Сибирский математический журнал
Июль—август, 2009. Том 50, № 4

УДК 512.541

СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ГРУППЫ, ПРОЕКТИВНО ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ ВПОЛНЕ ИНВАРИАНТНЫ

А. Р. Чехлов

Аннотация. Изучаются абелевы группы, в которых все проективно инвариантные подгруппы вполне инвариантны. Описаны сепарабельные и векторные группы с этим свойством.

Ключевые слова: прямое слагаемое, вполне инвариантная подгруппа, проективно инвариантная подгруппа.

Пусть A — абелева группа. Будем использовать следующие обозначения: $H \leq A \iff H$ — подгруппа в A; $H \leq fi\, A$ (или H — fi-подгруппа в A) $\iff H$ — вполне инвариантная подгруппа в A; $H \leq pi\, A$ (или H — pi-подгруппа в A) $\iff$ H — проективно инвариантная подгруппа в A; $E(A)$ — кольцо эндоморфизмов группы A; $p^\omega A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} p^n A$; если $a \in A$, то $h_p(a)$ — p-высота элемента a, а если A — группа без кручения, то $\chi(a)$ — характеристика, $t(a)$ — тип элемента a; $\mathbb{Z}$ — множество всех целых, а $\mathbb{N}$ — всех натуральных чисел. Если G — однородная группа без кручения, то через $t(G)$ обозначается ее тип.

Пусть B и C — группы, X — непустое подмножество в C. Обозначим через $\operatorname{Hom}(C, B)X = \sum\limits_{f \in \operatorname{Hom}(C,\, B)} f(X)$ подгруппу, порожденную всеми гомоморфными образами подмножества X в группе B (*гомоморфная оболочка* подмножества X в группе B). Термин «гомоморфная оболочка» предложен в [1]. Всегда $\operatorname{Hom}(C, B)X \leq fi\, B$.

Прямое произведение групп без кручения ранга 1 называется *векторной* группой.

Подгруппа $H \leq A$ называется *вполне инвариантной* (*вполне характеристической*), если $fH \subseteq H$ для каждого эндоморфизма f группы A. *Проекцией* группы называется всякий ее идемпотентный эндоморфизм. Подгруппа $H \leq A$ называется *проективно инвариантной*, если $\pi H \subseteq H$ для каждой проекции π группы A. В неразложимой группе каждая подгруппа является pi-подгруппой. Всякая неразложимая редуцированная группа является либо циклической p-группой (в такой группе все подгруппы вполне инвариантны), либо неразложимой группой без кручения (в такой группе каждая подгруппа вполне инвариантна тогда и только тогда, когда кольцо эндоморфизмов группы изоморфно кольцу целых чисел).

В [2] доказано, что в периодических сепарабельных группах все pi-подгруппы вполне инвариантны.

Приведем следующий полезный результат.

Лемма 1 [3, лемма 9.5]. *Пусть $A = B \oplus C$ — прямое разложение с проекциями π, θ. Если разложению $A = B \oplus C_1$ соответствуют проекции π_1, θ_1, то $\pi_1 = \pi + \pi\varphi\theta$, $\theta_1 = \theta - \pi\varphi\theta$ для некоторого эндоморфизма φ группы A. Обратно, для всяких эндоморфизмов π_1, θ_1 приведенного выше вида имеет место разложение $A = B \oplus \theta_1 A$.*

Лемма 2. 1. *Пусть π, ρ — проекции группы A, причем $\pi A \leq pi\, A$. Тогда $(1-\pi)\rho(1-\pi)$ также является проекцией группы A.*

2. *Пусть H — pi-подгруппа группы $A = B \oplus C$. Тогда $H \cap B \leq pi\, B, H \cap C \leq pi\, C$ и $\mathrm{Hom}(C, B)(H \cap C) \subseteq H \cap B$, $\mathrm{Hom}(B, C)(H \cap B) \subseteq H \cap C$.*

3. *Пусть $A = B \oplus C$, $B \leq fi\, A$, $B_1 \leq B$, $C_1 \leq C$ и $H = B_1 \oplus C_1$. Тогда $H \leq pi\, A \iff B_1 \leq pi\, B$, $C_1 \leq pi\, C$ и $\mathrm{Hom}(C, B)C_1 \subseteq B_1$.*

4. *Пусть H — pi-подгруппа группы $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где $|I| \geqslant 2$. Тогда $H \cap A_i \leq pi\, A_i$ и $\mathrm{Hom}(A_i, A_j)(H \cap A_i) \subseteq H \cap A_j$ для каждого $j \neq i$ $(i, j \in I)$.*

Доказательство. 1. Обозначим $\theta = 1 - \pi$. Имеем $\theta\rho\theta = \theta\rho(\pi + \theta)\rho\theta = \theta\rho\pi\rho\theta + \theta\rho\theta\rho\theta$. Поскольку $\theta\rho\pi = 0$, то $\theta\rho\theta = \theta\rho\theta\rho\theta = (\theta\rho\theta)^2$.

2. Если $\varphi \in \mathrm{Hom}(C, B)$, то по лемме 1 $A = B \oplus C_1$, где $C_1 = \theta_1 A$ и $\theta_1 = \theta - \pi\varphi\theta$. Для $x \in H \cap C$ имеем $\theta_1(x) = x - \varphi(x) \in H$, откуда $\varphi(x) \in H$.

