Сибирский математический журнал
Июль—август, 2009. Том 50, № 4

УДК 519.711

ФАКТОР–ГРУППЫ ПОДПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

Ю. М. Горчаков

Аннотация. Найдена точная оценка ступени нильпотентности фактор-группы подпрямого произведения групп.

Ключевые слова: подпрямое произведение, ступень нильпотентности, подгруппы подпрямых произведений.

Систематическое изучение подпрямых произведений групп начал Ремак в [1]. В частности, в этой работе появилось понятие мероморфного произведения групп. Напомним его. Если даны группы A и B, их нормальные подгруппы A_1 и B_1 и изоморфное отображение $\varphi : A/A_1 \to B/B_1$ группы A/A_1 на B/B_1, то совокупность элементов ab прямого произведения $A \times B$, удовлетворяющих условию $\varphi(aA_1) = bB_1$, образует подгруппу в $A \times B$. Ремак называет ее *мероморфным произведением групп* A и B с нормальными подгруппами A_1 и B_1. Всякое подпрямое произведение групп A и B является мероморфным произведением этих групп. Это описание подпрямых произведений групп Ремак, возможно, считал удовлетворительным. В дальнейшем выяснилось, что дело обстоит намного сложнее. Л. С. Понтрягин [2, пример 15] построил пример подпрямой суммы двух групп 2-ичных дробей, неразложимой в прямую сумму подгрупп. Тем самым было доказано, что даже в случае абелевых групп различные изоморфизмы φ могут давать неизоморфные мероморфные произведения. Именно это обстоятельство является причиной необыкновенной сложности теории абелевых групп без кручения конечного ранга.

Ремак сделал попытку «описать» подгруппы и нормальные подгруппы подпрямых произведений [3, 4]. Но даже для случая трех множителей [3] «описание» получилось громоздким. К сожалению, в дальнейшем подпрямые произведения были объектом изучения лишь для случая абелевых групп.

При изучении локально нормальных групп [5, лемма 1] получилось такое утверждение: если группа G и ее нормальная подгруппа H являются подпрямыми произведениями одних и тех же n групп, то G/H — нильпотентная группа ступени $\leq n-1$. Е. И. Хухро [6] доказал, что с ростом n ступень нильпотентности фактор-группы G/H растет. Тем самым была выявлена вторая трудность при изучении подпрямых произведений: подгрупп в нильпотентных группах слишком много.

Таким образом, именно наличие различных изоморфизмов факторов и существование нильпотентных факторов в множителях определяют сложность изучения подпрямых произведений.

Утверждение из [6] о росте ступени нильпотентности фактор-группы G/H удается заметно усилить. В настоящей заметке получена неулучшаемая оценка.

© 2009 Горчаков Ю. М.

Теорема. *Для любого натурального числа n существуют группы $G_1, \dots, G_n$ и такие подпрямые произведения этих групп Q и H, что Q/H — нильпотентная группа ступени точно $n-1$.*

Доказательство получается из лемм 1, 6, 7, 13–15.

Возможно, верна гипотеза: если Q/H из теоремы является p-группой, то Q/H регулярна.

В заметке приняты, в основном, обычные обозначения и термины. Отметим, что знак C_n^k означает количество подмножеств, содержащих k элементов в множестве, состоящем из n элементов. Для удобства считаем $C_n^k = 0$ если $k > n$ либо если $k < 0$.

Лемма 1. *Пусть $n_1 < n_2 < \dots$ — бесконечная последовательность натуральных чисел. Допустим, что для любого n_k доказано следующее утверждение: существуют такие группы $G_1, G_2, \dots, G_{n_k}$ и такие их подпрямые произведения G и H, где $H \triangleleft G$, что G/H — нильпотентная группа ступени $n_k - 1$. Тогда для любого натурального n существуют группы $G_1, G_2, \dots, G_n$ и такие подпрямые произведения G и H этих групп, что $H \triangleleft G$ и фактор-группа G/H имеет ступень нильпотентности $n-1$.*

