Сибирский математический журнал
Июль—август, 2009. Том 50, № 4

УДК 517.54:517.862

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ОПЕРАТОРЫ БЕРСА И ДВОЙСТВЕННОСТЬ ГОЛОМОРФНЫХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ АВТОМОРФНЫХ ФОРМ

О. А. Сергеева

Аннотация. В теории однозначных автоморфных форм [1, 2] большую роль играет интегральный оператор Берса, связанный с отражением относительно некоторой квазиокружности. В работе [3] начато изучение нормированных пространств измеримых и голоморфных мультипликативных автоморфных форм для фуксовой группы. В данной работе введены основные мультипликативные модификации оператора Берса и соответствующие им билинейные спаривания в связи с двойственностью в пространствах голоморфных мультипликативных автоморфных форм. Для всех операторов получены универсальная оценка нормы и свойство «самосопряженности».

Ключевые слова: модифицированный оператор Берса, мультипликативная голоморфная автоморфная форма, билинейное спаривание, двойственность.

Введение

В статье теория однозначных функций и дифференциалов на компактных римановых поверхностях распространяется на общий мультипликативный случай. Отличительной чертой этого случая является наличие характера $\rho \neq 1$ в задании всех изучаемых здесь объектов (функций и дифференциалов). Классические результаты этой теории получены в работах [1, 2, 4] и соответствовали случаю тривиального характера $\rho = 1$. С появлением нетривиальных характеров $\rho \neq 1$ возникает необходимость в соответствующем изменении основных элементов функционального анализа таких, как мера, билинейное спаривание, оператор Берса и др. Кроме того, появляется новое понятие мультипликативно двойственных форм (их произведение — однозначная форма). Все это усложняет доказательство рассматриваемых фактов для мультипликативного случая по сравнению с классическим. Но при этом появляются новые возможности. Так, например, введенные здесь модифицированные операторы Берса, подобно своему классическому предшественнику — оператору Берса, не только осуществляют отражение области определения голоморфных форм относительно квазиокружности, но и устанавливают связь между двойственными пространствами этих форм, что расширяет область их приложений. Специально для мультипликативно двойственных форм вводится симметричный вариант билинейного спаривания, который непосредственно может быть использован в теории однозначных функций и дифференциалов.

§ 1. Предварительные сведения

Пусть C — квазиокружность в $\overline{\mathbb{C}}$, т. е. ориентируемая замкнутая жорданова кривая в $\overline{\mathbb{C}}$, которая является образом единичной окружности при квазиконформном отображении. Введем обозначения: $D_1 = \operatorname{Int} C$, $D_2 = \operatorname{Ext} C$, $\lambda_{D_j}(z)|dz|$ — метрика Пуанкаре в D_j, $j = 1, 2$. В дальнейшем, если это не приводит к путанице, будем опускать обозначение области, принимая $\lambda(z)|dz|$ за метрику Пуанкаре, заданную в $D_1 \cup D_2$.

Пусть G — отмеченная конечнопорожденная квазифуксова группа первого рода дробно-линейных преобразований $\overline{\mathbb{C}}$ с инвариантной кривой C такая, что D_1/G — компактная риманова поверхность рода $h \geq 2$.

Обозначим через $\operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ группу всех характеров (одномерных представлений) ρ из G в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ с естественной операцией умножения.

Определение 1. *Измеримой мультипликативной автоморфной формой порядка q ($q \in \mathbb{Z}$) с характером ρ на D_1 (D_2)* называется класс эквивалентности измеримых функций $\phi(z)$ с условием $\phi(Az)A'(z)^q = \rho(A)\phi(z)$ для любого $A \in G$, $z \in D_1(D_2)$.

Мультипликативная автоморфная форма f нулевого порядка с характером ρ на D_1 (D_2) называется *мультипликативной функцией для ρ*. Голоморфные мультипликативные автоморфные формы порядка q для характера ρ будем далее называть *голоморфными (q, ρ)-формами.* При этом (q, ρ)-форма и $\left(q, \frac{1}{\rho}\right)$-форма считаются ρ-двойственными, а (q_1, ρ)-форма и (q_2, ρ)-форма — q-двойственными формами для $q = q_1 + q_2$.

Если f_1 — мультипликативная функция для ρ_1 без нулей и полюсов на D_1 (D_2), то характер ρ_1 называется *несущественным* [5, 6], а сама такая функция f_1 — *мультипликативной единицей для ρ_1*.

Теорема [5]. *Для любого характера $\rho \in \operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ существует единственный несущественный характер ρ_1 такой, что $\rho_0 = \frac{\rho}{\rho_1}$ — нормированный характер для G, т. е.*

$$|\rho_0(A)| = \left|\frac{\rho}{\rho_1}(A)\right| = 1 \quad \text{для любого } A \in G. \tag{1}$$

В работе [3] рассмотрены голоморфные (q, ρ)-формы ϕ на D_1 при целом $q \geq 2$ с условием

$$\|\phi\|^p_{q,p,G,\rho} = \iint\limits_{D_1/G} \lambda(z)^{2-pq} \left|\frac{\phi(z)}{f_1(z)}\right|^p |dz \wedge d\bar{z}| < \infty \quad \text{для некоторого } p,\ 1 \leq p \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где f_1 — мультипликативная единица для несущественного характера ρ_1 с условием (1). Они образуют замкнутое нормированное пространство $A^p_q(D_1, G, \rho)$ голоморфных (q, ρ)-форм, интегрируемых со степенью p. Для (q, ρ)-форм ϕ_1 и ϕ_2 из пространств $A^p_q(D_1, G, \rho)$ и $A^{p'}_q(D_1, G, \rho)$ соответственно, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, определено билинейное спаривание [3]:

$$(\phi_1, \phi_2)_{q,\rho,G,D_1} = \frac{i}{2} \iint\limits_{D_1/G} \lambda(z)^{2-2q} \frac{\phi_1(z)\overline{\phi_2(z)}}{|f_1(z)|^2}\, dz \wedge d\bar{z}. \tag{3}$$

Аналогично для множества D_2. Для дальнейших оценок по норме рассматриваемых пространств полезными оказываются следующие факты.

Лемма 1 [1,2]. *Если D — односвязная жорданова область, ∞ не принадлежит D и $\lambda = \lambda_D$ задает метрику Пуанкаре на D, то для любой $z \in D$*

$$\lambda(z)|z - \partial D| \geq \frac{1}{4}, \tag{4}$$

где ∂D — граница D, $|z - \partial D| = \inf\limits_{z_1 \in \partial D} |z - z_1|$.

