y \in \mathbb{R}_+$. Кроме того (см. [5, § 1.5]),

$$\chi(x \oplus z, y) = \chi(x,y)\chi(z,y), \quad \chi(x \ominus z, y) = \chi(x,y)\overline{\chi(z,y)}$$

для почти всех пар $(x,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ при фиксированном $y \in \mathbb{R}_+$. Аналогом ядра Дирихле является $D_y(x) = \int\limits_0^y \chi(x,t)\,dt$. Известно. что

$$D_{m_n}(x) = m_n X_{[0,1/m_n)}(x), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $X_E$ — индикатор множества $E$ (см. [5, § 1.5, 11.1]).

Пусть $I_j^n = [j/m_n, (j+1)/m_n)$, $B_n = [0, m_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, а $G_{nm}$ — множество функций, постоянных на всех $I_j^n$, $j \in \mathbb{Z}_+$, и равных нулю вне $B_m$. Рассмотрим $D = \bigcup\limits_{n,m\in\mathbb{Z}} G_{nm}$. Последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в $D$ к $\varphi \in D$, если

1) существуют фиксированные $n, m \in \mathbb{Z}$ такие, что $\varphi_k \in G_{nm}$ для любого $k \in \mathbb{N}$;

2) $\varphi_k(x)$ сходится равномерно к $\varphi(x)$ на $\mathbb{R}_+$.

Ясно, что $D$ полно относительно такой сходимости, т. е. если последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D$ удовлетворяет условию 1) и равномерно фундаментальна на $\mathbb{R}_+$, то предельная функция $\varphi$ принадлежит $D$. Кроме того, $D$ плотно во всех $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \le p < \infty$, с нормой $\|f\|_p = \bigl(\int\limits_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^p\,dx\bigr)^{1/p}$. Из результатов А. В. Ефимова [5, § 10.5, теорема 10.5.2] легко вытекает, что для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \le p < \infty$, верно соотношение $\lim\limits_{h\to 0}\|f(x \oplus h) - f(x)\|_p = 0$. Пространство $L^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ состоит из измеримых на $\mathbb{R}_+$ функций $f(x)$ таких, что $\|f\|_{\infty} = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\mathbb{R}_+}|f(x)| < \infty$. Пространства $L^p(B_i)$ определяются аналогично.

Пусть $D'$ — множество линейных функционалов $f$ на $D$. Через $(f,\varphi)$ обозначим значение $f \in D'$ на $\varphi \in D$. Будем писать $f = g$ в $D'$, если $(f,\varphi) = (g,\varphi)$ для всех $\varphi \in D$. Аналогично [4, § 6, п. 3] доказывается, что $f \in D'$ непрерывен, т. е. из $\varphi_k \to \varphi$ в $D$ следует, что $(f,\varphi_k) \to (f,\varphi)$. По определению $f_n \to f$ в $D'$, если $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n,\varphi) = (f,\varphi)$ для каждой $\varphi \in D$. Если $f \in L^p(B_n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ к $f$, если для любого $k \in \mathbb{N}$ верно $\lim\limits_{n\to\infty}\|f - f_n\|_{L^p(B_k)} = 0$. Ясно, что $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ задает функционал из $D'$ по формуле $(f,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(x)\varphi(x)\,dx$.

Для $f \in D'$, $\varphi \in D$ функционалы $f\varphi = \varphi f \in D'$ определяются равенством $(f\varphi, \psi) = (f, \varphi\psi)$ для всех $\psi \in D$. В этом определении $\varphi \in D$ можно заменить на $\varphi$, постоянную на всех $I_j^n$ при фиксированном $n$. Если для $f \in D'$ существует $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $fX_{B_k} = f$, то пишут $\mathrm{supp}(f) \subset B_k$. Для $f \in L^q(\mathbb{R}_+)$, $1 \le q \le \infty$, и $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$ свертка $f * g(x)$ определяется равенством

$$f * g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(x \ominus y) g(y)\,dy.$$

Из теорем Фубини и М. Рисса — Торина легко следует, что $f * g(x) \in L^q(\mathbb{R}_+)$ и $\|f * g\|_q \le \|f\|_q \|g\|_1$. При $q = \infty$ свертка $f * g$ равномерно **P**-непрерывна на $\mathbb{R}_+$. В самом деле, как указано выше,

$$\lim_{h \to 0} \|g(x \oplus h) - g(x)\|_1 = 0$$

для $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$, откуда

$$|f * g(x \oplus h) - f * g(x)| \le \|f\|_\infty \|g(\cdot \oplus h) - g(\cdot)\|_1 \to 0$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}_+$ при $h \to 0$. Для $f \in D'$ и $\varphi \in D$ свертку можно определить равенством $(f * \varphi, \psi) = (f, \widetilde{\varphi} * \psi)$, где $\psi \in D$ и $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(\ominus x)$. Так как $\varphi, \psi \in D$ влечет $\widetilde{\varphi}, \varphi * \psi \in D$ (см. ниже), данное определение корректно. Для основных и обобщенных функций далее важную роль будет играть $S_{m_n}(f) = f * D_{m_n}$.

Для $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ мультипликативное **P**-преобразование Фурье задается формулой

$$\hat{f}(x) = \int\limits_0^\infty f(y)\overline{\chi(x, y)}\, dy.$$

Ясно, что из сходимости $f_n(t)$ к $f(t)$ в $L^1(\mathbb{R}_+)$ следует равномерная сходимость $\hat{f}_n(x)$ к $\hat{f}(x)$ на $\mathbb{R}_+$ и что для $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ функция $\hat{f}(x)$ **P**-непрерывна на $\mathbb{R}_+$ (см. [5, § 6.1, теорема 6.1.5]). Известно (см. [5, § 6.2, теоремы 6.2.13, 6.2.14]), что из $\varphi \in G_{nm}$ вытекает $\widehat{\varphi} \in G_{mn}$. Кроме того, согласно [5, § 6.2, теорема 6.2.2] для $\varphi \in D$ в силу ее **P**-непрерывности на $\mathbb{R}_+$ верна теорема обращения

$$\varphi(x) = (\widehat{\varphi})^\vee(x) := \int\limits_0^\infty \widehat{\varphi}(y)\chi(x, y)\, dy,$$

откуда легко видеть, что отображение $\varphi \to \widehat{\varphi}$ есть линейный изоморфизм $D$ на $D$. Для $f \in D'$ вводим $\hat{f}$ и $\check{f}$ следующим образом: $(\hat{f}, \varphi) = (f, \widehat{\varphi})$, $(\check{f}, \varphi) = (f, \check{\varphi})$ для всех $\varphi \in D$. Для $f, g \in L^1(\mathbb{R}_+)$ известно, что

$$(f * g)^\wedge(x) = \hat{f}(x)\hat{g}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+$$

(см. [5, § 6.1, теорема 6.1.4]), откуда легко выводится, что $f * g \in D$ для $f, g \in D$. Аналогичное свойство верно в случае $f \in D'$, $g \in D$ (см. лемму 2.3) и для $(f * g)^\vee(x)$. Для $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ по определению $\tau_a f(x) = f(x \ominus a)$, а для $f \in D'$ полагаем $(\tau_a f, \varphi) = (f, \tau_{-a}\varphi)$, $\varphi \in D$.