3. Необходимость вытекает из п. 2. Докажем достаточность. Пусть π, θ — проекции, соответствующие разложению $A = B \oplus C$, ρ — проекция группы A. Так как $\rho(B) \subseteq B$, то $(\rho|B)^2 = \rho|B$, тем самым $\rho(B_1) \subseteq B_1$. Если теперь $x \in C_1$, то $\rho(x) = (\pi+\theta)\rho(\pi+\theta)(x) = (\pi\rho\pi)(x) + (\pi\rho\theta)(x) + (\theta\rho\pi)(x) + (\theta\rho\theta)(x) = (\pi\rho\theta)(x) + (\theta\rho\theta)(x)$. Здесь $\pi\rho\theta \in \mathrm{Hom}(C, B)$. Поэтому $(\pi\rho\theta)(x) \in B_1$, а $(\theta\rho\theta)(x) \in C_1$ по п. 1. П. 4 вытекает из п. 2.

Из леммы 2 непосредственно следует, что каждое проективно инвариантное прямое слагаемое вполне инвариантно [3, § 9, упражнение 4].

Лемма 3. *Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ — фиксированное разложение группы A, $\pi_i\colon A \to A_i$ — соответствующие проекции, $B_i \leq A_i$ и $H = \bigoplus_{i \in I} B_i$. Тогда*

1) *если $A_i \leq fi\, A$ для всякого $i \in I$, то $H \leq pi\, A \iff B_i \leq pi\, A_i$ для всех $i \in I$; в частности, подгруппа B периодической группы T является pi-подгруппой $\iff$ каждая ее p-компонента $B_p \leq pi\, T_p$;*

2) *если $\mathrm{Hom}(A_j, A_i)B_j \subseteq B_i$ для всех $i, j \in I$ $(i \neq j)$, то $H \leq pi\, A \iff \pi_i\rho(B_i) \subseteq B_i$ для каждой проекции ρ группы A.*

Доказательство. П. 1 вытекает из п. 3 леммы 2. Необходимость п. 2 очевидна. Докажем достаточность. Пусть $a \in B_i$, $G_i = \bigoplus_{j \in I \setminus \{i\}} A_j$. Тогда $\rho(a) = b + c$, где $b \in A_i$, а $c \in \mathrm{Hom}(A_i, G_i)B_i \subseteq \bigoplus_{j \in I \setminus \{i\}} B_j \subseteq H$. Согласно условию $b = \pi_i(\rho(a)) \in B_i \subseteq H$. Поэтому $\rho(a) \in H$.

Лемма 4. *Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ — фиксированное разложение группы A и $H \leq pi\, A$. Тогда*

1) *$H \leq fi\, A \iff H \cap A_i \leq fi\, A_i$ для всех $i \in I$;*

2) *если $G_i = \bigoplus_{j \in I \setminus \{i\}} A_j$, а $B_i = \mathrm{Hom}(G_i, A_i)(H \cap G_i)$, то $B_i \subseteq H \cap A_i$ и $\bigoplus_{i \in I} B_i \leq fi\, A$, в частности, если $B_i = H \cap A_i$ для каждого $i \in I$, то $H \leq fi\, A$;*

3) *если в каждой* A_i *все* pi-*подгруппы являются* fi-*подгруппами, то этим свойством обладает и сама группа* A.

Доказательство. П. 1 вытекает из п. 4 леммы 2. Докажем п. 2. Пусть $x \in B_i$ и π, θ — проекции группы A, соответствующие разложению $A = A_i \oplus G_i$. Тогда если $\varphi \in E(A)$, то $\varphi = (\pi + \theta)\varphi(\pi + \theta) = \pi\varphi\pi + \theta\varphi\pi + \pi\varphi\theta + \theta\varphi\theta$. Отсюда $\varphi(x) = (\pi\varphi\pi)(x) + (\theta\varphi\pi)(x)$. Здесь $\pi\varphi\pi$ — эндоморфизм группы A_i и $(\pi\varphi\pi)(x) \in B_i \subseteq H$ в силу вполне инвариантности подгруппы B_i в A_i, а $(\theta\varphi\pi)(x) \in \operatorname{Hom}(A_i, G_i)B_i \subseteq \bigoplus\limits_{j \in I\setminus\{i\}} B_j \subseteq H$.

3. Если $a \in H \cap A_i$, то в обозначениях п. 2 $\varphi(a) = (\pi\varphi\pi)(a) + (\theta\varphi\pi)(a)$. Здесь $\pi\varphi\pi$ — эндоморфизм группы A_i и по условию $(\pi\varphi\pi)(a) \in H \cap A_i$, поскольку $H \cap A_i \le pi\, A_i$, а $(\theta\varphi\pi)(a) \in H \cap G_i$ по лемме 2.

Лемма 5. *Пусть*

1) $A = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$, *где* $|I| \geqslant 2$ *и каждая группа* A_i *изоморфна некоторому прямому слагаемому в* $G_i = \bigoplus\limits_{j \in I\setminus\{i\}} A_j$;

2) $B = \prod\limits_{i \in I} B_i$, *где* $|I| \geqslant 2$ *и семейство* $\{B_i \mid i \in I\}$ *можно разбить на непересекающиеся пары* $\{B_i, B_j\}$ $(j \ne i)$, *в которых каждая группа изоморфна некоторому прямому слагаемому другой.*

Тогда все pi-*подгруппы в группах* A *и* B *являются* fi-*подгруппами.*

Доказательство. Если $A = \oplus A_i$ и $0 \ne H \le pi\, A$, то $H = \oplus(H \cap A_i)$. Если $f \in E(A_i)$, то в силу условия на группы A_i для $x \in H \cap A_i$ найдутся $y \in G_i$ и $\psi \in \operatorname{Hom}(G_i, A_i)$, $\varphi \in \operatorname{Hom}(A_i, G_i)$ со свойствами $\psi(y) = f(x)$ и $\varphi(x) = y$. В силу той же леммы 2 (п. 2) $y \in H \cap G_i$ и $f(x) \in H \cap A_i$. Это по лемме 4 (п. 1) влечет, что $H \le fi\, A$. Справедливость леммы для прямого произведения есть следствие соответствующего утверждения для прямой суммы, так как если I бесконечно, то $\prod B_i$ в силу условия на группы B_i можно представить в виде прямой суммы двух групп, каждая из которых изоморфна прямому слагаемому другой.