Для вышеопределенных C, D_1 и D_2 ясно, что $\partial D_1 = C = \partial D_2$, и для любых $z \in D_1, \zeta \in D_2$ верно $|z - C| \leq |z - \zeta|$, $|\zeta - C| \leq |z - \zeta|$. Кроме того, справедлива

Лемма 2 [1]. *Для каждого целого $q \geq 2$ и фиксированного $z \in D_2$ функция ${}_q\omega_z = \frac{1}{(\zeta - z)^{2q}}$, $\zeta \in D_1$, голоморфна на D_1 и верна оценка*

$$\iint\limits_{D_1} \lambda(\zeta)^{2-q} \left|{}_q\omega_z\right| \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} \leq \frac{4^{q-2} 2\pi}{q} \frac{1}{|z - C|^q}. \tag{5}$$

Отметим также, что функция $\frac{1}{(\zeta - z)^{2q}}$ как функция двух переменных $\zeta \in D_1$, $z \in D_2$, симметрична и обладает свойством инвариантности относительно группы G, а именно

$$\frac{1}{(A\zeta - Az)^{2q}} = \frac{1}{(\zeta - z)^{2q} A'(\zeta)^q A'(z)^q} \quad \text{для любых } A \in G,\ 2 \leq q \in \mathbb{N}.$$

Определение 2 [2]. Измеримая на $\mathbb{C}$ функция $\mu_q(z)$, $2 \leq q \in \mathbb{N}$, называется *обобщенным коэффициентом Бельтрами* для разрывной группы Γ дробно-линейных преобразований $\overline{\mathbb{C}}$ с множеством разрывности $\Omega(\Gamma)$ и предельным множеством $\Lambda(\Gamma) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega(\Gamma)$, если $\mu|_{\Lambda(\Gamma)} = 0$, $\mu(Az)A'(z)^{1-q}\overline{A'(z)} = \mu(z)$ для любых $A \in \Gamma$, $z \in \Omega(\Gamma)$ и почти всюду на $\overline{\mathbb{C}}$ верна оценка

$$|\mu(z)| \leq K\lambda(z)^{2-q}, \quad \text{где } K = \text{const}\,. \tag{6}$$

§ 2. Модифицированный оператор Берса, обращающий характер формы

Зафиксируем целое $q \geq 2$. Пусть φ — это голоморфная (q, ρ)-форма на D_1 относительно группы G. Зададим оператор Берса по формуле

$$\left(\mathscr{B}_C^{\text{hom}} \varphi\right)(z) = \frac{i}{2} \iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q} \overline{\varphi(\zeta)}}{(\zeta - z)^{2q} \overline{f_1(\zeta)} f_1(z)} \, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \quad z \in D_2, \tag{7}$$

где f_1 — единица для несущественного характера ρ_1, соответствующего ρ по условию (1). Тогда после действия оператора $\mathscr{B}_C^{\text{hom}}$ получаем $\left(q, \frac{1}{\rho}\right)$-форму $\mathscr{B}_C \varphi$ на D_2, т. е. формы $\mathscr{B}_C \varphi$ и φ являются ρ-двойственными. Действительно, так как D_1 инвариантна относительно действия группы G, имеем

$$\left(\mathscr{B}_C^{\text{hom}} \varphi\right)(Az) A'(z)^q = A'(z)^q \iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q} \overline{\varphi(\zeta)}}{(\zeta - Az)^{2q} \overline{f_1(\zeta)} f_1(Az)} \frac{i}{2} \, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

$$= A'(z)^q \iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(A\zeta_1)^{2-2q}}{(A\zeta_1 - Az)^{2q}} \frac{\overline{\varphi(A\zeta_1)} |A'(\zeta_1)|^2}{\overline{f_1(A\zeta_1)} f_1(Az)} \frac{i}{2} \, d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta_1}$$

$$= A'(z)^q \iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta_1)^{2-2q} |A'(\zeta_1)|^{2q-2} \overline{\varphi(\zeta_1) A'(\zeta_1)}^{-q} \overline{\rho(A)} |A'(\zeta_1)|^2}{(\zeta_1 - z)^{2q} A'(\zeta_1)^q A'(z)^q \overline{f_1(\zeta_1) \rho_1(A)} f_1(z) \rho_1(A)} \frac{i}{2} \, d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta_1}$$

$$= \frac{\overline{\rho(A)}}{\overline{\rho_1(A)}\rho_1(A)} \iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta_1)^{2-2q}\overline{\varphi(\zeta_1)}}{(\zeta_1 - z)^{2q}\overline{f_1(\zeta_1)} f_1(z)} \frac{i}{2} d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_1 = \frac{1}{\rho(A)} \big(\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}\varphi\big)(z).$$

Определим также оператор $\mathscr{B}_{-C}^{\mathrm{hom}}$ для форм на D_2, заменяя в (7) область интегрирования D_1 на D_2.

Введем $k_q = \frac{4^{2(q-1)}2\pi}{q}$ — константу для целого $q \geq 2$.

Теорема 1. *Для произвольного характера $\rho \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ модифицированный оператор Берса $\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}$ является антилинейным непрерывным отображением между пространствами ρ-двойственных форм: $\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}} : A_q^p(D_1, G, \rho) \to A_q^p\big(D_2, G, \frac{1}{\rho}\big)$, $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, с нормой $\big\|\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}\big\| \leq k_q$. Кроме того, для любых $\varphi \in A_q^p(D_1, G, \rho)$ и $\psi \in A_q^{p'}\big(D_2, G, \frac{1}{\rho}\big)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, верно*

$$\big(\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}\varphi, \psi\big)_{q,\frac{1}{\rho},D_2,G} = \big(\overline{\varphi, \mathscr{B}_{-C}^{\mathrm{hom}}\psi}\big)_{q,\rho,D_1,G}. \tag{8}$$

Доказательство. Если ω_1, ω_2 — локально конечные фундаментальные области для G в D_1 и в D_2 соответственно, то по определению нормы имеем

$$\big\|\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}\varphi\big\|^p_{q,p,G,\frac{1}{\rho}} = \iint\limits_{\omega_2} \frac{\lambda(z)^{2-pq}}{\frac{1}{|f_1(z)|^p}} \left| \iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}\overline{\varphi(\zeta)}}{(\zeta - z)^{2q}\overline{f_1(\zeta)} f_1(z)} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{2} \right|^p |dz \wedge d\bar{z}|$$

$$\leq \iint\limits_{\omega_2} \lambda(z)^{2-pq}|f_1(z)|^p \left(\iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}|\varphi(\zeta)|}{|\zeta - z|^{2q}|f_1(\zeta)||f_1(z)|} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} \right)^p |dz \wedge d\bar{z}|.$$

Используя неравенство Гёльдера

$$\left(\iint\limits_{D} |x(\zeta)y(\zeta)|\, d\nu \right)^p \leq \iint\limits_{D} |x(\zeta)|^p d\nu \left(\iint\limits_{D} |y(\zeta)|^{p'}\, d\nu \right)^{\frac{p}{p'}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{9}$$

для случая, когда $d\nu = \lambda(\zeta)^{2-q}\frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2}$ и

$$x(\zeta) = \lambda(\zeta)^{-q} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{\frac{2q}{p}} f_1(\zeta) f_1(z)}, \quad y(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - z)^{\frac{2q}{p'}}} = \frac{1}{(\zeta - z)^{2q\frac{p-1}{p}}},$$