Данная работа состоит из двух разделов. В разд. 1 изучается связь между сходимостью в пространстве $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ и сходимостью в $D'$. Для функций, определенных на $\mathbb{R}$, $p = 1$ и пространства $D'$ непрерывных функционалов на множестве бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $\mathbb{R}$ подобные результаты были установлены Бельтрами [6]. В разд. 2 получен аналог тауберовой теоремы Винера через доказательство тривиальности множества решений уравнения $f * g = 0$, где $f$ — фиксированная функция из $L^1(\mathbb{R}_+)$ такая, что $\hat{f}(x) \ne 0$, $x \in \mathbb{R}_+$, а $g \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Ранее другим методом при $p_i \equiv 2$ аналог тауберовой теоремы Винера был доказан Б. И. Голубовым [7]. Затем доказываются критерий полноты **P**-ичных сдвигов одной функции в $L^1(\mathbb{R}_+)$ и невозможность построения базиса из последовательности таких сдвигов в $L^1(\mathbb{R}_+)$ (ссылки см. в разд. 2).

## 1. Связь между сходимостью в $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ и в $D'$

Хорошо известно, что для $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ и п. в. $x \in \mathbb{R}_+$ верно соотношение

$$\lim_{h\to 0} h^{-1} \int\limits_0^h |f(x+y) - f(x)|\, dy = 0,$$

т. е. почти все $x \in \mathbb{R}_+$ являются точками Лебега (см. [8, гл. 9, § 4, теорема 5]). Пусть для $x \in \mathbb{R}_+$ через $I^k(x)$ обозначен полуинтервал $I^k_j$, содержащий $x$. Тогда аналогично указанной выше теореме 5 из [8, гл. 9, § 4] доказывается, что

$$\lim_{k\to\infty} m_k \int\limits_{I^k(x)} |f(t) - f(x)|\, dt = 0$$

для п. в. $x \in \mathbb{R}_+$. Для $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ и п. в. $x \in \mathbb{R}_+$ справедливо

$$\lim_{h\to 0} h^{-1} \int\limits_0^h |f(x+y) - f(x)|^p\, dy = 0$$

(см., например, [9]). Для $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ введем

$$f_{k,p}(x) = \left( m_k \int\limits_{I^k(x)} |f(t) - f(x)|^p\, dt \right)^{1/p} = \left( m_k \int\limits_0^{1/m_k} |f(x \oplus t) - f(x)|^p\, dt \right)^{1/p}.$$

Точки $x \in \mathbb{R}_+$, для которых $\lim\limits_{k\to+\infty} f_{k,p}(x) = 0$, назовем **P**-*ичными точками Лебега порядка* $p$ для функции $f(x)$. Как следует из леммы 1.1, при $1 < p < \infty$ и $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ также почти все $x \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяют этому определению. Пусть $m(E)$ — обычная мера Лебега. Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^p(B_i)$ *удовлетворяет условию* $(UL^p)$ на $B_i$, если существует $B'_i \subset B_i$ такое, что $m(B'_i) = m_i$ и для всех $x \in B'_i$ верно

$$\lim_{k\to\infty} \sup_n (f_n)_{k,p}(x) = 0.$$

Если же для каждого $x \in B'_i$ существует последовательность номеров $k_j \to \infty$, $k_j \in \mathbb{N}$, такая, что $\lim\limits_{j\to\infty} \sup_n (f_n)_{k_j,p}(x) = 0$, то $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет ослабленному условию $(UL^p_w)$. Аналог ослабленного условия $(UL^p_w)$ при $p = 1$ и для отрезка $[x-h, x+h]$ вместо $I^k(x)$ рассматривал Бельтрами [6]. Наконец, назовем $x_0 \in \mathbb{R}_+$ *точкой* **P**-*ичной плотности* для $E \subset \mathbb{R}_+$, если

$$\lim_{k\to+\infty} m_k \int\limits_{I^k(x_0)} X_E(x)\, dx = 1,$$

и *точкой* **P**-*ичного разрежения* для $E$, если последний предел равен нулю. Ясно, что точка **P**-ичной плотности для $E$ есть точка **P**-ичного разрежения для дополнения $CE$ к множеству $E$. Если $\Phi(x) = \int\limits_0^x X_E(t)\, dt$, то, как показано в [5, § 2.8], соотношение

$$\lim_{k\to+\infty} m_k \int\limits_{I^k(x_0)} X_E(x)\, dx = X_E(x_0)$$

имеет место во всех $x_0$, в которых $\Phi'(x_0) = X_E(x_0)$, т. е. почти все точки $x \in E$ являются точками **P**-ичной плотности для $E$.

Сформулируем необходимые леммы. Лемма 1.1 является аналогом частного случая $M(u) = u^p$, $p > 1$, теоремы 2 из [9], и ее доказательство использует идеи доказательства теорем 1 и 2 из [9].

**Лемма 1.1.** *Пусть* $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$. *Тогда п. в.* $x \in \mathbb{R}_+$ *являются* **P**-*ичными точками Лебега порядка* $p$ *функции* $f$.

Доказательство. Если мы докажем лемму 1.1 для $f \in L^p(B_i)$ и для п. в. $x \in B_i$, где $i \in \mathbb{N}$ произвольно, то мы докажем ее в общем случае. Поэтому далее считаем, что $f \in L^p(B_i)$, $x \in B_i$, $E \subset B_i$, а $CE = B_i \setminus E$.

1. Пусть $f(t) = X_E(t)$ — характеристическая функция множества $E$ и $x_0 \in E$ — точка **P**-ичной плотности $E$. Тогда $|X_E(t) - X_E(x_0)| = X_{CE}(t)$, причем $x_0$ есть точка **P**-ичного разрежения для $CE$, откуда

$$\lim_{k\to+\infty} m_k \int\limits_{I^k(x_0)} |X_E(t) - X_E(x_0)|^p\,dt = \lim_{k\to+\infty} m_k \int\limits_{I^k(x_0)} X_{CE}(t)\,dt = 0$$

и $x_0$ есть **P**-ичная точка Лебега порядка $p$ для $f(x)$. Если же $x_0 \in CE$ есть точка **P**-ичной плотности для $CE$, то $|X_E(t) - X_E(x_0)| = |X_{CE}(t) - X_{CE}(x_0)|$ для всех $t \in B_i$, поэтому согласно доказанному выше

$$\lim_{k\to+\infty} m_k \int\limits_{I^k(x_0)} |X_E(t) - X_E(x_0)|^p\,dt = \lim_{k\to+\infty} m_k \int\limits_{I^k(x_0)} |X_{CE}(t) - X_{CE}(x_0)|^p\,dt = 0.$$

Поскольку точки **P**-ичной плотности $E$, принадлежащие $E$, и аналогичные точки из $CE$ вместе образуют множество меры $m_i$ в $B_i$, в данном случае лемма доказана.

