Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2009. Том 50, № 2

УДК 517.955

МЕТОД КОНЕЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ

Р. Ч. Кулаев

Аннотация. Излагается метод конечного интегрального преобразования решения смешанной задачи для уравнения параболического типа, заданного на графе. Дается обоснование метода.

Ключевые слова: граф, дифференциальное уравнение, интегральное преобразование на графе.

В работе [1] построено конечное интегральное преобразование для дифференциального уравнения, заданного на геометрическом графе, и установлена формула обращения. В настоящей работе мы применяем построенное интегральное преобразование к решению смешанной задачи для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u + f(x,t) \equiv Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma \times [0,T], \tag{1}$$

со следующими краевыми и начальными условиями:

$$\begin{gathered} u(b,t) = 0,\ b \in \partial\Gamma, \quad u_i(a,t) = \alpha_i(a)u_{i_0}(a,t),\ a \in V, \quad i, i_0 \in I(a), \\ \sum_{i\in I(a)} \beta_i(a)\frac{\partial u_i}{\partial x}(a,t) = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{3}$$

Уравнение (1) рассматривается по пространственной переменной $x \in \Gamma$ как уравнение на графе [2]. В (1) p, q, f — функции, определенные на графе, причем $p \in C^1[\Gamma]$, $q, f \in C[\Gamma]$, $\inf\limits_{x\in\Gamma} p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$. В условиях (2) считаем, что производные взяты в направлении к вершине a и $\{\alpha_k(a)\}_{k\in I(a)}$, $\{\beta_k(a)\}_{i\in I(a)}$ — наборы вещественных чисел, свои для каждой вершины $a \in V$, такие, что $\sum\limits_{i\in I(a)} \alpha_i(a)\beta_i(a) \neq 0$ для любой вершины.

Предварительные сведения и обозначения

Под графом Γ понимаем конечное множество попарно не пересекающихся открытых интервалов $\{\gamma_i\}_1^m$ пространства $\mathbb{R}^n$, называемых *ребрами.* В условиях (2) через V обозначено множество точек пространства $\mathbb{R}^n$, которые являются концевыми точками не менее чем двух ребер. Концевые точки ребер графа, не принадлежащие V, образуют границу графа, которую обозначаем через $\partial\Gamma$. Множество индексов всех ребер, примыкающих к внутренней вершине

a, обозначим через $I(a)$. Всюду далее полагаем, что граф Γ является связным множеством в $\mathbb{R}^n$ и не содержит циклических маршрутов.

В условиях (2) через u_i обозначено сужение функции $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ на ребро γ_i. Везде ниже полагаем, что все рассматриваемые функции равномерно непрерывны по переменной x на каждом ребре графа. Множество всех таких функций обозначим через $C[\Gamma]$. Далее, если a — произвольная вершина (граничная или внутренняя) графа Γ, то под $u_i(a)$ понимается $\lim\limits_{x \to a} u_i(x)$, $x \in \gamma_i$.

Дифференцирование функций по переменной $x \in \Gamma$ внутри каждого ребра $\gamma \in \Gamma$ осуществляется по параметру, причем подразумевается, что для этого ребро параметризовано в одном из двух возможных направлений. Через $C^k[\Gamma]$ обозначим множество функций из $C[\Gamma]$, имеющих внутри каждого ребра равномерно непрерывные производные до k-го порядка.

Под *интегралом функции* $u \in C[\Gamma]$*, взятым по графу* Γ, понимаем сумму интегралов по всем ребрам графа.

Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность собственных значений спектральной задачи [3], соответствующей задаче (1)–(3), расположенных в порядке возрастания, причем каждое значение входит в последовательность столько раз, какова его алгебраическая кратность. Через $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{h_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим последовательности корневых функций спектральной задачи и ее сопряженной соответственно. Далее, через $D(L)$ обозначим область определения дифференциального оператора L с краевыми условиями (2), а через$D(L^*)$ — область определения сопряженного оператора. Тогда из [3] следует, что всякая функция $u \in D(L)$ разлагается в равномерно сходящийся на Γ ряд по корневым функциям оператора L. Введем в пространстве $L_2[\Gamma; \rho]$ скалярное произведение

$$(u, v) := \int\limits_{\Gamma} \rho(x) u(x) v(x)\, dx,$$

где $\rho : \Gamma \to \mathbb{R}$,

$$\rho_i(x) = \frac{\beta_i(a)}{\alpha_i(a) p_i(a)}, \quad x \in \gamma_i.$$

В пространстве $L_2[\Gamma; \rho]$ оператор L самосопряженный и для каждой функции $f \in L_2[\Gamma]$ имеет место разложение в ряд по собственным функциям оператора L.

Интегральное преобразование на графе [1] $\mathscr{L} : L_2[\Gamma] \to l_2$ задается в виде счетной системы равенств

$$\bar{u}(\lambda_k) = \int\limits_{\Gamma} \rho(x) u(x) h_k(x)\, dx,$$

а обратное преобразование $\mathscr{L}^{-1} : l_2 \to L_2[\Gamma]$ определяется как разложение в ряд

$$\mathscr{L}^{-1} \bar{u} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}(\lambda_k) h_k(x). \tag{4}$$

Применение к задаче (1)–(3) оператора $\mathscr{L}$ приводит ее к виду

$$\frac{d\bar{u}(\lambda_k, t)}{dt} + \lambda_k \bar{u}(\lambda_k, t) = \bar{f}(\lambda_k, t), \quad \bar{u}(\lambda_k, 0) = \overline{\varphi}(\lambda_k), \tag{5}$$

где

$$\bar{u}(\lambda_k,t)=\int\limits_{\Gamma}\rho(x)u(x,t)h_k(x)\,dx,\quad \bar{f}(\lambda_k,t)=\int\limits_{\Gamma}\rho(x)f(x,t)h_k(x)\,dx,$$

$$\overline{\varphi}(\lambda_k)=\int\limits_{\Gamma}\rho(x)\varphi(x)h_k(x)\,dx.$$

Решение задачи (5) задается равенством

$$\bar{u}(\lambda_k,t)=\int\limits_0^t\bar{f}(\lambda_k,s)e^{-\lambda_k(t-s)}\,ds+\overline{\varphi}(\lambda_k)e^{-\lambda_k t},\tag{6}$$

а для смешанной задачи с учетом (4) получаем формальное решение

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}h_k(x)\bar{u}(\lambda_k,t).\tag{7}$$

Обоснование метода

Введем следующие обозначения: $\Gamma_T=\{x\in\Gamma,\ 0<t<T\}$, $\Gamma_s=\{x\in\Gamma,t=s\}$, $\Gamma_0=\{x\in\Gamma,t=0\}$, $\partial\Gamma_T=\{x\in\partial\Gamma,\ 0<t<T\}$.

Функцию $u(x,t)\in C^{2,1}[\Gamma_T]\cap C[\Gamma_T\cup\Gamma_0\cup\partial\Gamma_T]$, удовлетворяющую в Γ_T уравнению (1), на Γ_0 начальному условию (3) и краевым условиям (2) при $t\in[0,T]$, назовем *классическим решением смешанной задачи* (1)–(3).

Обозначим через $H^k[\Gamma]$ пространства Соболева функций, заданных на графе, а через $H^1_L[\Gamma]$ — подпространство в $H^1[\Gamma]$, состоящее из всех функций, удовлетворяющих краевым условиям (2). Введем в $H^1_L[\Gamma]$ скалярное произведение

$$(u,v)_{H^1_L[\Gamma]}=\int\limits_{\Gamma}\rho[pu'v'+quv]\,dx.$$

Тогда система $\left\{\frac{1}{\sqrt{|\lambda_k|}}h_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ собственных функций ортонормированная.