оценим внутренний интеграл:

$$\left(\iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}|\varphi(\zeta)|}{|\zeta - z|^{2q}|f_1(\zeta)||f_1(z)|} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} \right)^p$$

$$\leq \iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q}\lambda(\zeta)^{-pq}|\varphi(\zeta)|^p}{|\zeta - z|^{2q}|f_1(\zeta)|^p|f_1(z)|^p} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} \left(\iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q}}{|\zeta - z|^{2q}} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} \right)^{\frac{p}{p'}}$$

$$\leq \left(\frac{4^{q-2}2\pi}{q} \right)^{p-1} \frac{1}{|z - C|^{q(p-1)}} \iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q-pq}|\varphi(\zeta)|^p}{|\zeta - z|^{2q}|f_1(\zeta)|^p|f_1(z)|^p} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2}.$$

В последнем неравенстве воспользовались интегральной оценкой (5). Так как фундаментальная область ω_2 всегда может быть выбрана односвязной и не содержащей ∞ (без ограничения общности можно считать, что $\infty \in \partial\omega$), ввиду свойства (4) метрики Пуанкаре имеем

$$\big\|\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}\varphi\big\|^p_{q,p,G,\frac{1}{\rho}} \leq \left(\frac{4^{q-2}2\pi}{q} \right)^{p-1} \iint\limits_{\omega_2} \frac{\lambda(z)^{2-pq}}{|z - C|^{q(p-1)}} |f_1(z)|^p$$

$$\times\Bigg(\iint\limits_{D_1}\frac{\lambda(\zeta)^{2-q-pq}}{|\zeta-z|^{2q}}\frac{|\varphi(\zeta)|^p}{|f_1(z)|^p|f_1(\zeta)|^p}\frac{|d\zeta\wedge d\bar\zeta|}{2}\Bigg)|dz\wedge d\bar z|$$

$$\le\left(\frac{4^{q-2}2\pi}{q}\right)^{p-1}4^{q(p-1)}\iint\limits_{\omega_2}\lambda(z)^{2-pq+q(p-1)}$$

$$\times\Bigg(\iint\limits_{D_1}\frac{\lambda(\zeta)^{2-q-pq}}{|\zeta-z|^{2q}}\frac{|\varphi(\zeta)|^p}{|f_1(\zeta)|^p}\frac{|d\zeta\wedge d\bar\zeta|}{2}\Bigg)|dz\wedge d\bar z|$$

$$=(k_q)^{p-1}\iint\limits_{\omega_2}\lambda(z)^{2-q}\Bigg(\iint\limits_{D_1}\frac{\lambda(\zeta)^{2-q-pq}}{|\zeta-z|^{2q}}\frac{|\varphi(\zeta)|^p}{|f_1(\zeta)|^p}\frac{|d\zeta\wedge d\bar\zeta|}{2}\Bigg)|dz\wedge d\bar z|$$

$$=(k_q)^{p-1}\sum_{A\in G}\iint\limits_{\omega_2}\lambda(z)^{2-q}\Bigg(\iint\limits_{A^{-1}(\omega_1)}\frac{\lambda(A\zeta)^{2-q-pq}|A'(\zeta)|^{2-pq}}{|A\zeta-Az|^{2q}|A'(z)|^{-q}}$$

$$\times\frac{|\varphi(A\zeta)|^p|A'(\zeta)|^{pq}}{|f_1(A\zeta)|^p|\rho_0(A)|^p}\frac{|d\zeta\wedge d\bar\zeta|}{2}\Bigg)|dz\wedge d\bar z|$$

$$=(k_q)^{p-1}\sum_{A\in G}\iint\limits_{\omega_2}\frac{\lambda(z)^{2-q}}{|A'(z)|^{-q}}\Bigg(\iint\limits_{\omega_1}\frac{\lambda(\zeta)^{2-q-pq}|\varphi(\zeta)|^p}{|\zeta-Az|^{2q}|f_1(\zeta)|^p}\frac{|d\zeta\wedge d\bar\zeta|}{2}\Bigg)|dz\wedge d\bar z|$$

$$=(k_q)^{p-1}\iint\limits_{\omega_1}\frac{\lambda(\zeta)^{2-q-pq}|\varphi(\zeta)|^p}{|f_1(\zeta)|^p}\Bigg(\sum_{A\in G}\iint\limits_{\omega_2}\frac{\lambda(z)^{2-q}}{|\zeta-Az|^{2q}}|A'(z)|^q|dz\wedge d\bar z|\Bigg)\frac{|d\zeta\wedge d\bar\zeta|}{2}$$

$$=(k_q)^{p-1}\iint\limits_{\omega_1}\frac{\lambda(\zeta)^{2-q-pq}|\varphi(\zeta)|^p}{|f_1(\zeta)|^p}\Bigg(\iint\limits_{D_2}\frac{\lambda(z)^{2-q}}{|z-\zeta|^{2q}}\frac{|dz\wedge d\bar z|}{2}\Bigg)|d\zeta\wedge d\bar\zeta|.$$

В предпоследнем равенстве использована теорема Фубини — Тонелли. Докажем, что для каждого целого $q\ge 2$ и фиксированного $\zeta\in\omega_1$ верна оценка

$$\iint\limits_{D_2}\frac{\lambda_{D_2}(z)^{2-q}}{|z-\zeta|^{2q}}\frac{|dz\wedge d\bar z|}{2}\le k_q\lambda_{D_1}(\zeta)^q. \tag{10}$$

Действительно, так как для каждого фиксированного $A\in G$ область $A(\omega_2)\subset D_2$ односвязна и не содержит ∞, то, взяв ограничение λ с большей области на подмножества, получаем

$$\iint\limits_{D_2}\frac{\lambda_{D_2}(z)^{2-q}}{|z-\zeta|^{2q}}\frac{|dz\wedge d\bar z|}{2}=\sum_{A\in G}\Bigg[\iint\limits_{A(\omega_2)}\frac{\lambda_{A(\omega_2)}(z)^{2-q}}{|z-\zeta|^{2q}}\ \frac{|dz\wedge d\bar z|}{2}\Bigg]$$

$$\le 4^{q-2}\sum_{A\in G}\Bigg[\iint\limits_{A(\omega_2)}\frac{|z-\partial A(\omega_2)|^{q-2}}{|z-\zeta|^{2q}}\ \frac{|dz\wedge d\bar z|}{2}\Bigg]\le 4^{q-2}\iint\limits_{\sum_{A\in G}A(\omega_2)}\frac{|z-C|^{q-2}}{|z-\zeta|^{2q}}\ \frac{|dz\wedge d\bar z|}{2}$$

$$\le 4^{q-2}\iint\limits_{D_2}|z-\zeta|^{-q-2}\frac{|dz\wedge d\bar z|}{2}\le 4^{q-2}\iint\limits_{|z-\zeta|>|\zeta-C|}|z-\zeta|^{-q-2}\frac{|dz\wedge d\bar z|}{2}$$

$$=4^{q-2}\iint\limits_{|z|>|\zeta-C|}|z|^{-q-2}\frac{|dz\wedge d\bar z|}{2}=\frac{4^{q-2}2\pi}{q}\frac{1}{|\zeta-C|^q}\le\frac{4^{2(q-1)}2\pi}{q}\lambda_{D_1}(\zeta)^q=k_q\lambda_{D_1}(\zeta)^q.$$

Отсюда имеем

$$\left\|\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}\varphi\right\|^p_{q,p,G,\frac{1}{\rho}} \le (k_q)^p \iint\limits_{\omega_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-pq}|\varphi(\zeta)|^p}{|f_1(\zeta)|^p}|d\zeta\wedge d\bar\zeta| = (k_q)^p\|\varphi\|^p_{q,p,G,\rho}.$$

Таким образом, верна оценка

$$\left\|\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}\varphi\right\|_{q,p,G,\frac{1}{\rho}} \le k_q\|\varphi\|_{q,p,G,\rho}$$

и, следовательно, $\left\|\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}\right\| \le k_q$. Отсюда также следует непрерывность отображения $\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}$.