2. Пусть $|f(x)| \le C$ на $B_i$. По теореме Лузина для любого $\varepsilon > 0$ существует $E \subset B_i$ такое, что $m(E) > m_i - \varepsilon$ и на $E$ функция $f$ непрерывна. Пусть $E_1 \subset E$ — множество всех точек **P**-ичной плотности для $E$ и $x_0 \in E_1$. Тогда

$$m_k \int\limits_{I^k(x_0)} |f(t) - f(x_0)|^p\,dt = m_k \Bigg( \int\limits_{I^k(x_0)\cap E_1} + \int\limits_{I^k(x_0)\setminus E_1} \Bigg) |f(t) - f(x_0)|^p\,dt = \alpha_k + \beta_k.$$

Ясно, что $\lim\limits_{k\to+\infty} \alpha_k = 0$ в силу непрерывности $f$ на $E$. С другой стороны,

$$\beta_k \le (2C)^p m_k \int\limits_{I^k(x_0)} X_{CE_1}(t)\,dt = (2C)^p m_k \int\limits_{I^k(x_0)} |X_{CE_1}(t) - X_{CE_1}(x_0)|^p\,dt.$$

Согласно п. 1 доказательства $x_0$ есть **P**-ичная точка Лебега порядка $p$ для $X_{CE_1}$, поэтому $\lim\limits_{k\to+\infty} \beta_k = 0$. Таким образом, $m(E_1) = m(E) > m_i - \varepsilon$, и все точки $x \in E_1$ являются **P**-ичными точками Лебега порядка $p$ для $f$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ множество всех таких точек имеет меру $m_i$.

3. Пусть $f \in L^p(B_i)$ и для простоты $f \ge 0$. Найдем достаточно большое $N$ такое, что

$$m(E(N)) := m(\{x \in B_i : f(x) \le N\}) > m_i - \varepsilon.$$

Пусть $E_1$ — множество всех **P**-ичных точек Лебега порядка $p$ для $f_1 = fX_{E(N)}$ из $E(N)$, т. е. $E_1 \subset E(N)$ и $m(E_1) = m(E(N)) > m_i - \varepsilon$ согласно п. 2. Для любой $x_0 \in E_1$ и $f_2 = f - f_1$ имеем

$$m_k \int\limits_{I^k(x_0)} |f_2(t) - f_2(x_0)|^p \, dt = m_k \int\limits_{I^k(x_0)} \left| f_2^p(t) - f_2^p(x_0) \right| dt, \tag{2}$$

поскольку $f_2(x_0) = 0$. Но $f_2^p \in L^1(B_i)$ и по указанному в начале раздела аналогу теоремы о точках Лебега правая часть (2) стремится к нулю для всех $x_0 \in E_2$, $m(E_2) = m_i$. Отсюда следует, что все $x_0 \in E_1 \cap E_2$ являются **P**-ичными точками Лебега порядка $p$ для $f_1$ и $f_2$ и, значит, для $f$, причем $m(E_1 \cap E_2) = m(E_1) > m_i - \varepsilon$. Как и в п. 2, получаем, что множество всех таких точек имеет меру $m_i$. Лемма доказана.

Следующий признак предельного перехода под знаком интеграла принадлежит Валле-Пуссену и вытекает из [8, гл. 6, § 3, теоремы 4 и 7]. В отличие от теоремы Лебега он справедлив только для множеств конечной меры.

**Лемма 1.2.** *Пусть* 1) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится п. в. к* $f(x)$ *на* $B_i$, $i \in \mathbb{Z}$;
2) $f_n \in L^p(B_i)$ *и* $\|f_n\|_{L^p(B_i)} \le C$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *где* $p \in (1, \infty)$.
*Тогда* $f \in L^1(B_i)$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{B_i} f_n(x)\, dx = \int\limits_{B_i} f(x)\, dx.$$

**Лемма 1.3.** *Пусть* $g, f_n \in L^1(B_i)$, $i \in \mathbb{N}$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* $(UL^p)$ *на* $B_i$, $1 \le p < \infty$. *Тогда* $\lim\limits_{k\to\infty} |S_{m_k}(f_n)(x) - f_n(x)| = 0$ *для всех* $x \in B_i'$ *равномерно по* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Из формул $S_{m_k}(f) = f * D_{m_k}$, $D_{m_k}(x) = m_k X_{[0,1/m_k)}(x)$ (см. [5, § 1.5, 11.1]) легко следует, что

$$S_{m_k}(f)(x) = m_k \int\limits_{I^k(x)} f(t)\, dt$$

на $B_i$ (считаем, что $f = 0$ вне $B_i$). В силу неравенства Гёльдера имеем

$$|S_{m_k}(f_n)(x) - f_n(x)| \le m_k \int\limits_{I^k(x)} |f_n(t) - f_n(x)|\, dt \le (f_n)_{k,p}(x),$$

и заключение леммы следует из свойства $(UL^p)$.

Теорема 1.1 является аналогом теоремы 1 из [6].

**Теорема 1.1.** *Пусть* $g, f_n \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, *так что* $|f_n(x)| \le g(x)$ *на* $\mathbb{R}_+$ *и* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* $(UL^1)$ *на каждом* $B_i$, $i \in \mathbb{N}$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $f_n \to F$ *в* $D'$ *для некоторого* $F \in D'$;

2) $f_n \to f$ *п. в. на* $\mathbb{R}_+$ *для некоторой* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$;

3) *для некоторой* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ *последовательность* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к* $f$ *в* $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Так как $D_{m_k} \in D$ и условие $\varphi \in D$ влечет $\widetilde{\varphi} \in D$ и $\tau_a(\varphi)(x) = \varphi(x \ominus a) \in D$, то $f_n * D_{m_k}(x) = (f_n, \tau_x \widetilde{D}_{m_k})$ сходится при

$n \to \infty$ для любых $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}_+$. Пусть $i \in \mathbb{N}$ фиксировано. По лемме 1.3 $f_n(x) - (f_n * D_{m_k})(x)$ стремится к нулю при $k \to \infty$ равномерно по $n$ для всех $x \in B_i'$. Если $x \in B_i'$, то сначала находим $k_0$ такое, что $|f_n(x) - S_{m_k}(f_n)(x)| < \varepsilon/3$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $k > k_0$, затем, фиксируя $k > k_0$, находим $n_0(x)$ такое, что $|S_{m_k}(f_n)(x) - S_{m_k}(f_m)(x)| < \varepsilon/3$ для всех $n, m > n_0(x)$. Тогда при $n, m > n_0(x)$ получаем $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ и для всех $x \in B_i'$ последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$, для которой $|f(x)| \le g(x)$, т. е. $f \in L^1(B_i)$. Отсюда следует, что $f_n(x) \to f(x)$ п. в. на $\mathbb{R}_+$ и $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Далее, поскольку $|f_n - f| \to 0$ п. в. на $B_i$ и $|f_n - f| \le 2g$ на $B_i$, 2) $\Rightarrow$ 3) вытекает из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. Наконец, 3) $\Rightarrow$ 1) следует из оценки

$$|(f_n, \varphi) - (f, \varphi)| \le \max_{x \in B_i} |\varphi(x)| \int\limits_{B_i} |f_n(x) - f(x)|\, dx,$$

где $\varphi \in D$ и $\varphi(x) = 0$ вне $B_i$. Теорема доказана.