Лемма 6. 1. *Если* $A = B \oplus C$, *где* $B \le fi\, A$, *то в группе* A *каждая* pi-*подгруппа является* fi-*подгруппой тогда и только тогда, когда этим свойством обладают группы* B *и* C.

2. *Если* $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$, *где* $A_i \oplus \dots \oplus A_n \le fi\, A$ $(i = 2, \dots, n-1)$ *и* $A_n \le fi\, A$, *то в группе* A *каждая* pi-*подгруппа является* fi-*подгруппой тогда и только тогда, когда этим свойством обладают группы* $A_1, \dots, A_n$.

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть $H \le pi\, C$ и $B' = \operatorname{Hom}(C, B)H$. Согласно лемме 2 (п. 3) $H' = B' \oplus H \le piA$. Поэтому если $f \in E(C)$, то, продолжая f до эндоморфизма $\bar{f}$ группы A (считаем, что $\bar{f}|B = 0$), получаем $\bar{f}(H') = f(H) \subseteq H$. Для подгруппы B утверждение леммы очевидно. Достаточность следует из леммы 4 (п. 3).

П. 2 вытекает из п. 1.

Предложение 1. *В делимой группе* $D = D_0 \oplus t(D)$, *где* $t(D)$ — *периодическая часть группы* D, *каждая* pi-*подгруппа является* fi-*подгруппой тогда и только тогда, когда* $D_0 = 0$ *или группа* D_0 *разложима.*

Доказательство вытекает из леммы 6 и из того, что в периодической делимой группе каждая pi-подгруппа является fi-подгруппой, а в разложимой делимой группе без кручения ненулевая pi-подгруппа совпадает с самой группой (учесть лемму 5).

Напомним, что fi-подгруппа G p-группы A называется *широкой* [3, § 67], если $G + B = A$ для каждой базисной подгруппы B группы A. Покажем, что всякая pi-подгруппа G редуцированной p-группы A с аналогичным свойством является fi-подгруппой. Ясно, что достаточно рассмотреть случай, когда A не сепарабельна. В начале заметим, что $p^\omega A \subseteq G$. Воспользуемся доказательством п. д) из [3, § 67]. Пусть $a = b+g \in p^\omega A$, где $b \in B$, $g \in G$ ($p^\omega A = A^1 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} nA$ для p-группы A). Вложим b в конечное прямое слагаемое B' группы B и запишем $A = B' \oplus A'$. Если $\pi\colon A \to A'$ — проекция, то $\pi a = \pi g \in G$. Но $(1-\pi)a = 0$ как элемент бесконечной высоты в B'. Следовательно, $a = \pi g \in G$. Пусть теперь $r_n = \min\limits_{g\in G} h(p^n g)$, где $h(a)$ — высота элемента a. Поскольку $A^1 \subseteq p^n A$ и A — редуцированная группа, то все r_n — целые числа. Имеем $G \subseteq A(r_0, r_1, \dots, r_n, \dots)$, где $A(r_0, r_1, \dots, r_n, \dots) = \{a \in A \mid H(a) \geqslant (r_0, r_1, \dots, r_n, \dots)\}$, а $H(a)$ — индикатор элемента a. Теперь достаточно показать, что $G = A(r_0, r_1, \dots, r_n, \dots)$ [3, теорема 67.2]. Пусть $a \in A(r_0, r_1, \dots, r_n, \dots)$ и $H(a) = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_n = \infty)$, где, как в теореме 67.2 из [3], можно считать, что $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ — неотрицательные целые числа. В теореме 67.2 из [3] показано, что найдется элемент $g \in G$ со свойством $H(g) = (r_0, r_1, \dots, r_n, \infty)$. Вложим g в некоторое конечное прямое слагаемое C группы A [3, лемма 65.4]. Имеем $A = C \oplus N$. Если $a = c + y$, где $c \in C$, $y \in N$, то $H(a) = H(c) \cap H(y)$. В частности, $H(a) \leq H(y)$. Поэтому существует $\varphi \in E(A)$ со свойством $\varphi(g) = y$ [3, лемма 65.5, упражнение 6, п. б)]. Согласно лемме 2 $y \in G \cap N$. Поскольку C — сепарабельная группа, то $G \cap C \leq fi\, C$. Поэтому если $f(g) = c$ для некоторого $f \in E(C)$, то $f(g) = c \in G \cap C$. Итак, $a \in G$.

Напомним, что для порядкового числа σ подгруппа $p^\sigma A$ определяется следующим образом: $p^0 A = A$, $p^{\sigma+1} A = p(p^\sigma A)$ и $p^\sigma A = \bigcap\limits_{\beta<\sigma} p^\beta A$, если σ — предельное число. Наименьшее порядковое число τ, для которого $p^{\tau+1} A = p^\tau A$, называется *p-длиной* группы A; $p^\tau A$ в этом случае является максимальной p-делимой подгруппой в A.

Если A — p-группа и a — ее элемент порядка p^k, то число k называется *экспонентой* $e(a)$ элемента a.