Доказательство. Пусть n — фиксированное натуральное число. Так как последовательность $n_1 < n_2 < \dots$ растет, существует $m = n_k \geq n$. По условию существуют такие группы $G_1, \dots, G_m$ и их подпрямые произведения G и H, что $H \triangleleft G$ и G/H — нильпотентная группа ступени $m-1$. Если $m = n$, то лемма верна. Пусть $m > n$. Если $g = g_1 g_2 \dots g_m$ — произвольный элемент из G, то отображение $\psi : g \to g_2 \dots g_m$ задает гомоморфное отображение группы G в $G_2 \times \dots \times G_m$. Ясно, что $\psi(G)$ и $\psi(H)$ — подпрямые произведения групп $G_2, \dots, G_m$. Очевидно также, что $\psi(H) \triangleleft \psi(G)$. В силу леммы 1 из [5] $\psi(G)/\psi(H)$ — нильпотентная группа ступени $\leq m-2$. По теореме о гомоморфизмах коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & \psi(G) \arrow[dl, "\varphi"] \\ & G/(G_1 \cap G) & \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} H(G_1 \cap G) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & \psi(H) \arrow[dl, "\varphi"] \\ & H(G_1 \cap G)/(G_1 \cap G) & \end{tikzcd}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\psi(G)/\psi(H) &\simeq G/(G_1 \cap G)/H(G_1 \cap G)/(G_1 \cap G) \\ &\simeq G/H(G_1 \cap G) \simeq G/H/H(G_1 \cap G)/H.\end{aligned}$$

Покажем, что $H(G_1 \cap H)/H$ лежит в центре G/H. Это будет означать,что ступень нильпотентности группы $\psi(G)/\psi(H)$ не меньше $m-2$. Так что мы получим подпрямые произведения $\psi(G)$ и $\psi(H)$ групп $G_2, \dots, G_m$ с фактор-группой ступени точно $m-2$. Пусть $t \in H(G_1 \cap G)$, $t = hf_1$, $h = h_1 h_2 \dots h_m$, $h_i \in G_i$, $h \in H$, $f_1 \in G_1 \cap G$, и пусть $g \in G$, $g = g_1 g_2 \dots g_m$, $g_i \in G_i$. Тогда $[t, g] = [hf_1, g] = [h, g]^{f_1}[f_1, g]$. Коммутатор $[h, g]^{f_1}$ принадлежит H. Имеем $[f_1, g] = [f_1, g_1]$. Так как H — подпрямое произведение, существует элемент $h' = g_1 h'_2 \dots h'_m$. Получаем $[f_1, g] = [f_1, g_1] = [f_1, h'] \in H$. Итак, $[t, g] \in H$. Мы доказали, что $H(G_1 \cap G)/H$ лежит в центре G/H.

Если $n = m-1$, то лемма доказана. Если же $n < m-1$, то предыдущее рассуждение повторяем, что докажет лемму.

Лемма 2. *Верно равенство $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$.*

Равенство известно и очевидно.

Лемма 3. *Верно равенство* $C_j^i C_{i+1}^s = C_{j-s}^{i-s+1} C_j^{s-1} + C_{j-s}^{i-s} C_{j+1}^s$.

Равенство известно и очевидно.

Пусть p — нечетное простое число. Рассмотрим группу G, порожденную элементами $e_1, e_2, \dots, e_{p-1}, a$, которые удовлетворяют соотношениям: $e_i^p = a^p = 1$, $a^{-1}e_i a = e_i e_{i-1}$ при $i > 1$, $a^{-1}e_1 a = e_1$, $e_i e_j = e_j e_i$, где индексы i, j пробегают множество $1, 2, \dots, p-1$. Группа G — это полупрямое произведение двух групп $G = (\langle e_1\rangle \times \dots \times \langle e_{p-1}\rangle) \leftthreetimes \langle a\rangle$, первая из них — элементарная p-группа порядка p^{p-1}, вторая — циклическая группа порядка p. Так как

$$a^{-1}e_1 a = e_1^1 e_2^0 \dots e_{p-1}^0, a^{-1}e_2 a = e_1^1 e_2^1 \dots e_{p-1}^0, \dots, a^{-1}e_{p-1}a = e_1^0 e_2^0 \dots e_{p-2}^1 e_{p-1}^1,$$

отображение, вызываемое элементом a в $E = \langle e_1\rangle \times \dots \times \langle e_{p-1}\rangle$, имеет своей матрицей клетку Жордана

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как [7, с. 181]

$$A^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_s{}^1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_s{}^2 & C_s{}^1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ C_s{}^3 & C_s{}^2 & C_s{}^1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

верна

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$[e_j^t, a^s] = \prod_{m=1}^{s} e_{j-m}^t C_s^m.$$

Для простоты записи мы здесь используем обозначения $1 = e_0 = e_{-1} = \dots$.