**Теорема 1.2.** *Пусть* $f_n \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$, $\|f_n\|_{L^p(B_i)} \le C_i$, $n, i \in \mathbb{N}$, *и к тому же* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* $(UL^p)$ *на каждом* $B_i$, $i \in \mathbb{N}$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $f_n \to F$ *в* $D$ *для некоторого* $F \in D'$;
2) $f_n \to f$ *п. в. на* $\mathbb{R}_+$ *для некоторой* $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$;
3) $f_n \to f$ *в* $L^{p_1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ *для некоторой* $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ *и любого* $p_1 \in [1, p)$.

Доказательство. Пусть верно утверждение 1). Тогда аналогично доказательству теоремы 1.1 с учетом леммы 1.3 получаем, что $f_n(x)$ сходится к некоторой $f(x)$ п. в. на каждом $B_i$, $i \in \mathbb{N}$. Поскольку $\|f_n\|_{L^p(B_i)} \le C_i$, по теореме Фату $\|f\|_{L^p(B_i)} \le C_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$, т. е. $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Тем самым доказано 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть верно 2) и $1 \le p_1 < p$. Рассмотрим $g_n(x) = |f(x) - f_n(x)|^{p_1}$ и $q = p/p_1 > 1$. Тогда $\|g_n\|_{L^q(B_i)} \le (2C_i)^{p_1}$ и $g_n \to 0$ п. в. на $B_i$. По лемме 1.2 находим, что $\int\limits_{B_i} g_n(x)\, dx \to 0$ или $\|f - f_n\|_{L^{p_1}(B_i)} \to 0$ при $n \to \infty$, и 2) $\Rightarrow$ 3) установлено. Наконец, 3) $\Rightarrow$ 1) доказывается, как в теореме 1.1, с учетом неравенства Гёльдера. Теорема доказана.

Замечание 1.1. Если в теореме 1.2 потребовать $\|f_n\|_{L^p(B_i)} \le C$, то получится $\|f\|_{L^p(B_i)} \le C$, т. е. $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Пока непонятно, можно ли в этом случае заменить условие 3) более сильным.

Замечание 1.2. Теоремы 1.1 и 1.2 верны, если заменить условие $(UL^p)$ ослабленным условием $(UL^p_w)$. Сначала, повторяя доказательство леммы 1.3, для $x \in B_i'$ получаем

$$\lim_{j \to \infty} |S_{m_{k_j}}(f_n)(x) - f_n(x)| = 0$$

равномерно по $n$. При доказательстве 1) $\Rightarrow$ 2) в теоремах 1.1 и 1.2 находим $k_j$ такое, что $|S_{m_{k_j}}(f_n)(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и далее вместо $k$ используем $k_j$. Остальные части доказательств остаются без изменения.

Дадим частичное обращение теоремы 1.2.

**Теорема 1.3.** *Пусть* $f_n, f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ *и* $f_n \to f$ *в* $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. *Тогда существует подпоследовательность* $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *такая, что*

1) $\|f_{n_k}\|_{L^p(B_i)} \le C_i$ *для всех* $k, i \in \mathbb{N}$;
2) $f_{n_k} \to f$ *п. в. на* $\mathbb{R}_+$;

3) $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ *удовлетворяет ослабленному условию* $(UL_w^p)$ *на каждом* $B_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Из того, что $f_n \to f$ в $L^p(B_i)$, легко следует 1) для любой $\{n_k\}_{k=1}^\infty$. Пусть $i$ фиксировано. Найдем $n_k$ такие, что $n_{k+1} > n_k$ и

$$\|f - f_{n_k}\|_{L^p(B_i)} \le 2^{-k-2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда по неравенству Гёльдера

$$\sum_{k=1}^\infty \|f - f_{n_k}\|_{L^1(B_i)} < \infty,$$

откуда по теореме Б. Леви ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty |f_{n_k}(x) - f(x)|$ сходится п. в. на $B_i$ и, в частности, $f_{n_k}(x)$ сходится к $f(x)$ п. в. на $B_i$. Докажем, что для $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ выполнено условие $(UL_w^p)$ на $B_i$. Отметим сначала, что для $g \in L^p(B_i)$ при $k \ge -i$ в силу инвариантности интеграла относительно **P**-ичного сдвига имеем (см. [5, § 2.1] при $p_j \equiv 2$)

$$\|g_{k,p}\|_{L^p(B_i)}^p = \int\limits_{B_i} m_k \int\limits_0^{1/m_k} |g(x \oplus t) - g(x)|^p \, dt \, dx$$
$$\le 2^{p-1} m_k \int\limits_0^{1/m_k} \int\limits_{B_i} (|g(x \oplus t)|^p + |g(x)|^p) \, dx \, dt \le 2^p \|g\|_{L^p(B_i)}^p. \quad (3)$$

Как следствие, для $h, g \in L^p(B_i)$ и $k \ge -i$, используя неравенство треугольника для нормы в $L^p(B_{-k})$, получаем

$$\|h_{k,p} - g_{k,p}\|_{L^p(B_i)} \le \|(h-g)_{k,p}\|_{L^p(B_i)} \le 2\|h - g\|_{L^p(B_i)}. \quad (4)$$

Далее для простоты положим $f = 0$. Поскольку $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ сходится в $L^p(B_i)$ (как следствие, $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ предкомпактна в $L^p(B_i)$) и $D$ плотно в $L^p(B_i)$, существует $\{g_j\}_{j=1}^M \subset D$, являющаяся $\varepsilon/2$-сетью для $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ в $L^p(B_i)$, т. е. для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $j \in [1, M]$ такое, что $\|f_{n_k} - g_j\|_{L^p(B_i)} < \varepsilon/2$. Но в силу определения $(g_j)_{r,p} = 0$ при всех $j$ и $r > r_0 \ge -i$, откуда благодаря (4) при $r > r_0$ получаем

$$\|(f_{n_k})_{r,p}\|_{L^p(B_i)} \le \|(f_{n_k})_{r,p} - (g_j)_{r,p}\|_{L^p(B_i)} + \|(g_j)_{r,p}\|_{L^p(B_i)} < \varepsilon.$$

В частности, существуют $r_j \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\|(f_{n_k})_{r,p}\|_{L^p(B_i)} \le 2^{-j}$ при $r \ge r_j$ и $k \in \mathbb{N}$. С другой стороны, так как $f = 0$, по определению $n_k$ и (3) при $r \ge -i$ и $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|(f_{n_k})_{r,p}\|_{L^p(B_i)} \le 2\|f_{n_k}\|_{L^p(B_i)} \le 2^{-k-1}.$$

Пусть $F_{l,j} := (f_{n_l})_{r_j,p}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^\infty \|F_{k,j}\|_{L^p(B_i)} \le \sum_{k=1}^{j-1} 2^{-j} + \sum_{k=j}^\infty 2^{-k-1} = \frac{j}{2^j}.$$

Рассмотрим множества $e_{k,j} = \{x \in B_i : F_{k,j}(x) > 1/j\}$ и $e_j = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} e_{k,j}$. Если $x \in e_j$, то $F_{k,j}(x) > 1/j$ хотя бы для одного $k \in \mathbb{N}$ и тем более

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_{k,j}(x) > \frac{1}{j},$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|F_{k,j}\|_{L^p(B_i)} \geq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} F_{k,j} \right\|_{L^p(B_i)} \geq j^{-1}(m(e_j))^{1/p}$$

и мы находим, что $m(e_j) \leq (j^2/2^j)^p$. Так как ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(j^2/2^j)^p$ сходится, по теореме Бореля — Кантелли

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty} e_j\right) = 0,$$

т. е. почти все $x \in B_i$ принадлежат $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{j=n}^{\infty}(B_i \setminus e_j)$ и для этих точек справедливо неравенство $(f_{n_l})_{r_j,p} \leq 1/j$, где $l \in \mathbb{N}$ и $j \geq n(x)$. Другими словами, $\{f_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ удовлетворяет ослабленному условию $(UL_w^p)$ на $B_i$.