Лемма 7. *Пусть A — неограниченная p-группа. Тогда*

1) *если $0 \neq H \leq pi\, A$, то $H \cap (p^n A[p]) \neq 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$;*

2) *если, кроме того, группа A вполне транзитивна, $0 \neq G \leq fi\, A$, то $G \cap (p^\sigma A[p]) \neq 0$ для каждого порядкового числа σ со свойством $p^\sigma A \neq 0$.*

Доказательство. 1. Пусть D — делимая часть группы A. Тогда если $A = C \oplus D$, то $H = (H \cap C) \oplus (H \cap D)$. В силу инъективности группы D для любых $0 \neq c \in (H \cap C)[p]$ и $0 \neq d \in D[p]$ отображение $b \to d$ продолжается до гомоморфизма $C \to D$. Согласно лемме 2 (п. 3) $d \in H \cap (D[p])$. Осталось заметить, что $D \subseteq p^n A$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Пусть теперь группа A редуцированная. Допустим, что $\langle a \rangle \cap H \neq 0$ для некоторого циклического прямого слагаемого $\langle a \rangle$ группы A. Тогда для всякого элемента c экспоненты $e(c) = n + 1 \geqslant k = e(a)$, принадлежащего дополнительному прямому слагаемому C, отображение $a \to p^{n+1-k} c$ продолжается до гомоморфизма $\langle a \rangle \to C$. Отсюда следует, что $H \cap (p^n C[p]) \neq 0$.

Допустим, что H имеет нулевое пересечение со всяким циклическим прямым слагаемым группы A. Тогда $H \cap B = 0$ для каждой базисной подгруппы B

группы A. Запишем B в виде $B = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, где B_n равно 0 или является прямой суммой циклических групп одного и того же порядка p^n. Для каждого n имеет место прямое разложение $A = B_1 \oplus \dots \oplus B_n \oplus A_n$, где $A_n = \left(\bigoplus\limits_{i=n+1}^{\infty} B_i\right) + p^n A$. В силу предположения $H \subseteq A_n$. Хорошо известно, что $p^n A$, значит, и $p^n A[p]$ — существенные подгруппы в A_n [3, § 32, упражнение 9]. Отсюда $H \cap (p^n A[p]) \neq 0$.

2. Следует из того, что если $g \in G[p]$, то для любого $a \in A[p]$ с индикатором $H(a) \geqslant H(g)$ существует $\varphi \in E(A)$ со свойством $\varphi(g) = a$.

Из леммы 7 вытекает, что в неограниченной редуцированной вполне транзитивной p-группе, p-длина которой является предельным порядковым числом σ, нет минимальных fi-подгрупп. Действительно, если H — минимальная fi-подгруппа, то $H = H \cap (p^\beta A[p])$ для каждого порядкового числа $\beta < \sigma$, откуда

$$H = \bigcap_{\beta<\sigma} (H \cap (p^\beta A[p])) \subseteq \bigcap_{\beta<\sigma} p^\beta A[p] = 0.$$

В частности, в неограниченной редуцированной сепарабельной p-группе нет минимальных fi-подгрупп. Если же p-длина редуцированной вполне транзитивной p-группы равна $\sigma + 1$, то $p^\sigma A$ будет минимальной fi-подгруппой (а если подгруппа $p^\sigma A$ неразложима, то она будет минимальной fi-подгруппой и без условия вполне транзитивности группы A). Если же p-группа нередуцированная и D — ее делимая часть, то $D[p]$ — минимальная fi-подгруппа.

Покажем, что если A — неограниченная редуцированная p-группа, то у нее нет максимальных pi-подгрупп (воспользуемся идеей доказательства А. П. Дика соответствующего утверждения для fi-подгрупп). Действительно, если H — максимальная pi-подгруппа, $y \in A \setminus H$, $e(y) = k$, то $H + A[p^k] = A$, где $A[p^k] = \{a \in A \mid p^k a = 0\}$. Пусть теперь $\langle x \rangle$ — прямое слагаемое группы A такое, что $e(x) = m > k$. Тогда $x = h + a$ для некоторых $h \in H$, $a \in A[p^k]$. Так как $p^k x = p^k h$, то $\langle h \rangle$ — прямое слагаемое группы A, $A = \langle h \rangle \oplus C$. Если $y = h' + c$ для некоторых $h' \in \langle h \rangle$ и $c \in C$, то $p^k y = p^k h' + p^k c = 0$. Поэтому $e(c) \leq k$, значит, $\langle c \rangle$ является гомоморфным образом группы $\langle h \rangle$. По лемме 2 (п. 2) $\langle c \rangle \subseteq H \cap C$ и, следовательно, $y \in H$; противоречие.

Если A — ограниченная p-группа и $p^k A = 0$, где $k \geqslant 2$ и $p^{k-1} A \neq 0$, то $A[p^{k-1}]$ — наибольшая pi-подгруппа. Если же A — нередуцированная p-группа с неограниченной редуцированной частью, то максимальных pi-подгрупп опять нет, если же редуцированная часть ограничена, то наибольшая pi-подгруппа совпадает с суммой делимой части и наибольшей pi-подгруппой ее ограниченной части. В делимой p-группе максимальных pi-подгрупп нет.

Пусть p — простое число. Обозначим через C p-компоненту группы A. В [4, теорема 1.1] описаны fi-подгруппы G группы A со свойством $pA \subseteq G \subseteq C + pA$. В частности, теорема 1.1 из [4] дает описание fi-подгрупп, содержащих pA, произвольной p-группы A, а также группы A с p-делимой фактор-группой A/C. Рассмотрим pi-подгруппы группы A, содержащие pA. Из предложения 2 следует, что периодическая часть всякой такой подгруппы является fi-подгруппой в A.