Докажем, что для голоморфной формы φ на D_1 форма $\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}(\varphi)$ будет голоморфной на D_2. Для этого сначала докажем голоморфность произведения

$$\left(\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}\varphi\right)(z)\, f_1(z) = \frac{i}{2}\iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}\overline{\varphi(\zeta)}}{(\zeta-z)^{2q}\overline{f_1(\zeta)}}d\zeta\wedge d\bar\zeta \tag{11}$$

для $z\in D_2$. При этом, используя теорему Римана и обычные свойства инвариантности, можно предположить, что $D_1 = \Delta = \{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$, $D_2 = \Delta^* = \overline{\mathbb{C}}\setminus(\Delta\cup\partial\Delta)$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned}\left|\left(\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}\varphi\right)(z)\, f_1(z)\right| &= \left|\iint\limits_{\Delta} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{(\zeta-z)^{2q}}\,\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\overline{f_1(\zeta)}}\,\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{2}\right| \\ &\le \iint\limits_{\Delta} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{|\zeta-z|^{2q}}\left|\frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}\right|\frac{|d\zeta\wedge d\bar\zeta|}{2}.\end{aligned}$$

Функция $\frac{\varphi}{f_1}$ голоморфна и однозначна в Δ, она становится мультипликативной для нормированного характера при проектировании на Δ/G. В силу ограниченности ω и того, что для любой $\zeta\in\Delta$ существует $\zeta_1\in\omega$ с условием $\left|\frac{\varphi}{f_1}(\zeta)\right| = \left|\frac{\varphi}{f_1}(\zeta_1)\right|$, заключаем, что модуль $\left|\frac{\varphi}{f_1}\right|$ достигает своего максимума η в Δ. Отсюда

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{|\zeta-z|^{2q}}\left|\frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}\right|\frac{|d\zeta\wedge d\bar\zeta|}{2} \le \eta\iint\limits_{\Delta}\frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{|\zeta-z|^{2q}}\frac{|d\zeta\wedge d\bar\zeta|}{2}.$$

Применяя к последнему выражению оценки $|\zeta-z|\ge|\zeta-\partial\Delta|$, $|\zeta-z|\ge|z-\partial\Delta|$ для любых $\zeta\in\Delta$, $z\in\Delta^*$ и $\frac{1}{|\zeta-\partial\Delta|}\le 4\lambda(\zeta) = \frac{4}{1-|\zeta|^2}$, $\zeta\in\Delta$, $\frac{1}{|z-\partial\Delta|}\le\frac{1}{|z-\partial\omega_2|}\le 4\lambda_{\omega_2}(z)$, $z\in\omega_2\subset\Delta^*$, получаем

$$\begin{aligned}\left|\left(\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}\varphi\right)(z)\, f_1(z)\right| &\le \eta\iint\limits_{\Delta}\frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{|\zeta-\partial\Delta|^q|z-\partial\Delta|^q}\frac{|d\zeta\wedge d\bar\zeta|}{2} \\ &\le 4^{2q}\eta\lambda_{\omega_2}(z)^q\iint\limits_{\Delta}\lambda(\zeta)^{2-q}\frac{|d\zeta\wedge d\bar\zeta|}{2} = 4^{2q}\eta\lambda_{\omega_2}(z)^q\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^1 r(1-r^2)^{q-2}\,dr \\ &= 4^{2q}\eta\lambda_{\omega_2}(z)^q\frac{\pi}{q-1},\ z\in\omega_2\subset\Delta^*.\end{aligned}$$

Так как $\lambda_{\omega_2}(z)^q$ ограничена на любом компакте $K\Subset\Delta^*$, $K\cap\omega_2\ne\varnothing$, интеграл в (11) сходится абсолютно и равномерно по параметру z на любом компакте $K\Subset\Delta^*$. Кроме того,

1) подынтегральная функция в (11) при любом фиксированном $\zeta \in \Delta$ аналитична по z;

2) подынтегральная функция в (11) и ее производная $2q\frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{(\zeta-z)^{2q+1}}\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\overline{f_1(\zeta)}}$ по z непрерывны по совокупности переменных $(\zeta, z) \in \Delta \times \Delta^*$.

Поэтому (11) определяет голоморфную форму $\left(\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}\varphi\right)(z)\, f_1(z)$ для $z \in \Delta^*$ и, следовательно, для $z \in D_2$.

В силу важности последнего утверждения приведем еще одно его доказательство. Запишем двойной интеграл в (11) в виде повторного, используя полярные координаты (θ, r) для ζ:

$$\left(\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}\varphi\right)(z)\, f_1(z) = \frac{i}{2}\int_0^1 \frac{r}{(1-r^2)^{2-2q}}dr \int_0^{2\pi} \frac{1}{(re^{i\theta}-z)^{2q}}\,\frac{\overline{\varphi(re^{i\theta})}}{\overline{f_1(re^{i\theta})}}\,d\theta, \quad z \in \Delta^*. \tag{12}$$

Рассмотрим внутренний интеграл при фиксированном $r \in [0,1)$:

$$F_{2q}(z,r) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(re^{i\theta}-z)^{2q}}\,\frac{\overline{\varphi(re^{i\theta})}}{\overline{f_1(re^{i\theta})}}\,d\theta, \quad z \in \Delta^*. \tag{13}$$

Если $r = 0$, то

$$F_{2q}(z,0) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z^{2q}}\,\frac{\overline{\varphi(0)}}{\overline{f_1(0)}}\,d\theta = \frac{2\pi}{z^{2q}}\overline{\left(\frac{\varphi(0)}{f_1(0)}\right)} = A(z)$$

— голоморфная функция для $z \in \Delta^*$ $(z \neq 0)$, $q \geq 2$.

Зафиксируем теперь $r \neq 0$. Точки $\zeta = re^{i\theta}$, $\zeta \in \Delta$, соответствующие такому r, будем обозначать через w. Таким образом, $w \in L_r$, где L_r — окружность в Δ (фиксированного) радиуса r, и имеем

$$F_{2q}(z,r) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(re^{i\theta}-z)^{2q}}\overline{\left(\frac{\varphi(re^{i\theta})}{f_1(re^{i\theta})}\right)}\,\frac{d(re^{i\theta})}{ire^{i\theta}} = \frac{1}{i}\int_{L_r} \frac{1}{(w-z)^{2q}}\overline{\left(\frac{\varphi(w)}{f_1(w)}\right)}\frac{dw}{w}.$$

Из условия $r \neq 0$ следует, что $w \neq 0$, а значит, функция

$$\psi(w) = \frac{1}{w}\overline{\left(\frac{\varphi(w)}{f_1(w)}\right)}$$

непрерывна по $w \in L_r$. Воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 3 [7]. *Пусть γ — спрямляемая кривая, ψ — функция, определенная и непрерывная на γ. Для любого $m \geq 1$ рассмотрим*

$$\Psi_m(z) = \int_\gamma \frac{\psi(w)}{(w-z)^m}dw, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma.$$

Тогда функция Ψ_m аналитична на $\mathbb{C} \setminus \gamma$ и $\Psi_m'(z) = m\Psi_{m+1}(z)$ (тоже аналитична на $\mathbb{C} \setminus \gamma$).