Через $H^{2,1}_L[\Gamma_T]$ будем обозначать пространство функций $f(x,t)\in L_2[\Gamma_T]$, имеющих обобщенные производные $\frac{\partial^{\alpha+\beta}f}{\partial x^\alpha\partial t^\beta}$ при $\alpha+2\beta\le 2$, принадлежащие $L_2[\Gamma_T]$, и удовлетворяющих при $0<t<T$ условиям (2).

Через $H^{1,0}_L[\Gamma_T]$ обозначим гильбертово пространство функций $f(x,t)\in L_2[\Gamma_T]$, имеющих обобщенную производную по $x\in\Gamma$ и удовлетворяющих при $0<t<T$ условиям (2), со скалярным произведением

$$(u,v)_{H^{1,0}_L[\Gamma_T]}=\int\limits_{\Gamma_T}\rho[pu'v'+quv]\,dxdt.$$

Принадлежащую $H^{1,0}_L[\Gamma_T]$ функцию $u(x,t)$ назовем *обобщенным решением смешанной задачи* (1)–(3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Gamma_T}\rho\left[-u\frac{\partial v}{\partial t}+p\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right]+quv\,dxdt=\int\limits_{\Gamma_0}\rho\varphi v\,dx+\int\limits_{\Gamma_T}\rho fv\,dxdt\tag{8}$$

для всех $v\in H^{1,0}_L[\Gamma_T]$, равных нулю при $t=T$, $x\in\Gamma$.

Теорема 1. *Если $f(x,t) \in L_2[\Gamma_T]$ и $\varphi \in L_2[\Gamma]$, то задача (1)–(3) имеет обобщенное решение. Это решение u представляется сходящимся в $H_L^{1,0}[\Gamma_T]$ рядом (7). При этом имеет место неравенство*

$$\|u\|_{H_L^{1,0}[\Gamma_T]} \le C(\|\varphi\|_{L_2[\Gamma]} + \|f\|_{L_2[\Gamma_T]}), \tag{9}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от φ и f.

Доказательство. Рассмотрим равенство (6). При любом $t \in [0,T]$ имеем

$$|\bar{u}(\lambda_k,t)| \le |\overline{\varphi}(\lambda_k)|e^{-\lambda_k t} + \int\limits_0^t |\bar{f}(\lambda_k,s)|e^{-\lambda_k(t-s)}\,ds \le |\overline{\varphi}(\lambda_k)|e^{-\lambda_k t} + \frac{\|\bar{f}(\lambda_k)\|_{L_2(0,T)}}{\sqrt{2\lambda_k}}.$$

Поэтому

$$|\bar{u}(\lambda_k,t)|^2 \le 2|\overline{\varphi}(\lambda_k)|^2 e^{-2\lambda_k t} + \frac{1}{\lambda_k}\|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}. \tag{10}$$

Обозначим через u_m частичную сумму ряда (7). Функции $u_m(x,t)$ принадлежат $H_L^1[\Gamma_t]$ при каждом $t \in (0,T)$. Имеем

$$\begin{aligned}\|u_m - u_n\|^2_{H_L^1[\Gamma_t]} &= \left\|\sum_{k=n+1}^m \bar{u}(\lambda_k,t)h_k(x)\right\|^2_{H_L^1[\Gamma_t]} \\ &\le \sum_{k=n+1}^m |\bar{u}(\lambda_k,t)|^2\|h_k(x)\|^2_{H_L^1[\Gamma]} = \sum_{k=n+1}^m |\bar{u}(\lambda_k,t)|^2\lambda_k \\ &\le C_1\sum_{k=n+1}^m\left(|\overline{\varphi}(\lambda_k)|^2\lambda_k e^{-2\lambda_k t} + \int\limits_0^T[\bar{f}(\lambda_k,t)]^2\,dt\right).\end{aligned} \tag{11}$$