Предложение 2. *Подгруппа G группы A, содержащая pA, является pi-подгруппой тогда и только тогда, когда G совпадает с одной из следующих подгрупп: pA, $C[p^k] + pA$, $C + pA$, $H + pA$, где $k \in \mathbb{N}$, а H — pi-подгруппа группы A такая, что $C \subset H$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть B — p-базисная подгруппа группы A. Тогда $A = B + pA$. Запишем B в виде $B = B_0 \oplus B'$, где B_0 — свободная группа (или $B_0 = 0$), $B' = \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, а B_i равно 0 или является прямой суммой циклических групп одного и того же порядка p^i. Поскольку каждая B_i для $i \geqslant 1$ — прямое слагаемое в A, а $G \leq pi\, A$, то

$$G \cap B = (G \cap B_0) \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} (G \cap B_i).$$

Допустим, что $G \neq pA$, и пусть $a \in G \backslash pA$. В силу равенства $G = (G \cap B) + pA$ считаем, что $a \in B$. Имеем $a = b_0 + b_{i_1} + \dots + b_{i_n}$, где $b_0 \in B_0$ и $b_{i_s} \in B_{i_s}$ $(s = 1, \dots, n)$. Ввиду включения $pA \subseteq G$ можно считать, что если $b_0 \neq 0$, то $b_0 \notin pB_0$ и аналогично $b_{i_s} \notin pB_{i_s}$. Отсюда $G \cap B_{i_s} \neq pB_{i_s}$ $(s = 1, \dots, n)$. Заметим, что $A = B_1 \oplus \dots \oplus B_m \oplus A_m$ для каждого $m \in \mathbb{N}$, где $A_m = \big(B_0 \oplus \bigoplus\limits_{i \geqslant m+1} B_i\big) + p^m A$. Отсюда в силу леммы 2 (п. 2) следует, что если $G \cap B_k \neq pB_k$ для некоторого $k \geqslant 1$, то $G \cap B_k = B_k$ и $G \cap B_j = B_j$ для каждого $j = 1, \dots, k$. Аналогично если $b_0 \notin pB_0$ (такой элемент найдется, если $G \cap B_0 \neq pB_0$), то $B_1 \oplus \dots \oplus B_m \subseteq G$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Отсюда $B' \subseteq G$ и, значит, $C \subseteq B' + pA \subseteq G$. Таким образом, либо $G \cap B = B_1 \oplus \dots \oplus B_k \oplus p\big(\bigoplus\limits_{i \geqslant k+1} B_i\big) \oplus pB_0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, либо $B' \subseteq G$.

В первом случае

$$G = (G \cap B) + pA = B_1 \oplus \dots \oplus B_k + pA = B_1 \oplus \dots \oplus B_k \oplus pA_k.$$

При доказательстве импликации $2 \Rightarrow 3$ в [4, теорема 1.1] показано, что

$$B_1 \oplus \dots \oplus B_k \oplus pA_k = C[p^k] + pA$$

(учесть равенство $A_k = \big(B_0 \oplus \bigoplus\limits_{i \geqslant k+1} B_i\big) + p^k A$, где порядки элементов из $\bigoplus\limits_{i \geqslant k+1} B_i$ $\geqslant p^{k+1}$, откуда будет следовать включение $C[p^k] = A[p^k] \subseteq B_1 \oplus \dots \oplus B_k \oplus pA_k$).

Во втором случае если $C + pA \subset G$, то пусть H — pi-подгруппа в A, порожденная подгруппами $G \cap B$ и C. Тогда $H + pA = G$.

Достаточность очевидна.

Ранг подгруппы B_0 назовем *p-рангом без кручения* группы A (это инвариант группы A). Если в условиях предложения 1 $G \cap B_0 = B_0$, то $G = A$. Отсюда вытекают

Следствие 1. *Если p-ранг без кручения группы A не больше 1, то всякая ее pi-подгруппа, содержащая pA, вполне инвариантна и совпадает с одной из следующих подгрупп: pA, $C[p^k] + pA$, $C + pA$ или A, где k — некоторое натуральное число.*

Следствие 2. *Пусть A — группа такая, что каждый ее элемент содержится в некотором прямом слагаемом, являющемся прямой суммой групп p-ранга без кручения ≤ 1. Тогда всякая pi-подгруппа H группы A со свойством $pA \subseteq H$ является fi-подгруппой.*

Доказательство. Пусть $a \in H$ и $a \in B = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$, где B — заявленное прямое слагаемое в A, $a = a_1 + \dots + a_n$, $a_j \in A_{i_j}$ $(j = 1, \dots, n)$. Имеем $a_j \in$

$H \cap A_{i_j} \leq pi A_{i_j}$. Поэтому по следствию 1 $f(a_j) \in H \cap A_{i_j}$ для каждого $f \in E(A_{i_j})$. Этого по лемме 4 (п. 1) достаточно, чтобы подгруппа H была вполне инвариантной в A.

Группа A называется *сепарабельной*, если любое конечное подмножество ее элементов можно вложить в прямое слагаемое, являющееся прямой суммой групп ранга 1 (каждая группа ранга 1 изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathbb{Q}$ или подгруппе группы $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для некоторого простого p).

Теорема 1. *Пусть A — сепарабельная группа. Каждая ее pi-подгруппа является fi-подгруппой тогда и только тогда, когда A обладает следующим свойством: если ее прямое слагаемое B, являющееся группой без кручения ранга 1, p-делимо для некоторого простого числа p, то в дополнительном прямом слагаемом имеется прямое слагаемое, изоморфное B.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $pB = B$ и в дополнительном прямом слагаемом C нет прямого слагаемого, изоморфного B. Пусть $V = \operatorname{Hom}(B, C)B$. Тогда $B' = B \oplus V \leq fi\, A$ и $V \leq fi\, A$. Поэтому если $A = F \oplus N$, то $B' = (B' \cap F) \oplus (B' \cap N)$ и $V = (V \cap F) \oplus (V \cap N)$. Так как $B \cong B'/V \cong (B' \cap F)/(V \cap F) \oplus (B' \cap N)/(V \cap N)$, то в правой части одно из слагаемых, скажем первое, равно нулю, т. е. $B' \cap F = V \cap F$. Если теперь $0 \neq b \in B$ и $H = \langle b \rangle \oplus V$, то

$$(V \cap F) \oplus (H \cap N) = (H \cap F) \oplus (H \cap N) = H.$$

Значит, $H \leq pi\, A$. Однако $\langle b \rangle \nleq fi\, B$ и, следовательно, $H \nleq fi\, A$.