Пусть построены подпоследовательности $\{n_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{r_j^{(i)}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ такие, что $f_{n_k^{(i)}} \to f$ п. в. на $B_i$ и

$$\lim_{j\to\infty} \sup_k (f_{n_k^{(i)}})_{r_j^{(i)},p} = 0$$

для всех $x \in B_i'$, $m(B_i') = m_i$. Рассуждая, как выше, выделяем $\{n_k^{(i+1)}\}_{k=1}^{\infty}$ из $\{n_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$ так, что $f_{n_k^{(i+1)}} \to f$ п. в. на $B_{i+1}$. При этом для $x \in B_i'$ имеем $r_j^{(i+1)} = r_j^{(i)}$, $j \in \mathbb{N}$, а для п. в. $x \in B_{i+1} \setminus B_i$ подпоследовательность $\{r_j^{(i+1)}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ строится заново аналогично выше изложенному. В итоге полагаем $n_k = n_k^{(k)}$, и тогда $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям 1)–3). Теорема доказана.

Замечание 1.3. При $p = 1$ похожее утверждение доказано в [6], только в 1) требуется выполнение неравенства $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$, где $g(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$.

## 2. Сверточное уравнение и теорема Винера

Лемма 2.1 доказана Кореваaром [10] для обычного преобразования Фурье. Для полноты изложения дадим ее доказательство.

**Лемма 2.1.** *Пусть* $u(x), v(x) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *и* $\|v\|_1 < 1$. *Тогда существует* $w(x) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *такая, что* $\widehat{w}(x) = \hat{u}(x)/(1+\hat{v}(x))$ *на* $\mathbb{R}_+$.

Доказательство. Пусть $w = u - u * v + u * v * v \dots$. Тогда ряд справа сходится в $L^1(\mathbb{R}_+)$ (норма $n$-го слагаемого не превосходит $\|u\|_1\|v\|_1^n$) и, значит, ряд из соответствующих **P**-ичных преобразований Фурье сходится равномерно, т. е.

$$\widehat{w}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \hat{u}(x)(\hat{v}(x))^k = \hat{u}(x)/(1+\hat{v}(x)).$$

Здесь учтено неравенство $|\hat{v}(x)| \leq \|v\|_1 < 1$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$. Лемма доказана.

**Лемма 2.2.** *Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Тогда*

$$\lim_{n\to-\infty} \|S_{m_n}(f) - \hat{f}(0)D_{m_n}\|_1 = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$f * D_{m_n}(x) - \hat{f}(0)D_{m_n}(x) = f * D_{m_n}(x) - m_n X_{[0,1/m_n)}(x) \int\limits_0^{1/m_n} f(t)\,dt$$

$$- m_n X_{[0,1/m_n)}(x) \int\limits_{1/m_n}^{\infty} f(t)\,dt =: T_n^1(f)(x) - T_n^2(f)(x) - T_n^3(f)(x). \quad (5)$$

Ясно, что $L^1$-норма $T_n^3(f)$, равная $\left|\int\limits_{1/m_n}^{\infty} f(t)\,dt\right|$, стремится к нулю при $n \to -\infty$ и что $\left\|T_n^1(f) - T_n^2(f)\right\|_1 \le 2\|f\|_1$. Для любой $g \in D$ существуют $r, m \in \mathbb{Z}$ такие, что $g \in G_{mr}$. Тогда $T_n^1(g) = T_n^2(g)$ при $n \le -r$. Так как $D$ плотно в $L^1(\mathbb{R}_+)$, получаем, что предел правой части (5) в $L^1(\mathbb{R}_+)$ равен нулю. Лемма доказана.

**Лемма 2.3.** *Для $f \in D'$, $\varphi \in D$ имеем $(f * \varphi)^\wedge = \hat{f}\widehat{\varphi}$ в $D'$.*

Доказательство. Пусть $\psi \in D$. По определению

$$((f * \varphi)^\wedge, \psi) = (f * \varphi, \widehat{\psi}) = (f, \widetilde{\varphi} * \widehat{\psi}).$$

Так как $\widetilde{\varphi}, \widehat{\psi} \in D$ и $\widetilde{\varphi} * \widehat{\psi} \in D$, получаем

$$(f, \widetilde{\varphi} * \widehat{\psi}) = (\hat{f}, (\widetilde{\varphi} * \widehat{\psi})^\vee) = (\hat{f}, (\widetilde{\varphi})^\vee (\widehat{\psi})^\vee) = (\hat{f}, \widehat{\varphi}\psi) = (\hat{f}\widehat{\varphi}, \psi).$$

**Лемма 2.4.** 1. *Пусть $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ и $\hat{f} = 0$ в $D'$. Тогда $f = 0$ п. в. на $\mathbb{R}_+$.*
2. *Пусть $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ и $g_a(t) = g(t)\overline{\chi(a,t)}$. Тогда $\hat{g}_a = \tau_{-a}\hat{g}$ в $D'$.*

Доказательство. 1. Так как все $X_{I_k^n}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}$, принадлежат $D$, из условия получаем, что $\int\limits_{I_k^n} f(x)\,dx = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}$. Если $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$, то $F(x)$ абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}_+$ и постоянна во всех точках вида $k/m_n$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}$, и поэтому постоянна на $\mathbb{R}_+$. Но $F'(x) = f(x)$ п. в. на $\mathbb{R}_+$, тем самым $f(x) = 0$ п. в. на $\mathbb{R}_+$.

2. Пусть $\varphi \in D$. Тогда согласно [5, гл. 6, теорема 6.1.2] и определению $\tau_a$

$$(\hat{g}_a, \varphi) = (g_a, \widehat{\varphi}) = (g, \overline{\chi(a,\cdot)}\widehat{\varphi}) = (g, (\tau_a\varphi)^\wedge) = (\hat{g}, \tau_a\varphi) = (\tau_{-a}g, \varphi).$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.5** (см. [11]). *Пусть $a_{k,n}(x) = m_n^{-1}\chi(x, k/m_n)X_{B_n}(x)$. Тогда*

$$\hat{a}_{k,n}(x) = X_{I_k^n}(x).$$

Последняя лемма соответствует лемме 3.8 из [7].