Наряду с этим неравенством справедливо неравенство

$$\|u_m\|^2_{H_L^1[\Gamma_t]} \le C_2\sum_{k=1}^m\left(|\overline{\varphi}(\lambda_k)|^2\lambda_k e^{-2\lambda_k t} + \int\limits_0^T[\bar{f}(\lambda_k,t)]^2\,dt\right). \tag{12}$$

Интегрируя (11) и (12) по t от 0 до T, получим

$$\|u_m - u_n\|^2_{H_L^{1,0}[\Gamma_T]} \le C_3\sum_{k=n+1}^m\left(|\overline{\varphi}(\lambda_k)|^2 + \int\limits_0^T[\bar{f}(\lambda_k,t)]^2\,dt\right), \tag{13}$$

$$\|u_m\|^2_{H_L^{1,0}[\Gamma_T]} \le C_4\sum_{k=1}^m\left(|\overline{\varphi}(\lambda_k)|^2 + \int\limits_0^T[\bar{f}(\lambda_k,t)]^2\,dt\right). \tag{14}$$

Из (13) следует сходимость ряда (7) в $H_L^{1,0}[\Gamma_T]$, а из (14) — оценка (9). Интегральное соотношение (8) получается из тождества

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = Lu_m + f_m$$

умножением на функцию $v \in H_L^{1,0}[\Gamma_T]$ с последующим интегрированием по частям и переходом к пределу. Здесь f_m — частичная сумма разложения в ряд по собственным функциям для функции f.

Из (9) следует

Теорема 2. *Обобщенное решение задачи* (1)–(3) *единственно и непрерывно зависит от начальных данных.*

Поскольку всякое классическое решение задачи (1)–(3) является обобщенным, теорема 2 устанавливает единственность и непрерывную зависимость классического решения.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi, L\varphi \in H^1_L[\Gamma]$, $f \in H^{2,1}_L[\Gamma_T]$. *Тогда ряд* (7) *сходится в* $C^{2,1}[\Gamma_T]$ *и представляет классическое решение задачи* (1)–(3).

Доказательство. Из $f \in H^{2,1}_L[\Gamma_T]$ следует, что функция $\bar{u}(\lambda_k, t)$, определяемая равенством (6), принадлежит пространству $H^2(0,T)$, а следовательно, и пространству $C^1[0,T]$. Тогда функции u_m, представляющие собой частичные суммы ряда (7), принадлежат $C^{2,1}[\Gamma_T]$.

Из (10) следует оценка

$$|\bar{u}(\lambda_k, t)|^2 \leq 2|\overline{\varphi}(\lambda_k)|^2 + \frac{1}{\lambda_k}\|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}, \tag{15}$$

а из уравнения (5) — оценка

$$|\bar{u}'(\lambda_k, t)| \leq |\lambda_k||\overline{\varphi}(\lambda_k)| + |\bar{f}(\lambda_k, t)| + \sqrt{\frac{\lambda_k}{2}}\|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Поэтому для всех $t \in [0,T]$

$$\left|\bar{u}'\left(\lambda_k^2, t\right)\right| \leq 3\lambda_k^2|\overline{\varphi}(\lambda_k)|^2 + \frac{3\lambda_k}{2}\|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)} + 3|\bar{f}(\lambda_k, t)|^2. \tag{16}$$

Рассмотрим неравенство (16). При больших k воспользуемся неравенством [4]

$$f^2(t) \leq \frac{2}{\varepsilon}\|f\|^2_{L_2(0,T)} + 2\varepsilon\|f'\|^2_{L_2(0,T)},$$