Если положить $\Psi_{2q}(z) = F_{2q}(z,r)$, то по лемме 3 функция $F_{2q}(z,r)$ аналитична на $\mathbb{C}\setminus L_r$ при фиксированном $r \in (0,1)$, а значит, $F_{2q}(z,r)$ для любого

$r \in (0,1)$ аналитична по z на любом компакте K из $\Delta^* = \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta \cup \partial\Delta)$ и, кроме того, существует производная $\frac{\partial F_{2q}(z,r)}{\partial z} = 2qF_{2q+1}(z,r)$ непрерывная (даже аналитическая) по z на $K \Subset \Delta^*$.

Вернемся к интегралу (12). Имеем

$$\big(\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}\varphi\big)(z)\, f_1(z) = \int_0^1 r(1-r^2)^{2q-2} F_{2q}(z,r)\, dr, \quad z \in \Delta^*, \tag{14}$$

где $q \geq 2$, $F_{2q}(z,r)$ — аналитическая функция по z на любом компакте $K \Subset \Delta^*$ при фиксированном $r \in [0,1)$. Отсюда интеграл в (14) является собственным интегралом, зависящим от параметра $z \in \Delta^*$, подынтегральная функция которого аналитична по $z \in K \Subset \Delta^*$ при фиксированном $r \in [0,1)$ и имеет непрерывную производную

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{rF_{2q}(z,r)}{(1-r^2)^{2-2q}}\right) = \frac{r}{(1-r^2)^{2-2q}}\frac{\partial F_{2q}(z,r)}{\partial z} = \begin{cases} 0, & \text{если } r = 0, \\ \frac{2qrF_{2q+1}(z,r)}{(1-r^2)^{2-2q}}, & \text{если } r \neq 0. \end{cases}$$

Поэтому (14) задает аналитическую по z функцию на Δ^* [7, с. 74], а значит, $\big(\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}\varphi\big)(z) f_1(z)$ — аналитическая функция в D_2.

Покажем теперь, что множитель $\frac{1}{f_1(z)}$, $z \in D_2$, не влияет на сходимость интеграла в (7), а значит, из аналитичности произведения $\big(\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}\varphi\big)(z) f_1(z)$ следует аналитичность формы $\big(\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}\varphi\big)(z)$, $z \in D_2$. Для этого сначала зафиксируем некоторую локально конечную фундаментальную область $\omega \in D_2$. Тогда для любой $z_0 \in \omega$ найдется окрестность $U(z_0)$, целиком содержащаяся в ω и такая, что функция $f_1(z)$ в этой окрестности отграничена от нуля и бесконечности, т. е. существуют константы m и M, $0 < m \leq M < \infty$, такие, что

$$m \leq |f_1(z)| \leq M \quad \text{для всех } z \in U(z_0). \tag{15}$$

Действительно, если предположить, что для любой окрестности $U(z_0)$ точки z_0 и для любого $m > 0$ существует $z \in U(z_0)$, для которой $|f_1(z)| < m$, то существует последовательность точек $z_n \in \omega$ такая, что $z_n \to z_0$, $n \to \infty$, и $f_1(z_n) \to 0$, $n \to \infty$. Но в силу непрерывности функции f_1 получаем, что $f_1(z_0) = 0$. Это противоречит отсутствию нулей у функции f_1. Аналогично доказывается, что f_1 отграничена от ∞ на ω. Таким образом, f_1 локально на ω отграничена от нуля и бесконечности. Пусть теперь $\tilde{z}_0 \in D_2$ — произвольная точка из D_2. По свойствам фундаментальной области существуют преобразование $T \in G$ и точка $z_0 \in \omega$ такие, что $\tilde{z}_0 = T(z_0)$. Рассмотрим окрестность точки $\tilde{z}_0$ в виде $V(\tilde{z}_0) = T(U(z_0))$, где $U(z_0)$ — окрестность точки z_0, в которой выполняется условие (15). Для каждой $\tilde{z} \in V(\tilde{z}_0)$ существует $z' \in U(z_0)$ такое, что $\tilde{z} = T(z')$. Следовательно, $f_1(\tilde{z}) = \rho(T) f_1(z')$. Так как $0 < m \leq f_1(z') \leq M < \infty$ и $0 < \rho(T) < \infty$ для каждого фиксированного T, то $f_1(\tilde{z})$ отграничена от 0 (и от ∞). В силу произвольности $\tilde{z}_0$ значения $f_1(z)$ отграничены от 0 (и от ∞) в некоторой окрестности любой точки z из D_2. Поэтому $\frac{1}{f_1(z)}$ (и $f_1(z)$) локально на D_2 принимает конечные значения и тем самым после умножения обеих частей в (11) на $\frac{1}{f_1(z)}$ получим интеграл, определяющий голоморфную мультипликативную форму $\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}(\varphi)$ (умножение на локально ограниченную аналитическую функцию не нарушает голоморфности).

Проверим равенство (8). Для любых $\varphi \in A_q^p(D_1, G, \rho)$ и $\psi \in A_q^{p'}\bigl(D_2, G, \frac{1}{\rho}\bigr)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, верно

$$\bigl(\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}\varphi, \psi\bigr)_{q, \frac{1}{\rho}, D_2} = \iint\limits_{\omega_2} \frac{\lambda(z)^{2-2q}}{\bigl|\frac{1}{f_1(z)}\bigr|^2} \bigl(\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}\varphi\bigr)(z)\overline{\psi(z)}\frac{i}{2}\,dz \wedge d\bar{z}$$

$$= -\frac{1}{4}\iint\limits_{\omega_2} \lambda(z)^{2-2q}|f_1(z)|^2\overline{\psi(z)}\Biggl(\iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}\overline{\varphi(\zeta)}\,d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{(\zeta - z)^{2q}\overline{f_1(\zeta)}f_1(z)}\Biggr)\,dz \wedge d\bar{z}$$

$$= -\frac{1}{4}\iint\limits_{\omega_2} \lambda(z)^{2-2q}\overline{f_1(z)\psi(z)}\Biggl(\sum_{A\in G}\iint\limits_{A^{-1}(\omega_1)} \frac{\lambda(A\zeta)^{2-2q}}{(A\zeta - Az)^{2q}}$$

$$\times \frac{|A'(\zeta)|^{2-2q}}{A'(\zeta)^{-q}A'(z)^{-q}}\frac{\overline{\varphi(A\zeta)A'(\zeta)^q}\,\overline{\rho(A)}^{-1}}{\overline{f_1(A\zeta)\rho_1(A)}^{-1}}\,d\zeta \wedge d\bar{\zeta}\Biggr)dz \wedge d\bar{z}$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{A\in G}\frac{1}{\overline{\rho_0(A)}}\iint\limits_{\omega_2} \lambda(z)^{2-2q}\overline{f_1(z)}\,\overline{\psi(z)}\Biggl(\iint\limits_{\omega_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}\overline{\varphi(\zeta)}}{(\zeta - Az)^{2q}A'(z)^{-q}\overline{f_1(\zeta)}}\,d\zeta\wedge d\bar{\zeta}\Biggr)dz\wedge d\bar{z}.$$