Изготовим p экземпляров группы G. Группу G_i $(i = 1, 2, \dots, p)$, изоморфную G, породим элементами e_{ij}, $j = 1, 2, \dots, p-1, a_i$. Соотношения такие же, как в G: $e_{ij}^p = a_i^p = 1$, $e_{ij}e_{is} = e_{is}e_{ij}$, $[e_{ij}, a_i] = e_{ij-1}$. В прямом произведении $\prod_{i=1}^{p} G_i$ возьмем элементы

$$b = \prod_{k=0}^{p-1} a_{1+k}^{(-1)^k C_{p-1}^k}, \quad b_1 = \prod_{k=0}^{p-2} a_{1+k}^{(-1)^k C_{p-2}^k},$$

$$b_2 = \prod_{k=0}^{p-2} a_{2+k}^{(-1)^k C_{p-2}^k}, \quad f_{ij} = \prod_{k=0}^{j-1} e_{i+kj}^{(-1)^k C_{j-1}^k},$$

где $j = 1, \dots, p-1$, $i = 1, \dots, p-j+1$;

$$h_{ij} = \prod_{k=0}^{j} e_{i+kj}^{(-1)^k C_j^k},$$

где $j = 1, \dots, p-1$, $i = 1, \dots, p-j$. В дальнейшем будем рассматривать группы

$$Q = \langle b_1, b_2, f_{ij},\ j = 1, \dots, p-1,\ i = 1, \dots, p-j+1\rangle,$$

$$H = \langle b, h_{ij},\ j = 1, \dots, p-1,\ i = 1, \dots, p-j\rangle.$$

Лемма 5. *Верны равенства* $b = b_1 b_2^{-1}$, $h_{ij} = f_{ij} f_{i+1j}^{-1}$.

Доказательство проводится прямыми вычислениями при помощи леммы 2.

Лемма 6. H *— подгруппа группы* Q.

Следует из леммы 5.

Лемма 7. *Группы* H *и* Q *являются подпрямыми произведениями групп* G_i $(i = 1, \dots, p)$.

Доказательство. В силу леммы 6 утверждение достаточно доказать для H. Обозначим через H_i проекцию H на G_i. Так как $b \in H$, то H_i содержит элементы $e_i^{(-1)^{i-1} C_{p-1}^{i-1}}$. Показатель $(-1)^{i-1} C_{p-1}^{i-1}$ взаимно прост с p. Следовательно, $a_i \in H_i$. Покажем теперь, что H_i содержит e_{ij} для любого j. Группа H содержит элементы

$$h_{1j} = e_{1j}^{(-1)^0 C_j^0} e_{2j}^{(-1)^1 C_j^1} \dots e_{1+jj}^{(-1)^j C_j^j},$$
$$h_{2j} = e_{2j}^{(-1)^0 C_j^0} \dots e_{1+jj}^{(-1)^{j1} C_{j-1}^j} e_{2+jj}^{(-1)^{j-1} C_j^j}, \dots, h_{p-jj} = e_{p-jj}^{(-1)^0 C_j^0} \dots e_{pj}^{(-1)^j C_j^j}.$$

Из этих равенств видно, что для любого $i = 1, \dots, p$ хотя бы один из элементов h_{kj} содержит в своей записи e_{ij} в ненулевой степени. Следовательно, H_i содержит все порождающие элементы группы G_i, что означает совпадение групп H_i и G_i. Лемма доказана.

Лемма 8. *Если* $j > 1$, *то* $[f_{ij}, b] = h_{i,j-1}$, $[f_{i1}, b] = 1$.

Доказательство. Так как $(-1)^k C_{p-1}^k \equiv 1 (\operatorname{mod} p)$, то $b = a_1 a_2 \dots a_p$. Очевидно, $[f_{i1}, b] = 1$. Найдем $[f_{i1}, b]$ при $j > 1$. В силу леммы 4

$$[f_{i1}, b] = \prod_{k=0}^{j-1} \left[e_{i+kj}^{(-1)^k C_{j-1}^k}, a_{i+k}\right] = \prod_{k=0}^{j-1} \left[e_{i+kj-1}^{(-1)^k C_{j-1}^k}\right] = h_{i,j-1}.$$

Лемма доказана.

Лемма 9. *Если* $j > 1$, *то* $[h_{ij}, b] = h_{i,j-1} h_{i+1,j-1}^{-1}$, $[h_{i1}, b] = 1$.

Доказательство. В силу леммы 5 $h_{ij} = f_{ij} f_{i+1j}^{-1}$. Используя коммутаторные формулы [8, с. 171], получаем

$$[h_{ij}, b] = \left[f_{ij} f_{i+1j}^{-1}, b\right] = [f_{ij}, b][f_{i+1j}, b]^{-1} = h_{i,j-1} h_{i+1j-1}^{-1}.$$

Лемма доказана.