справедливым для всех $f \in H^1(0,T)$, $t \in [0,T]$, $\varepsilon \in (0,T]$. Тогда

$$|\bar{f}(\lambda_k, t)|^2 \leq 2\lambda_k\|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)} + \frac{2}{\lambda_k}\|\bar{f}'(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Подставляя последнее неравенство в (16), получим

$$|\bar{u}'(\lambda_k, t)|^2 \leq C\left(\lambda_k^2|\overline{\varphi}(\lambda_k)|^2 + \lambda_k\|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)} + \frac{1}{\lambda_k}\|\bar{f}'(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}\right). \tag{17}$$

На основании теорем вложения, неравенств Соболева, справедливых на каждом ребре $\gamma_i \in \Gamma$, а значит, и на всем графе Γ, и неравенств (15), (17) при $t \in [0,T]$ имеем

$$\begin{aligned}
&\|u_m - u_n\|^2_{C^2[\Gamma_t]} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}(u_m - u_n)\right\|^2_{C[\Gamma_t]} \\
&\qquad \leq C_1\left(\|u_m - u_n\|^2_{H^3[\Gamma_t]} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}(u_m - u_n)\right\|^2_{H^1_L[\Gamma_t]}\right) \\
&\qquad \leq C_2\left(\left\|\sum_{k=n+1}^{m}\bar{u}(\lambda_k, t)Lh_k(x)\right\|^2_{H^1_L[\Gamma_t]} + \left\|\sum_{k=n+1}^{m}\bar{u}'(\lambda_k, t)h_k(x)\right\|^2_{H^1_L[\Gamma_t]}\right) \\
&\qquad \leq C_3\sum_{k=n+1}^{m}\left(\lambda_k^3|\bar{u}(\lambda_k, t)|^2 + \lambda_k|\bar{u}'(\lambda_k, t)|^2\right)
\end{aligned}$$

$$\leq C_4 \sum_{k=n+1}^{m} \left(\lambda_k^3 |\overline{\varphi}(\lambda_k)|^2 + \lambda_k^2 \|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)} + \|\bar{f}'(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)} \right). \quad (18)$$

Так как $L\varphi \in H_L^1[\Gamma]$, то $(L\varphi, h_k)_{H_L^1[\Gamma]} = \lambda_k^2 (\varphi, h_k)_{L_2[\Gamma]}$, и на основании полноты системы h_k заключаем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\overline{\varphi}(\lambda_k)|^2 \lambda_k^4$ сходится, а значит, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\overline{\varphi}(\lambda_k)|^2 \lambda_k^3$ сходится. Аналогично из $f \in H_L^{2,1}[\Gamma_T]$ следует сходимость рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)} \lambda_k^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|\bar{f}'(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}$. Поэтому из неравенства (18) вытекает, что ряд (7) сходится в $C^{2,1}[\Gamma_T]$ и, следовательно, его сумма является классическим решением.

Замечание. Изложенная в работе теория оставляет открытым вопрос об обосновании метода интегрального преобразования для задачи на графе, содержащем циклические маршруты, однако если задача на графе с циклами является самосопряженной, то все результаты работы остаются справедливы. Для самосопряженности задачи (1)–(3) необходимо и достаточно, чтобы для каждой вершины $a \in V$ существовала константа $C(a)$ такая, что $\beta_i(a) = C(a)\alpha_i(a)p_i(a)$, $i \in I(a)$. Доказательства всех теорем для самосопряженной задачи на произвольном графе (с циклами или без) остаются теми же.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кулаев Р. Ч.* Интегральное преобразование на графе для дифференциального оператора второго порядка // Владикавк. мат. журн. 2005. Т. 7, № 2. С. 78–85.
2. *Дифференциальные уравнения* на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, А. В. Боровских и др. М.: Физматлит, 2004.
3. *Завгородний М. Г.* Спектральная полнота корневых функций краевой задачи на графе // Докл. РАН. 1994. Т. 335, № 3. С. 281–282.
4. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1978.

Статья поступила 11 января 2008 г., окончательный вариант — 25 ноября 2008 г.

Кулаев Руслан Черменович
Институт прикладной математики и информатики ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027
kulaevrch@mail.ru