Достаточность. Пусть $H \leq pi\, A$, $x \in H$. Так как A сепарабельна, то x принадлежит прямому слагаемому $G_1 \oplus \dots \oplus G_n$, $x = g_1 + \dots + g_n$, где $g_i \in H \cap G_i$, $r(G_i) = 1$, $i = 1, \dots, n$. Согласно лемме 4 (п. 1) достаточно показать, что $f_i(g_i) \in H$ для $f_i \in E(G_i)$. Если G_i — подгруппа группы $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, то в G_i каждая подгруппа вполне инвариантна. Пусть G_i — группа без кручения. Тогда $E(G_i)$ изоморфно подкольцу кольца $\mathbb{Q}$, порожденному такими дробями $1/p$, что $pG_i = G_i$. Если $\{p \mid pG_i = G_i,\ p \text{ — простое число}\} = \varnothing$, то $E(G_i) \cong \mathbb{Z}$ и, следовательно, $f_i(g_i) \in H \cap G_i$. Если же $pG_i = G_i$ для некоторого простого p, то по условию для G_i найдется такая подгруппа $B_i \cong G_i$, что $G_i \oplus B_i$ — прямое слагаемое в A. Пусть $\chi(b_i) = \chi(f_i(g_i))$, где $b_i \in B_i$. По лемме 2 $b_i \in H$ и, значит, $f_i(g_i) \in H$.

Отметим, что если G — узкая группа без кручения, A_i $(i \in I)$ — группы без кручения, причем множество I неизмеримо, то из [3, следствие 94.5] вытекает, что условие $\operatorname{Hom}(A_i, G) = 0$ для каждого $i \in I$ влечет $\operatorname{Hom}\bigl(\prod_{i \in I} A_i, G\bigr) = 0$.

Лемма 8. *Пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$, где I — неизмеримое множество, A_i — неразложимые узкие группы и $A_i \leq fi\, A$. Тогда если B — прямое слагаемое в A, то $B = \prod_{j \in J} A_j$ для некоторого $J \subseteq I$.*

Доказательство. Пусть $A = B \oplus C$. Поскольку $A_i = (A_i \cap B) \oplus (A_i \cap C)$, то в силу неразложимости $A_i \subseteq B$ или $A_i \subseteq C$. Пусть теперь $J = \{j \in I \mid A_j \subseteq B\}$, $B' = \prod_{j \in J} A_j$ и $C' = \prod_{i \in I \setminus J} A_i$. Тогда $A = B' \oplus C'$, причем $B', C' \leq fi\, A$ в силу узкости A_i. Отсюда $B' = (B' \cap B) \oplus (B' \cap C)$. Вновь узкость прямых слагаемых A_i влечет $B' \cap C = 0$. Следовательно, $B' \subseteq B$. Аналогично $C' \subseteq C$. Значит, $B = B'$ и $C = C'$.

Далее потребуется следующая лемма, равносильность условий 2 и 3 которой известна.

Лемма 9. *Для группы A следующие условия эквивалентны:*

1) *произведение любых двух идемпотентов кольца $E(A)$ снова является идемпотентом;*

2) *каждое прямое слагаемое группы A вполне инвариантно;*

3) *все идемпотенты кольца $E(A)$ центральны.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть $A = B \oplus C$ и $\varphi\colon C \to B$ — гомоморфизм. Тогда по лемме 1 $A = B \oplus C'$, где $C' = \gamma A$, $\gamma = \theta - \pi\varphi\theta$, а $\pi\colon A \to B$, $\theta\colon A \to C$ — проекции. Если $\varphi g \neq 0$ для некоторого $g \in C$, то

$$\pi\gamma g = \pi(g - \varphi g) = -\varphi g \neq \pi\gamma(-\varphi g) = 0,$$

т. е. $(\pi\gamma)^2 \neq \pi\gamma$. Следовательно, $\varphi = 0$.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть π — идемпотент, $\pi A = B$ и $A = B \oplus C$. Если $f \in E(A)$, $a \in A$, то $a = b + c$ для некоторых $b \in B$ и $c \in C$. Имеем $f\pi a = fb$, и так как $fb \in B$, а $fc \in C$, то $\pi f a = \pi f(b + c) = \pi f b = fb$, т. е. $f\pi = \pi f$.

Импликация $3 \Rightarrow 1$ очевидна.

Лемма 10. *Пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$, где I — бесконечное неизмеримое множество, A_i — неразложимые узкие группы без кручения и $A_i \leq fi\, A$. Тогда A содержит pi-подгруппу, не являющуюся fi-подгруппой.*

Доказательство. Поскольку A_i — узкие группы, из леммы 8 вытекает, что все прямые слагаемые группы A являются fi-подгруппами. Поэтому, учитывая лемму 6, можно считать, что $|I| = \aleph_0$, т. е. $A = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$. Пусть $0 \neq a_i \in A_i$, $x = (\dots, a_i, \dots)$, $y = (a_1, 2!\, a_2, \dots, n!\, a_n, \dots)$ и $H = \langle \pi x \mid \pi$ — проекция группы $A\rangle$. Из леммы 9 следует, что произведение любых двух идемпотентов кольца $E(A)$ снова является идемпотентом, поэтому $H \leq pi\, A$.