Лемма 10. *Группа* H *является полупрямым произведением нормальной элементарной абелевой группы* $\prod\limits_{i,j} \langle h_{ij} \rangle$ *порядка* $p^{C^2{}_p}$ *и циклической группы* $\langle b \rangle$ *порядка* p.

Вытекает из леммы 9.

Лемма 11. *Группа* H *порождается элементами* b, h_{1j} $(j = 1, \dots, p-1)$.

Вытекает из леммы 9.

Лемма 12. *Верна формула*

$$[h_{ij}, b_1] = \prod_{m=1}^{j} h_{m,j-m}^{(-1)^{m-1}C_j^{m-1}} h_{m+1j-m}^{(-1)^m C_{j+1}{}^m}.$$

Доказательство. Так как $(-1)^k C_{p-2}^k \equiv k+1 (\operatorname{mod} p)$, то $b_1 = \prod\limits_{k=0}^{p-2} a_{1+k}^{1+k}$. Используя лемму 4, получаем

$$[h_{1j}, b_1] = \prod_{k=0}^{j}[e_{1+k,j}^{(-1)^k C_j^k}, a_{1+k}^{1+k}] = \prod_{k=0}^{j}\prod_{m=1}^{1+k} e_{1+k,j-m}^{(-1)^k C_j^k C_{1+k}^m} = \prod_{m=1}^{j-1}\prod_{k=m-1}^{j} e_{1+k,j-m}^{(-1)^k C_j^k C_{1+k}^m}.$$

В силу леммы 3 имеем

$$C_j^k C_{1+k}^m = C_{j-m}^{k-m+1} C_j^{m-1} + C_{j-m}^{k-m} C_{j+1}^m.$$

Следовательно,

$$[h_{1j}, b_1] = \prod_{m=1}^{j-1}\left[\left(\prod_{k=m-1}^{j} e_{1+k,j-m}^{(-1)^k C_{j-m}^{k-m+1} C_j^{m-1}}\right)\left(\prod_{k=m-1}^{j} e_{1+k,j-m}^{(-1)^k C_{j-m}^{k-m} C_{j+1}^m}\right)\right].$$

В первом множителе в квадратной скобке заменим $k-m+1$ на y, во втором множителе — $k-m$ на z. Получим

$$[h_{1j}, b_1] = \prod_{m=1}^{j-1}\left[\left(\prod_{y=0}^{j-m} e_{m+y,j-m}^{(-1)^y C_{j-m}^y}\right)^{(-1)^{m-1}C_j^{m-1}} \left(\prod_{z=0}^{j-m} e_{m+1+z,j-m}^{(-1)^z C_{j-m}^z}\right)^{(-1)^m C_{j+1}^m}\right]$$
$$= \prod_{m=1}^{j-1} h_{m,j-m}^{(-1)^{m-1}C_j^{m-1}} h_{m+1,j-m}^{(-1)^m C_{j+1}^m}.$$

Лемма доказана.

Лемма 13. $H \lhd Q$.

Доказательство. Достаточно доказать, что H содержит элементы $[h_{1j}, b_1]$, $[f_{ij}, b]$. Это доказано в леммах 8, 12.

Лемма 14. *Элемент $f_{11} = e_{11}$ не принадлежит H.*

Доказательство. Допустим, что $e_{11} \in H$. Тогда в силу леммы 10 $e_{11} = \prod\limits_{i,j} h_{ij}^{\alpha_{ij}} b^\beta$. Предположим, что β не сравнимо с нулем по модулю p. Ясно, что $[e_{11}, h_{12}] = 1$.

Найдем $t = \bigl[h_{ij}, \prod\limits_{i,j} h_{ij}^{\alpha_{ij}} b^\beta\bigr]$. Так как [8, с. 171]

$$t = [h_{12}, b^\beta]\Bigl[h_{12}, \prod_{i,j} h_{ij}^{\alpha_{ij}}\Bigr]\Bigl[h_{12}, \prod_{i,j} h_{ij}^{\alpha_{ij}}, b^\beta\Bigr] = [h_{12}, b^\beta],$$

по лемме 9 $t = h_{11}{}^\beta h_{21}{}^{-\beta} \neq 1$. Полученное противоречие показывает, что $\beta \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$, т. е. $e_{11} = \prod\limits_{i,j} h_{ij}^{\alpha_{ij}}$. Поскольку $[e_{11}, b] = 1$, то $\alpha_{i,j} \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$ при $j > 1$.