Применяя теорему Фубини к последнему интегралу, получаем

$$\bigl(\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}\varphi, \psi\bigr)_{q, \frac{1}{\rho}, D_2} = -\frac{1}{4}\sum_{A\in G}\frac{1}{\overline{\rho_0(A)}}\iint\limits_{\omega_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}\overline{\varphi(\zeta)}}{\overline{f_1(\zeta)}}$$

$$\times\Biggl(\iint\limits_{\omega_2} \lambda(z)^{2-2q}\frac{\overline{\psi(z)f_1(z)}\,dz \wedge d\bar{z}}{(\zeta - Az)^{2q}A'(z)^{-q}}\Biggr)\,d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

$$= \frac{-1}{4}\sum_{A\in G}\frac{1}{\overline{\rho_0(A)}}\iint\limits_{\omega_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}\overline{\varphi(\zeta)}}{|f_1(\zeta)|^2}\Biggl(\iint\limits_{\omega_2} \frac{\lambda(Az)^{2-2q}|A'(z)|^{2-2q}}{(\zeta - Az)^{2q}|A'(z)|^{-2q}}$$

$$\times\frac{\overline{\psi(Az)}}{\overline{\rho(A)}^{-1}}\frac{\overline{f_1(Az)}}{\overline{\rho_1(A)}}f_1(\zeta)\,dz \wedge d\bar{z}\Biggr)d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

$$= \frac{-1}{4}\iint\limits_{\omega_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}\overline{\varphi(\zeta)}}{|f_1(\zeta)|^2}\Biggl(\sum_{A\in G}\iint\limits_{A(\omega_2)} \frac{\lambda(z)^{2-2q}\overline{\psi(z)}\,dz \wedge d\bar{z}}{(\zeta - z)^{2q}\overline{f_1(z)}^{-1}(f_1(\zeta))^{-1}}\Biggr)\,d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

$$= \iint\limits_{\omega_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}\overline{\varphi(\zeta)}}{|f_1(\zeta)|^2}\bigl(\mathscr{B}_{-C}^{\mathrm{hom}}\psi\bigr)(\zeta)\frac{i}{2}d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \bigl(\overline{\varphi, \mathscr{B}_{-C}^{\mathrm{hom}}\psi}\bigr)_{q,\rho,D_1}.$$

Теорема 1 доказана.

§ 3. Модифицированный оператор Берса, *q*-двойственно меняющий порядок формы

Пусть D — открытое множество в $\mathbb{C}$, конформно эквивалентное единичному кругу $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$; Γ — отмеченная конечнопорожденная разрывная группа конформных преобразований множества D на себя такая, что $D/\Gamma = F$ — отмеченная компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$.

Пусть $\varphi \in A_{q_1}^p(D, \Gamma, \rho)$, $\psi \in A_{q_2}^{p'}\bigl(D, \Gamma, \frac{1}{\rho}\bigr)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $q = q_1 + q_2$, т. е. φ и ψ — это (q, ρ)-двойственные формы на D. Для таких форм определим билинейное спаривание:

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{q_1,q_2,D,\Gamma}=\iint\limits_{D/\Gamma}\mu_q(z)\varphi(z)\psi(z)\frac{i}{2}\,dz\wedge d\bar z, \tag{16}$$

где μ_q — фиксированный обобщенный коэффициент Бельтрами класса $C^1(D)$ для $q=q_1+q_2$. С помощью оценки (6) и неравенства Гёльдера нетрудно установить, что интеграл (16) конечен. Покажем, что билинейное спаривание (16) корректно определено, т. е. не зависит от выбора фундаментальной области ω группы Γ:

$$\iint\limits_{\omega}\mu_{q_1+q_2}(z)\varphi(z)\psi(z)\frac{i}{2}dz\wedge d\bar z$$
$$=\iint\limits_{\omega}\mu_{q_1+q_2}(Az)A'(z)^{1-q_1-q_2}\overline{A'(z)}\frac{\varphi(Az)A'(z)^{q_1}}{\rho(A)}\psi(Az)A'(z)^{q_2}\rho(A)\frac{i}{2}dz\wedge d\bar z$$
$$=\iint\limits_{A(\omega)}\mu_{q_1+q_2}(z)\varphi(z)\psi(z)\frac{i}{2}dz\wedge d\bar z\quad\text{для любого } A\in\Gamma.$$

Заметим, что билинейное спаривание (16) симметрично, т. е. $\langle\varphi,\psi\rangle_{q_1,q_2,D,\Gamma}=\langle\psi,\varphi\rangle_{q_2,q_1,D,\Gamma}$ для любых $\varphi\in A^p_{q_1}(D,\Gamma,\rho)$ и $\psi\in A^{p'}_{q_2}\big(D,\Gamma,\frac{1}{\rho}\big)$. Кроме того, (16) задает линейное соответствие между пространствами $\Omega^{q_1}_{\rho}(\mathfrak{U})$ и $\big(\Omega^{q_2}_{\frac{1}{\rho}}\big(\frac{1}{\mathfrak{U}}\big)\big)^*$, где $\Omega^{q_1}_{\rho}(\mathfrak{U})$ — пространство мероморфных дифференциалов Прима порядка q_1 для ρ, кратных дивизору $\mathfrak{U}\in\operatorname{Div}(D/\Gamma)$ на компактной римановой поверхности $F=D/\Gamma$, $\big(\Omega^{q_2}_{\frac{1}{\rho}}\big(\frac{1}{\mathfrak{U}}\big)\big)^*$ — пространство, сопряженное к $\Omega^{q_2}_{\frac{1}{\rho}}\big(\frac{1}{\mathfrak{U}}\big)$.

Пусть C,D_1,D_2,G,f_1 определены, как и выше. Введем аналог оператора Берса для мультипликативных форм, который q-двойственно меняет порядок дифференциала, но не изменяет характер: для (ρ,q_1)-формы φ на D_1 положим

$$\big(\mathscr{B}^{\mathrm{ord}}_C\varphi\big)(z)=\frac{i}{2}\iint\limits_{D_1}\frac{\mu_q(\zeta)f_1(z)}{(\zeta-z)^{2q_2}f_1(\zeta)}\varphi(\zeta)\,d\zeta\wedge d\bar\zeta,\quad q=q_1+q_2,\ z\in D_2, \tag{17}$$

Оператор $\mathscr{B}^{\mathrm{ord}}_{-C}$ определяется аналогично для форм на D_2 путем замены в (17) D_1 на D_2.