Элемент y является эндоморфным образом x, но $y \notin H$. Действительно, если $y \in H$, то нашелся бы такой набор целых чисел $n_1, \dots, n_k$, что $y = n_1\theta_1 x + \dots + n_k\theta_k x$ ($\theta_1, \dots, \theta_k$ — проекции группы A). Если $\pi_n\colon A \to A_n$ — проекция, то $n!\, a_n = \pi_n y = n_1\pi_n\theta_1 x + \dots + n_k\pi_n\theta_k x$. В зависимости от n будет $\pi_n\theta_s x = 0$ или $\pi_n\theta_s x = a_n$ ($s = 1, \dots, k$). Поэтому $n!\, a_n = n'_1 a_n + \dots + n'_k a_n$, где $n'_s = 0$ или $n'_s = n_s$ для $s = 1, \dots, k$. Имеем $|n'_1 + \dots + n'_k| \leq m = |n'_1| + \dots + |n'_k|$. Тогда для $i > m$ получаем $l = i! - (n'_1 + \dots + n'_k) \neq 0$. Однако $la_i = 0$; противоречие.

Лемма 11. *Пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$, где I — бесконечное неизмеримое множество, A_i — неразложимые узкие группы без кручения, $p^\omega A = 0$ для каждого простого числа p и отношение $i \leq j \iff \mathrm{Hom}(A_i, A_j) \neq 0$ задает на I частичный порядок $\leq$. Тогда если каждая pi-подгруппа группы A является fi-подгруппой, то относительно введенного порядка $\leq$ множество I удовлетворяет условию минимальности. А если из $i \leq j$ следует существование $a \in A_i$ и $f \in \mathrm{Hom}(A_i, A_j)$ со свойствами $f(a) \neq 0$ и $t(f(a)) > t(a)$, то I удовлетворяет условию максимальности.*

Доказательство. 1. Допустим, что в I нашлась цепочка $i_1 > i_2 > \dots$. Пусть $0 \neq a_1 \in A_{i_1}$. Возьмем $a_2 \in p_1^{t_1} A_{i_2}$, где p_1 — простое число $> 2!$, а натуральное t_1 выбрано так, что $a_1 \notin p_1^{t_1} A_{i_1}$. Если элементы $a_1, \dots, a_n$ уже выбраны, то пусть $a_{n+1} \in p_n^{t_n} \dots p_1^{t_1} A_{i_{n+1}}$, где p_n — простое число $> n!$, а натуральное t_n выбрано так, чтобы $a_n \notin p_n^{t_n} A_{i_n}$. Пусть, далее, $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, $y = (a_1, 2!\, a_2, \dots, n!\, a_n, \dots)$ и $H = \langle (\sigma_1 \dots \sigma_n)x \mid \sigma_i$ — проекции группы A, $n \in \mathbb{N}\rangle$.

Ясно, что $H \leq pi\, A$. Допустим, что $y \in H$. Тогда

$$y = n_i \sum_{i=1}^{r} (\sigma_{i1} \dots \sigma_{ik_i})x$$

для некоторых $n_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, \dots, r)$. Если π_n — проекция группы A на A_{i_n}, а $\theta_n = 1 - \pi_n$, то $\pi_n x = a_n$ и

$$\pi_n y = n!\, a_n = n_i \pi_n \sum_{i=1}^{r} \sigma_{i1} \dots \sigma_{ik_i} (\pi_n + \theta_n)x.$$

Пусть $A = A_1 \oplus A_{i_n} \oplus A_2$, где A_1 — прямое произведение всех A_i, у которых $i < i_n$; A_2 — прямое произведение A_j, у которых j не сравним с i_n или $j > i_n$. Тогда $A_{i_n} \oplus A_2$, $A_2 \leq fi\, A$. Поэтому ограничение всякой проекции σ группы A на $A_{i_n} \oplus A_2$ также является проекцией. Следовательно, по лемме 2 (п. 1) $\pi_n \sigma \pi_n$ — проекция группы A_{i_n}. Значит,

$$n_i \pi_n \sum_{i=1}^{r} (\sigma_{i1} \dots \sigma_{ik_i}) a_n = (n'_1 + \dots + n'_r) a_n,$$

где $n'_i = n_i$ или $n'_i = 0$ в зависимости от n. Если $m = |n_1| + \dots + |n_r|$, то пусть $n! > m$ и $q = n! - n'_1 - \dots - n'_r$. Тогда

$$0 \neq q a_n = n_i \pi_n \sum_{i=1}^{r} (\sigma_{i1} \dots \sigma_{ik_i}) \theta_n x.$$

Так как

$$\theta_n x = (a_1, \dots, a_{n-1}, 0, \dots) + (0, \dots, 0, a_{n+1}, \dots)$$

и

$$\pi_n \sum_{i=1}^{r} \sigma_{i1} \dots \sigma_{ik_i} (a_1, \dots, a_{n-1}, 0, \dots) = 0,$$

то

$$q a_n = n_i \pi_n \sum_{i=1}^{r} \sigma_{i1} \dots \sigma_{ik_i} (0, \dots, a_{n+1}, \dots) \in p_n^{t_n} A_{i_n}.$$

Но $q < 2 \cdot n!$ и $p_n > n!$, поэтому $p_n \nmid q$, следовательно, $q a_n \notin p_n^{t_n} A_{i_n}$; противоречие.