Итак,

$$e_{11} = \prod_i h_{i1}^{\alpha_{i1}} = \bigl(e_{11}e_{21}^{-1}\bigr)^{\alpha_{11}}\bigl(e_{21}e_{31}^{-1}\bigr)^{\alpha_{21}} \dots \bigl(e_{p-1,1}e_{p1}^{-1}\bigr)^{\alpha_{p-1,1}}$$
$$= e_{11}^{\alpha_{11}} e_{21}^{-\alpha_{11}+\alpha_{21}} e_{31}^{-\alpha_{21}+\alpha_{31}} \dots e_{p-1,1}^{-\alpha_{p-2,1}+\alpha_{p-1,1}} e_{p1}^{-\alpha_{p-1,1}}.$$

Получаем $\alpha_{11} = 1$, $-\alpha_{11} + \alpha_{21} = 0, \dots, -\alpha_{p-2,1} + \alpha_{p-1,1} = 0$, $\alpha_{p-1,1} = 0$. Система решений не имеет. Получили, что e_{11} не принадлежит H. Лемма доказана.

Лемма 15. $[f_{1,p-1},\underbrace{b_1,\dots,b_1}_{p-2}]=f_{11}^m h$, $h\in H$, *где* m *и* p *взаимно просты.*

Доказательство. Вычислим $[f_{1j},b_1]$:

$$[f_{1j},b_1]=\prod_{k=0}^{j-1}\bigl[e_{1+k,j}^{(-1)^k C_{j-1}^k},a_{1+k}^{1+k}\bigr]=\left(\prod_{k=0}^{j-1}e_{1+k,j-1}^{(-1)^k C_{j-1}^k C_{1+k}^1}\right)g_{j-2},$$

где g_{j-2} принадлежит подгруппе, порожденной элементами e_{is} при $s\le j-2$. В силу леммы 3 имеем $C_{j-1}^k C_{1+k}^1=C_{j-2}^k C_{j-1}^0+C_{j-2}^{k-1}C_j^1$.

Продолжаем преобразование:

$$[f_{1j},b_1]=\prod_{k=0}^{j-1}e_{1+k,j-1}^{(-1)^k C_{j-2}^k C_{j-1}^0}\prod_{k=0}^{j-1}e_{1+k,j-1}^{(-1)^k C_{j-1}^{k-1}C_j^1}g_{j-2}=f_{1j-1}^{C_{j-2}^0}f_{2j-1}^{-C_j^1}g_{j-2}.$$

Применяя лемму 5, получаем

$$[f_{1j},b_1]=f_{1j-1}^{1-j}h_{1j-1}^{j}g_{j-2}. \tag{1}$$

Применим формулу (1) и коммутаторные формулы [4, с. 171] к $[f_{1p-1},b_1]$ несколько раз:

$$[f_{1p-1},b_1]=f_{1p-2}^{3-p}h_{2p-2}^{p-1}g_{p-3},\quad \bigl[f_{1p-2}^{3-p}h_{2p-2}^{p-1}g_{p-3},b_1\bigr]=f_{1p-3}^{(3-p)(4-p)}hg,$$

где $h\in H, g$ принадлежит подгруппе, порожденной e_{is}, $s\le p-4$. В итоге мы прихожим к результату леммы, так как при каждом коммутировании элемент вида g принадлежит подгруппе, порожденной элементами e_{is}, номера s которых уменьшаются. Так что $[h_{1,p-1},\underbrace{b_1,\dots,b_1}_{p-2}]=f_{11}^m h$. Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Remak R.* Über die Darstellung der endlichen Gruppen als Untergruppen direkter Produkte // J. Reine Angew. Math. 1930. Bd 163, Heft 1. S. 1–44.
2. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.
3. *Remak R.* Über Untergruppen direfter Produkte von drei Faftoren // J. Reine Angew. Math. 1931. Bd 166, Heft 2. S. 65–100.
4. *Remak R.* Über erzeugenden invarianten Untergruppen der subdirekten Darstellungen endlicher Gruppen // J. Reine Angew. Math. 1931. Bd 164, Heft 4. S. 195–242.
5. *Горчаков Ю. М.* О локально нормальных группах // Мат. сб. 1965. Т. 67, № 2. С. 244–254.
6. *Хухро Е. И.* О нильпотентных подпрямых произведениях // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 6. С. 178–180.
7. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.
8. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Статья поступила 31 января 2008 г.

Горчаков Юрий Михайлович
Тверской гос. университет, пер. Садовый, 35, Тверь 170002
juragorchakov@mail.ru