Теорема 2. *Для произвольного характера $\rho\in\operatorname{Hom}(G,\mathbb{C}^*)$ модифицированный оператор Берса $\mathscr{B}^{\mathrm{ord}}_C$ является ограниченным линейным отображением из $A^p_{q_1}(D_1,G,\rho)$ в $A^p_{q_2}(D_2,G,\rho)$, $p\in\mathbb{R}$, $1\le p<\infty$, с нормой $\big\|\mathscr{B}^{\mathrm{ord}}_C\big\|\le Kk_{q_2}$ (где K — константа из неравенства (6) для $q=q_1+q_2$) и удовлетворяет условию «самосопряженности» относительно билинейного спаривания (16), а именно для любых голоморфных $\varphi\in A^p_{q_1}(D_1,G,\rho)$ и $\psi\in A^{p'}_{q_1}\big(D_2,G,\frac{1}{\rho}\big)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, верно равенство*

$$\big\langle\varphi,\mathscr{B}^{\mathrm{ord}}_{-C}\psi\big\rangle_{q_1,q_2,D_1,G}=\big\langle\mathscr{B}^{\mathrm{ord}}_C\varphi,\psi\big\rangle_{q_2,q_1,D_2,G}. \tag{18}$$

Доказательство. Если φ является голоморфной (q_1,ρ)-формой на D_1, то ее образ — форма $\mathscr{B}^{\mathrm{ord}}_C\varphi$ — будет голоморфной (q_2,ρ)-формой на $D_2=\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}_1$. Действительно, в силу инвариантности D_1 относительно действия группы G имеем

$$\big(\mathscr{B}^{\mathrm{ord}}_C\varphi\big)(Az)A'(z)^{q_2}=\frac{i}{2}A'(z)^{q_2}\iint\limits_{D_1}\frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)f_1(Az)}{(\zeta-Az)^{2q_2}f_1(\zeta)}\varphi(\zeta)\,d\zeta\wedge d\bar\zeta$$

$$= \frac{i}{2}A'(z)^{q_2} \iint\limits_{D_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(A\zeta_1)f_1(Az)}{(A\zeta_1 - Az)^{2q_2} f_1(A\zeta_1)} \varphi(A\zeta_1)|A'(\zeta_1)|^2 \, d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta_1}$$

$$= \frac{i}{2}A'(z)^{q_2} \iint\limits_{D_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta_1)A'(\zeta_1)^{q_1+q_2} f_1(z)\rho_1(A)}{(\zeta_1 - z)^{2q_2} A'(\zeta_1)^{q_2} A'(z)^{q_2} f_1(\zeta_1)\rho_1(A)} \frac{\varphi(\zeta_1)\rho(A)}{A'(\zeta_1)^{q_1}} \, d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta_1}$$

$$= \frac{i}{2}\rho(A) \iint\limits_{D_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)f_1(z)}{(\zeta - z)^{2q_2} f_1(\zeta)} \varphi(\zeta) \, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \rho(A)\big(\mathscr{B}_C^{\mathrm{ord}}\varphi\big)(z).$$

Оценим норму формы $\mathscr{B}_C^{\mathrm{ord}}\varphi$:

$$\big\|\mathscr{B}_C^{\mathrm{ord}}\varphi\big\|^p_{q_2,p,G,\rho} = \iint\limits_{\omega_2} \frac{\lambda(z)^{2-pq_2}}{|f_1(z)|^p} \left| \iint\limits_{D_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)f_1(z)}{(\zeta - z)^{2q_2} f_1(\zeta)} \varphi(\zeta) \frac{i d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{2} \right|^p |dz \wedge d\bar{z}|$$

$$\leq \iint\limits_{\omega_2} \frac{\lambda(z)^{2-pq_2}}{|f_1(z)|^p} \left(\iint\limits_{D_1} \frac{|\mu_{q_1+q_2}(\zeta)||f_1(z)|}{|\zeta - z|^{2q_2} |f_1(\zeta)|} |\varphi(\zeta)| \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} \right)^p |dz \wedge d\bar{z}|$$

$$\leq K^p \iint\limits_{\omega_2} \frac{\lambda(z)^{2-pq_2}}{|f_1(z)|^p} \left(\iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_1-q_2}|f_1(z)|}{|\zeta - z|^{2q_2} |f_1(\zeta)|} |\varphi(\zeta)| \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} \right)^p |dz \wedge d\bar{z}|.$$

В последнем неравенстве воспользовались свойством (6) обобщенного коэффициента Бельтрами μ_q для $q = q_1 + q_2$. Затем, снова последовательно применяя неравенство Гёльдера в виде (9) для случая, когда $d\nu = \lambda(\zeta)^{2-q_2} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2}$ и

$$x(\zeta) = \lambda(\zeta)^{-q_1} \frac{\varphi(\zeta)f_1(z)}{(\zeta - z)^{\frac{2q_2}{p}} f_1(\zeta)}, \quad y(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - z)^{\frac{2q_2}{p'}}} = \frac{1}{(\zeta - z)^{2q_2 \frac{p-1}{p}}},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, и неравенства (4), (5), (10), оценим внутренний интеграл в последнем выражении:

$$\big\|\mathscr{B}_C^{\mathrm{ord}}\varphi\big\|^p_{q_2,p,G,\rho} \leq K^p \iint\limits_{\omega_2} \frac{\lambda(z)^{2-pq_2}}{|f_1(z)|^p} \Bigg[\iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2}\lambda(\zeta)^{-pq_1}|\varphi(\zeta)|^p}{|\zeta - z|^{2q_2}|f_1(z)|^{-p}|f_1(\zeta)|^p} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2}$$

$$\times \left(\iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2}}{|\zeta - z|^{2q_2}} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} \right)^{\frac{p}{p'}} \Bigg] |dz \wedge d\bar{z}|$$

$$\leq K^p (k_{q_2})^{p-1} \iint\limits_{\omega_2} \lambda(z)^{2-q_2} \left(\iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2-pq_1}|\varphi(\zeta)|^p}{|\zeta - z|^{2q_2}|f_1(\zeta)|^p} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} \right) |dz \wedge d\bar{z}|$$

$$= K^p \, (k_{q_2})^{p-1} \iint\limits_{\omega_2} \lambda(z)^{2-q_2} \Bigg(\sum_{A\in G} \iint\limits_{A^{-1}(\omega_1)} \frac{\lambda(A\zeta)^{2-q_2-pq_1}|\varphi(A\zeta)|^p|A'(\zeta)|^2}{|A\zeta - Az|^{2q_2}|A'(z)|^{-q_2}|f_1(A\zeta)|^p|\rho_0(A)|^p}$$

$$\times \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} \Bigg) |dz \wedge d\bar{z}|$$

$$= K^p \, (k_{q_2})^{p-1} \sum_{A\in G} \iint\limits_{\omega_2} \frac{\lambda(z)^{2-q_2}}{|A'(z)|^{-q_2}} \left(\iint\limits_{\omega_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2-pq_1}|\varphi(\zeta)|^p}{|\zeta - Az|^{2q_2}|f_1(\zeta)|^p} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} \right) |dz \wedge d\bar{z}|$$

$$= K^p \, (k_{q_2})^{p-1} \sum_{A\in G} \iint\limits_{\omega_1} \lambda(\zeta)^{2-q_2-pq_1} \frac{|\varphi(\zeta)|^p}{|f_1(\zeta)|^p} \left(\iint\limits_{\omega_2} \frac{\lambda(z)^{2-q_2}|dz \wedge d\bar{z}|}{|\zeta - Az|^{2q_2}|A'(z)|^{-q_2}} \right) \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2}$$

$$= K^p\,(k_{q_2})^{p-1}\iint\limits_{\omega_1}\lambda(\zeta)^{2-q_2-pq_1}\frac{|\varphi(\zeta)|^p}{|f_1(\zeta)|^p}\Bigg(\iint\limits_{D_2}\frac{\lambda(z)^{2-q_2}}{|\zeta-z|^{2q_2}}\frac{|dz\wedge d\bar z|}{2}\Bigg)|d\zeta\wedge d\bar\zeta|$$
$$\le (Kk_{q_2})^p\|\varphi\|^p_{q_1,p,G,\rho}.$$

Таким образом, доказали, что $\left\|\mathscr{B}_C^{\mathrm{ord}}\right\|\le Kk_{q_2}$. Голоморфность формы $\mathscr{B}_C^{\mathrm{ord}}\varphi$ устанавливается аналогично случаю оператора $\mathscr{B}_C^{\mathrm{hom}}$.