**Лемма 2.6.** *Пусть $f, g \in L^1(\mathbb{R}_+)$, причем $g(x) = 0$ при $x \geq m_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $f * g(x)$ может быть приближена в $L^1(\mathbb{R}_+)$ с любой точностью линейными комбинациями $\tau_t f(x)$.*

Доказательство. Если $k \in \mathbb{Z}_+$, то $B_n = \bigcup_{j=0}^{m_k m_n - 1} I_j^k$, причем множества $I_j^k$ не пересекаются при разных $j$. Поэтому

$$\left\| f * g(x) - \sum_{j=0}^{m_n m_k - 1} f(x \ominus j/m_k) \int_{I_j^k} g(t)\,dt \right\|_1 = \left\| \sum_{j=0}^{m_n m_k - 1} \int_{I_j^k} (f(x \ominus t) - f(x \ominus j/m_k)) g(t)\,dt \right\|_1 \leq \sum_{j=0}^{m_n m_k - 1} \int_{I_j^k} |g(t)|\,dt \int_{\mathbb{R}_+} |f(x \ominus t) - f(x \ominus j/m_k)|\,dx. \quad (6)$$

Известно, что $\omega_k(f)_1 = \sup\limits_{0<h<1/m_k} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_1 \to 0$ при $k \to +\infty$ (см. [5, § 10.5]. Но правая часть (6) не превосходит $\|g\|_1 \omega_k(f)_1$ и стремится к нулю при $k \to +\infty$. Лемма доказана.

**Теорема 2.1.** *Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и $\hat{f}(x) \neq 0$ на $\mathbb{R}_+$. Тогда если $g \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ и $f * g = 0$ на $\mathbb{R}_+$, то $g = 0$ п. в. на $\mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Согласно лемме 2.2 имеем $\|f * D_{m_n} - \hat{f}(0) D_{m_n}\|_1 < |\hat{f}(0)|$ при $n < -n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим

$$u = (\hat{f}(0))^{-1} D_{m_n}, \quad v = (\hat{f}(0))^{-1}(f * D_{m_n} - \hat{f}(0) D_{m_n}), \quad n < -n_0.$$

Тогда по лемме 1.1 существует $w \in L^1(\mathbb{R}_+)$ такая, что $\widehat{w}(x) = \hat{u}(x)/(1+\hat{v}(x))$, $x \in \mathbb{R}_+$. Поскольку $\widehat{D}_{m_n}(x) = X_{[0,m_n)}(x)$, то $\widehat{w}(x) = (\hat{f}(x))^{-1} X_{[0,m_n)}$ или $\widehat{w}(x)\hat{f}(x) = X_{[0,m_n)}(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$. Если $f * g = 0$, то $w * f * g = 0$ (обе свертки существуют в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$ и ограничены). По теореме единственности получаем $w * f(x) = D_{m_n}(x)$, откуда $D_{m_n} * g(x) = 0$ всюду на $\mathbb{R}_+$. По лемме 2.3 имеем $X_{[0,m_n)}\hat{g} = 0$ в смысле $D'$. Теперь рассмотрим функции $f_a(t) = f(t)\overline{\chi(a,t)}$ и $g_a(t) = g(t)\overline{\chi(a,t)}$. Если $f * g = 0$, то

$$f_a * g_a(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x \ominus t)\overline{\chi(a, x \ominus t)} g(t) \overline{\chi(a,t)}\,dt = \overline{\chi(a,x)} f * g(x) = 0$$

и согласно п. 2 леммы 2.4 $\hat{f}_a = \tau_{-a} f = \hat{f}(x+a)$ и $\hat{g}_a = \tau_{-a} g$. Аналогично доказанному выше получаем $X_{[0,m_n)}(x)\tau_{-a}\hat{g} = 0$ для любых $n < -n_0$, $a \in \mathbb{R}_+$, т. е. $X_{[km_n,(k+1)m_n)}\hat{g} = 0$ в $D'$ для любых $k \in Z_+$. Но ясно, что

$$(\hat{g}, \varphi) = \left(\hat{g}, \sum_{k=0}^{\infty} X_{[km_n,(k+1)m_n)}\varphi\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (X_{I_k^{-n}}\hat{g}, \varphi) = 0$$

для всех $\varphi \in D$ и по п. 1 леммы 2.4 $g(x)$ равна нулю п. в. на $\mathbb{R}_+$. Теорема доказана.

Следующая теорема является аналогом тауберовой теоремы Винера (см. [12, гл. 2, § 10–13]). В случае $p_i \equiv 2$ она доказана Б. И. Голубовым [7, теорема 1].

**Теорема 2.2.** *Пусть* $K \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *и* $\widehat{K}(x) \neq 0$ *на* $\mathbb{R}_+$. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{x\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_+} K(x \ominus y) f(y)\,dy = C(f) \int\limits_{\mathbb{R}_+} K(y)\,dy,$$

*где* $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, $C(f)$ *— постоянная, то для любой* $K_1 \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *существует предел*

$$\lim_{x\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_+} K_1(x \ominus y) f(y)\,dy = C(f) \int\limits_{\mathbb{R}_+} K_1(y)\,dy.$$

Доказательство. Заменяя $f(y)$ на $g(y) + C(f)$ и используя инвариантность интеграла относительно **P**-ичного сдвига, видим, что для установления теоремы достаточно показать, что из $\lim\limits_{x\to\infty} K*g(x) = 0$ следует $\lim\limits_{x\to\infty} K_1*g(x) = 0$. Пусть $G = K * g$, $G_1 = K_1 * g$, тогда $G(x)$, $G_1(x)$ ограничены и равномерно **P**-непрерывны. Далее по теореме Фубини

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} G(x\ominus y)K_1(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}_+}\int\limits_{\mathbb{R}_+} g(x\ominus y\ominus t)K(t)K_1(y)\,dt\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}_+} G_1(x\ominus y)K(y)\,dy. \quad (7)$$

Пусть существует последовательность $x_n \to +\infty$ такая, что $|G_1(x_n)| \geq \delta > 0$. Так как $\lim\limits_{x\to\infty} G(x \ominus y) = 0$ по условию и $|G(x \ominus y)K_1(y)| \leq C_1|K_1(y)|$, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости левая часть (7) стремится к нулю и, стало быть, правая часть — тоже. Поэтому для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_+} G_1(x \oplus x_n \ominus y)K(y)\,dy = 0. \quad (8)$$

Пусть $h_n(x) = G_1(x \oplus x_n)$. Тогда $h_n(x)$ равномерно ограничены и аналогично классическому доказательству теоремы Хелли [8, гл. 8, § 4] найдется подпоследовательность $\{h_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, сходящаяся в каждой точке вида $i/m_j$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$. Как отмечено выше, $G_1(x)$ равномерно **P**-непрерывна на $\mathbb{R}_+$, откуда получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $j(\varepsilon)$ такое, что для всех $y \in [0, 1/m_j)$, $x \in \mathbb{R}_+$ и $k \in \mathbb{N}$ справедливо $|h_{n_k}(x \oplus y) - h_{n_k}(x)| < \varepsilon$. Из этого условия легко получаем сходимость $h_{n_k}(x)$ во всех точках к некоторой $h(x) \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ и то, что $|h(x \oplus y) - h(x)| \leq \varepsilon$ для всех $y \in [0, 1/m_j)$, $x \in \mathbb{R}_+$, т. е. равномерную непрерывность $h(x)$. Снова по теореме Лебега о мажорируемой сходимости из (8) получаем $K * h = 0$ и по теореме 2.1 $h = 0$ п. в. на $\mathbb{R}_+$, а в силу равномерной **P**-непрерывности $h$ на $\mathbb{R}_+$ находим, что $h \equiv 0$ на $\mathbb{R}_+$. В частности, $h(0) = 0$. Но

$$|h(0)| = \lim_{k\to\infty} |h_{n_k}(0)| = \lim_{k\to\infty} |G_1(x_{n_k})| \geq \delta > 0;$$

противоречие. Теорема доказана.

Докажем две теоремы, касающиеся приближений функций из $L^1(\mathbb{R}_+)$ **P**-ичными сдвигами одной функции. При этом будут использоваться некоторые результаты, полученные ранее. Первая из них является аналогом еще одной теоремы Винера [12, гл. 2, § 14] и при $p_i \equiv 2$ доказана в [7, теорема 2].

**Теорема 2.3.** *Для того чтобы линейная оболочка, натянутая на множество* $\{\tau_y K : y \in \mathbb{R}_+\}$, *где* $K \in L^1(\mathbb{R}_+)$, *была плотной в* $L^1(\mathbb{R}_+)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\inf\limits_{x\in[0,a]} |\widehat{K}(x)| \neq 0$ *для всех* $a > 0$.

Доказательство. Достаточность. Если $\inf\limits_{x\in[0,a]} |\widehat{K}(x)| \neq 0$ для всех $a > 0$, то тем более $\widehat{K}(x \neq 0$ на $\mathbb{R}_+$. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Согласно лемме 1.2 из [11] имеем

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - S_{m_n}(f)\|_1 = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\|f - S_{m_n}(f)\|_1 < \varepsilon/3$. С другой стороны, при доказательстве теоремы 2.1 было доказано существование $w \in L^1(\mathbb{R}_+)$ такой, что $K * w = D_{m_n}$. Если $F = f * w \in L^1(\mathbb{R}_+)$, то $S_{m_n}(f) = f * D_{m_n} = F * K$. Пусть $\varphi \in D$ такова, что $\|F - \varphi\|_1 < \varepsilon/3\|K\|_1$. Тогда $\|F * K - \varphi * K\|_1 < \varepsilon/3$. Наконец, по лемме 2.6 существует $\sum\limits_{i=1}^{N} c_i \tau_{y_i} K$ такой, что

$$\left\|\varphi * K - \sum_{i=1}^{N} c_i \tau_{y_i} K\right\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Из полученных неравенств следует, что

$$\left\|f - \sum_{i=1}^{N} c_i \tau_{y_i} K\right\|_1 < \varepsilon,$$

и достаточность установлена.

Необходимость. Пусть $\inf\limits_{x\in[0,a]} |\widehat{K}(x)| = 0$ для некоторого $a > 0$. Тогда найдется последовательность $x_m \to x_0 \in [0, a]$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty} |\widehat{K}(x_m)| = 0.$$

Если $x_0$ **P**-ично иррационально ($x_0 \neq k/m_n$, $k, n \in \mathbb{Z}_+$), то для любого $I^n(x_0)$ точки $x_m$ принадлежат $I^n(x_0)$ при достаточно больших $m$. Пусть теперь $x_0$ является **P**-ично рациональным и $n \in \mathbb{Z}$ — минимальное число, для которого $x_0$ записывается в виде $x_0 = k/m_n$. При этом $k \neq 0$, поскольку **P**-непрерывность $\widehat{K}(x)$ имеет следствием непрерывность $\widehat{K}(x)$ в нуле справа. В этом случае рассмотрим $I^{n-1}(x_0)$, который содержит двустороннюю окрестность $x_0$ и все $x_m$ при достаточно больших $m$. Переходя к подпоследовательности, можем считать, что существует интервал $I_k^n \ni x_0$ такой, что все $x_m$ принадлежат $I_k^n$. Рассмотрим функцию $a_{k,n}$ из леммы 2.5 и докажем, что она не принадлежит замыканию линейной оболочки $\{\tau_y K : y \in \mathbb{R}_+\}$. В самом деле, для любых $\{c_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{C}$, $\{y_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}_+$ имеем

$$\left\|a_{k,n}(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i K(x \ominus y_i)\right\|_1 \geq \left|\int\limits_{\mathbb{R}_+} (a_{k,n}(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i K(x \ominus y_i))\overline{\chi(x, x_m)}\, dx\right|$$

$$= \left|\hat{a}_{k,n}(x_m) - \sum_{i=1}^{N} \overline{\chi(y_i, x_m)} \widehat{K}(x_m)\right|. \quad (9)$$

По лемме 2.5 $\hat{a}_{k,n}(x_m) = X_{I_k^n}(x_m) = 1$, а $\widehat{K}(x_m) \to 0$, поэтому левая часть (9) не меньше 1. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Условия $\inf\limits_{x\in[0,a]}|\widehat{K}(x)|\neq 0$ для всех $a>0$ и $\widehat{K}(x)\neq 0$ на $\mathbb{R}_+$ не эквивалентны даже для **P**-непрерывных функций. Пусть $f(x)=1/n$ при $x\in[1-m_{1-n},1-m_{-n})$, $n\in\mathbb{N}$, и $f(x)=1$ при $x\geq 1$. Тогда $f(x)$ **P**-непрерывна на $\mathbb{R}_+$, $f(x)\neq 0$ на $\mathbb{R}_+$, но $\inf\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|=0$.

Пусть $E$ — бесконечномерное сепарабельное банахово пространство над $\mathbb{C}$. Последовательность $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ его элементов называется *базисом*, если для любого $x\in E$ существует единственный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n e_n$, $x_n\in\mathbb{C}$, сходящийся в $E$ к $x$. Пусть $\operatorname{clos}(\{f_i\}_{i=0}^{\infty})$ есть замыкание линейной оболочки $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$. Базис $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ является полной в $E$ системой, т. е. $\operatorname{clos}(\{e_i\}_{i=0}^{\infty})=E$, и обладает свойством равномерной минимальности: существует $\delta>0$ такое, что

$$\operatorname{dist}(e_n,\operatorname{clos}(\{e_k\}_{k\neq n})):=\inf\{\|e_n-x\|: x\in\operatorname{clos}(\{e_k\}_{k\neq n})\}\geq\delta\|e_n\|_E,\quad n\in\mathbb{Z}_+.$$

По поводу последнего свойства см. [13, гл. 1, § 6].

Следующая теорема является аналогом теоремы А. М. Седлецкого [14, гл. 12, с. 486–489]. При $p_i\equiv 2$ она установлена Б. И. Голубовым [15].