Докажем равенство (18):

$$\left\langle\varphi,\mathscr{B}_{-C}^{\mathrm{ord}}\psi\right\rangle_{q_1,q_2,D_1,G}=\iint\limits_{\omega_1}\mu_{q_1+q_2}(\zeta)\varphi(\zeta)\big(\mathscr{B}_{-C}^{\mathrm{ord}}\psi\big)(\zeta)\frac{i}{2}\,d\zeta\wedge d\bar\zeta$$
$$=\iint\limits_{\omega_1}\mu_{q_1+q_2}(\zeta)\varphi(\zeta)\Bigg(\iint\limits_{D_2}\frac{\mu_{q_1+q_2}(z)\psi(z)1/f_1(\zeta)}{(z-\zeta)^{2q_2}1/f_1(z)}\frac{i}{2}dz\wedge d\bar z\Bigg)\frac{i}{2}\,d\zeta\wedge d\bar\zeta$$
$$=\iint\limits_{\omega_1}\frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}\Bigg(\sum_{A\in G}\iint\limits_{A^{-1}(\omega_2)}\frac{\mu_{q_1+q_2}(Az)A'(z)^{1-q_1-q_2}\overline{A'(z)}}{(Az-A\zeta)^{2q_2}A'(z)^{-q_2}A'(\zeta)^{-q_2}}\psi(Az)A'(z)^{q_1}$$
$$\times\rho(A)\frac{f_1(Az)}{\rho_1(A)}\frac{i}{2}dz\wedge d\bar z\Bigg)\frac{i}{2}d\zeta\wedge d\bar\zeta=\sum_{A\in G}\rho_0(A)\iint\limits_{\omega_1}\frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)A'(\zeta)^{-q_2}}$$
$$\times\Bigg(\iint\limits_{\omega_2}\frac{\mu_{q_1+q_2}(z)\psi(z)f_1(z)}{(z-A\zeta)^{2q_2}}\frac{i}{2}\,dz\wedge d\bar z\Bigg)\frac{i}{2}\,d\zeta\wedge d\bar\zeta.$$

Снова, применяя теорему Фубини к последнему интегралу, получим

$$\left\langle\varphi,\mathscr{B}_{-C}^{\mathrm{ord}}\psi\right\rangle_{q_1,q_2,D_1,G}=\iint\limits_{\omega_2}\mu_{q_1+q_2}(z)\psi(z)f_1(z)\Bigg(\sum_{A\in G}\rho_0(A)\iint\limits_{\omega_1}\frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)}{f_1(\zeta)}$$
$$\times\frac{\varphi(\zeta)A'(\zeta)^{q_2}}{(z-A\zeta)^{2q_2}}\frac{i}{2}d\zeta\wedge d\bar\zeta\Bigg)\frac{i}{2}dz\wedge d\bar z=\iint\limits_{\omega_2}\mu_{q_1+q_2}(z)\psi(z)f_1(z)\Bigg(\sum_{A\in G}\rho_0(A)$$
$$\times\iint\limits_{\omega_1}\frac{\mu_{q_1+q_2}(A\zeta)A'(\zeta)^{1-q_1}\overline{A'(\zeta)}}{f_1(A\zeta)\rho_1(A)^{-1}}\frac{\varphi(A\zeta)A'(\zeta)^{q_1}\rho(A)^{-1}}{(z-A\zeta)^{2q_2}}\frac{i}{2}d\zeta\wedge d\bar\zeta\Bigg)\frac{i}{2}\,dz\wedge d\bar z$$
$$=\iint\limits_{\omega_2}\mu_{q_1+q_2}(z)\psi(z)\Bigg(\iint\limits_{D_1}\frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)\varphi(\zeta)}{(z-\zeta)^{2q_2}}\frac{f_1(z)}{f_1(\zeta)}\frac{i}{2}d\zeta\wedge d\bar\zeta\Bigg)\frac{i}{2}\,dz\wedge d\bar z$$
$$=\iint\limits_{\omega_2}\mu_{q_1+q_2}(z)\psi(z)\big(\mathscr{B}_C^{\mathrm{ord}}\varphi\big)(z)\frac{i}{2}dz\wedge d\bar z=\left\langle\mathscr{B}_C^{\mathrm{ord}}\varphi,\psi\right\rangle_{q_2,q_1,D_2,G}.$$

Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Для характера* $\rho\in\mathrm{Hom}(G,\mathbb{C}^*)$ *модифицированный оператор Берса* $\mathscr{B}_C^{\mathrm{ord}}$ *осуществляет непрерывное вложение* q*-двойственных пространств:* $A^p_{q_1}(D_1,G,\rho)\hookrightarrow A^p_{q_2}(D_2,G,\rho)$, *где* $q=q_1+q_2$, $q_1,q_2\in\mathbb{Z}$, $q_1\ge 2$, $q_2\ge 2$, $p\in\mathbb{R}$, $1\le p<\infty$.

Автор признательна д.ф.-м.н. профессору В. В. Чуешеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bers L.* A non-standard integral equation with applications to quasiconformal mappings // Acta Math. 1966. V. 116. P. 115–134.
2. *Кра И.* Автоморфные формы и клейновы группы. М.: Мир, 1975.
3. *Сергеева О. А.* Банаховы пространства мультипликативных автоморфных форм // Вестн. НГУ. 2005. Т. 5, № 4. С. 45–63.
4. *Крушкаль С. Л.* Квазиконформные отображения и римановы поверхности. Новосибирск: Наука, 1975.
5. *Farkas H. M., Kra I.* Riemann Surfaces. New York; Berlin: Springer-Verl., 1992. (Graduate Texts Math; N 71).
6. *Чуешев В. В.* Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Кемерово: КемГУ, 2003. Ч. 2.
7. *Conway J. B.* Functions of one complex variable. New York; Berlin: Springer-Verl., 1973. (Graduate Texts Math.; 11).

Статья поступила 25 июня 2007 г. окончательный вариант — 10 сентября 2008 г.

Сергеева Ольга Алексеевна
Кемеровский гос. университет, математический факультет,
ул. Красная, 6, Кемерово 650043
`Okoin@yandex.ru`