**Теорема 2.4.** *Если $f\in L^1(\mathbb{R}_+)$ и $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}_+$, то система $\{\tau_{\lambda_n}f\}_{n=0}^{\infty}$ не может быть базисом в $L^1(\mathbb{R}_+)$.*

Доказательство. 1. Пусть система $\{\tau_{\lambda_n}f\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом в $L^1(\mathbb{R}_+)$ и, в частности, полна в $L^1(\mathbb{R}_+)$. Тогда по теореме 2.3 имеем $|\hat{f}(x)|\geq\delta_k>0$ на каждом $B_k$, $k\in\mathbb{N}$, что дает нам $1/\hat{f}(x)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$.

2. С другой стороны, система $\{\tau_{\lambda_n}f\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно минимальна в $L^1(\mathbb{R}_+)$, откуда следует, что $\|f(\cdot\ominus\lambda_n)-f(\cdot\ominus\lambda_k)\|_1\geq\delta\|f(\cdot\ominus\lambda_n)\|_1$ при всех $n\neq k$. В силу инвариантности интеграла относительно **P**-ичного сдвига получаем

$$\|f(\cdot)-f(\cdot\oplus(\lambda_n\ominus\lambda_k))\|_1\geq\delta\|f\|_1>0. \tag{10}$$

Если $\inf\limits_{n\neq k}(\lambda_n\ominus\lambda_k)=0$, то в силу того, что $\lim\limits_{h\to 0}\|f(x\oplus h)-f(x)\|_1=0$, левая часть (10) при подходящем выборе $n,k\in\mathbb{Z}_+$, $n\neq k$, может быть сделана сколь угодно малой; противоречие. Таким образом, из базисности $\{\tau_{\lambda_n}f\}_{n=0}^{\infty}$ следует, что

$$\inf_{n\neq k}(\lambda_n\ominus\lambda_k)=\gamma>0.$$

3. Пусть $\inf\limits_{n\neq m}(\lambda_n\ominus\lambda_m)=\gamma>0$ и $k\in\mathbb{N}$ таково, что $m_{k-1}>1/\gamma$. Если в каждом $I_j^k$, $j\in\mathbb{Z}_+$, содержится хотя бы одно $\lambda_{n(j)}$, то для двух соседних полуинтервалов $I_j^k$ и $I_{j+1}^k$, находящихся в одном $I_i^{k-1}$, разность $\lambda_{n(j)}\ominus\lambda_{n(j+1)}$ принадлежит $[0,1/m_{k-1})$, что противоречит выбору $k$ и определению $\gamma$. Таким образом, найдется $I_j^k$, для которого $I_j^k\cap\Lambda=\varnothing$. Тогда по лемме 2.5 для всех $n\in\mathbb{Z}_+$

$$\int\limits_{B_k}\chi(x,j/m_k)\overline{\chi(x,\lambda_n)}\,dx=m_k\hat{a}_{j,k}(\lambda_n)=m_k X_{I_k^n}(\lambda_n)=0.$$

Поскольку $m_k a_{j,k}\in L^\infty(B_k)$, согласно теореме 6.2.4 из [16, гл. 6] $\{\overline{\chi(x,\lambda_n)}\}_{n=0}^{\infty}$ не является полной в $L^1(B_k)$.

4. Итак, если $\{\tau_{\lambda_n} f\}_{n=0}^{\infty}$ — базис в $L^1(\mathbb{R}_+)$, то ввиду п. 3 система $\{\overline{\chi(x,\lambda_n)}\}_{n=0}^{\infty}$ не полна в некотором $L^1(B_k)$ и существует $g \in L^{\infty}(B_k)$ такая, что $g \neq 0$ в $L^{\infty}(B_k)$ и

$$\int\limits_{B_k} g(x)\overline{\chi(x,\lambda_n)}\,dx = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Но, как указано в п. 1, $h(x) = g(x)/\hat{f}(x) \in L^1(B_k)$, причем $h \neq 0$ в $L^1(B_k)$ и

$$\int\limits_{B_k} h(x)(\hat{f}(x)\overline{\chi(x,\lambda_n)})\,dx = 0 \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Аналогично теореме 6.2.4 из [16] получаем, что $\{\hat{f}(x)\overline{\chi(x,\lambda_n)}\}_{n=0}^{\infty}$ не является полной в пространстве $C(\mathbf{P}, B_k)$, состоящем из **P**-непрерывных функций на $B_k$. Ясно, что $D$ плотно в этом пространстве и можно считать, что существует $g \in D$ такая, что

$$\inf_{\{c_n\},N} \left\| g(x) - \sum_{n=0}^{N} c_n \hat{f}(x)\overline{\chi(x,\lambda_n)} \right\|_{L^{\infty}(B_k)} = \beta > 0.$$

Как указано во введении, $g(x) = (g^{\vee})^{\wedge}(x)$ на $\mathbb{R}_+$, и легко видеть, что $(\tau_{\lambda_n} f)^{\wedge}(x) = \hat{f}(x)\overline{\chi(x,\lambda_n)}$. Поскольку

$$\left\| (g^{\vee})^{\wedge}(x) - \sum_{n=0}^{N} c_n (\tau_{\lambda_n} f)^{\wedge}(x) \right\|_{\infty} \leq \left\| g^{\vee} - \sum_{n=0}^{N} c_n \tau_{\lambda_n} f \right\|_{1},$$

то $\{\tau_{\lambda_n} f\}_{n=0}^{\infty}$ не является полной в $L^1(\mathbb{R}_+)$; противоречие. Теорема доказана.

Автор выражает признательность профессору Б. И. Голубову за ценные обсуждения результатов работы.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.
2. *Schwartz L.* Théorie des distributiones. Paris: Hermann, 1950. Т. 1; 1951. Т. 2.
3. *Голубов Б. И.* Двоичные обобщенные функции // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 2. С. 67–90.
4. *Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И.* $p$-Адический анализ и математическая физика. М.: Мир, 1994.
5. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
6. *Beltrami E. J.* Pointwise and norm convergence of distributions // J. Math. Mech. 1965. V. 14, N 1. P. 99–107.
7. *Голубов Б. И.* Двоичный аналог тауберовой теоремы Винера и смежные вопросы // Изв. РАН. Сер. мат. 2003. Т. 67, № 1. С. 33–58.
8. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
9. *Салехов Д. В.* Еще о точках Лебега — Орлича // Укр. мат. журн. 1965. Т. 17, № 4. С. 72–81.
10. *Korevaar J.* Distribution proof of Wiener's Tauberian theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. V. 16, N 3. P. 353–355.
11. *Волосивец С. С.* Модифицированный **P**-ичный интеграл и модифицированная **P**-ичная производная для функций, определенных на полуоси // Изв. вузов. Математика. 2005. № 6. С. 28–39.
12. *Винер Н.* Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М.: Физматгиз, 1963.
13. *Функциональный анализ* / М. Ш. Бирман, Н. Я. Виленкин, Е. А. Горин и др. М.: Наука, 1972.

**14.** *Седлецкий А. М.* Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. М.: Физматлит, 2005.

**15.** *Голубов Б. И.* Об аппроксимации свертками и базисах из сдвигов функции // Anal. Math. 2008. V. 34, N 1. P. 9–28.

**16.** *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.

*Статья поступила 31 августа 2007 г.*

Волосивец Сергей Сергеевич
Саратовский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Астраханская, 83, Саратов 410028
VolosivetsSS@mail.ru