2. Допустим, что в I нашлась цепочка $i_1 < i_2 < \dots$. Пусть $0 \neq a_1 \in A_{i_1}$. Поскольку $p^\omega A = 0$ для каждого простого числа p, можно считать, что $h_{p_i}(a_1) > 0$ для бесконечного набора простых чисел p_i. Так как $i_2 > i_1$, найдется такой элемент $0 \neq b_2 \in A_{i_2}$, что $\chi(b_2) > \chi(a_1)$. Если теперь p_2 — простое число > 2 и $h_{p_2}(b_2) = k_2$, то в качестве a_2 возьмем элемент с условием $p_2^{k_2} a_2 = b_2$. Если элементы $a_1, \dots, a_{n-1}$ уже выбраны, то возьмем $a_n \in A_{i_n}$ со свойством $0 = h_{p_n}(a_n) < h_{p_n}(a_{n-1})$, где p_n — простое число $> n!$, но $h_p(a_n) > h_p(a_{n-1})$ для каждого простого числа $p \neq p_n$ с условием $h_p(a_n) > 0$. Пусть, далее, $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, $y = (a_1, 2!\, a_2, \dots, n!\, a_n, \dots)$ и $H = \langle (\sigma_1 \dots \sigma_n)x \mid \sigma_i$ — проекции группы A, $n \in \mathbb{N} \rangle$. Если $y \in H$, то

$$y = n_i \sum_{i=1}^{r} (\sigma_{i1} \dots \sigma_{ik_i})x$$

для некоторых $n_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, \ldots, r)$. Пусть π_n — проекция группы A на A_{i_n}, а $\theta_n = 1 - \pi_n$. Тогда $\pi_n x = a_n$ и

$$\pi_n y = n!\, a_n = n_i \pi_n \sum_{i=1}^{r} \sigma_{i1} \ldots \sigma_{ik_i} (\pi_n + \theta_n) x.$$

Так же, как в п. 1,

$$n_i \pi_n \sum_{i=1}^{r} (\sigma_{i1} \ldots \sigma_{ik_i}) a_n = (n'_1 + \cdots + n'_r) a_n,$$

где $n'_i = n_i$ или $n'_i = 0$ в зависимости от n. Если $m = |n_1| + \cdots + |n_r|$, то пусть $n! > m$ и $q = n! - n'_1 - \cdots - n'_r$. Тогда

$$0 \neq q a_n = n_i \pi_n \sum_{i=1}^{r} (\sigma_{i1} \ldots \sigma_{ik_i}) \theta_n x.$$

Так как

$$\theta_n x = (a_1, \ldots, a_{n-1}, 0, \ldots) + (0, \ldots, 0, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$$

и

$$\pi_n \sum_{i=1}^{r} (\sigma_{i1} \ldots \sigma_{ik_i})(0, \ldots, 0, a_{n+1}, \ldots) = 0,$$

то

$$q a_n = n_i \pi_n \sum_{i=1}^{r} (\sigma_{i1} \ldots \sigma_{ik_i})(a_1, \ldots, a_{n-1}, 0, \ldots) \in p_n A_{i_n}.$$

Но $q < 2 \cdot n!$ и $p_n > n!$, поэтому $p_n \nmid q$, следовательно, $q a_n \notin p_n A_{i_n}$; противоречие.

Отметим, что леммы 10 и 11 можно использовать для изучения векторных групп. Действительно, условие, что множество I для векторной группы $A = \prod_{i \in I} A_i$ (A_i — группы ранга 1) частично упорядочено относительно отношения $i \leq j \iff \mathrm{Hom}(A_i, A_j) \neq 0$, эквивалентно условию попарной неизоморфности групп A_i $(i \in I)$. Мощность множества неизоморфных групп без кручения ранга 1 не превосходит мощности континуума, и всякая редуцированная группа без кручения ранга 1 является узкой.

Лемма 12. *Если $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ и отношение $i \leq j \iff \mathrm{Hom}(A_i, A_j) \neq 0$ задает на I частичный порядок $\leq$, то в группе A каждая pi-подгруппа является fi-подгруппой тогда и только тогда, когда этим свойством обладают группы A_i $(i \in I)$.*

Доказательство. Пусть $A = \bigoplus_{j \in J} A_j \oplus A_i \oplus \big(\bigoplus_{k \in K} A_k\big)$, где $J = \{j \in I \mid j < i\}$, а $K = I \setminus (J \cup \{i\})$. Тогда

$$A_i \oplus \bigoplus_{k \in K} A_k \leq fi A \quad \text{и} \quad \bigoplus_{k \in K} A_k \leq fi\, A.$$

Поэтому необходимость вытекает из леммы 6 (п. 1). Достаточность следует из леммы 4 (п. 3).

Для удобства ссылок приведем следующие леммы.

Лемма 13 [3, лемма 96.1]. *Если существует нетривиальный гомоморфизм векторной группы $A = \prod_{i\in I} A_i$ в векторную группу $B = \prod_{j\in J} B_j$ (A_i, B_j — группы ранга 1), то $t(A_i) \le t(B_j)$ для некоторых $i \in I$ и $j \in J$.*

Лемма 14 [3, предложение 96.2]. *Произвольное прямое слагаемое ранга 1 векторной группы $A = \prod A_i$ (A_i — группы ранга 1) изоморфно одной из групп A_i.*

Теорема 2. *В редуцированной векторной группе $A = \prod_{i\in I} A_i$, где A_i — группы ранга 1, каждая pi-подгруппа является fi-подгруппой тогда и только тогда, когда группа A представима в виде прямой суммы $A = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4$ векторных групп G_1, G_2, G_3, G_4, где $G_1 \cong G_2$, G_3 изоморфна некоторому прямому слагаемому в G_2, прямые слагаемые ранга 1 групп $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$ и G_4 не изоморфны, ранг группы G_4 конечен и $p^\omega G_4 = 0$ для каждого простого числа p.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $i \in I$ и $J_i = \{j \in I \setminus \{i\} \mid A_j \cong A_i\}$. Если $|J_i| = 2n + 1$, то к G_1 и G_2 отнесем соответственно по $n + 1$ групп A_j ($j \in J_i \cup \{i\}$); если $|J_i| = 2n \geqslant 2$, то к G_1 и G_2 отнесем соответственно по n групп A_j ($j \in J_i$), а к G_3 — группу A_i; если же J_i бесконечно, то к G_1 и G_2 отнесем соответственно по равномощному множеству групп A_j ($j \in J_i \cup \{i\}$). Тогда $G_1 \cong G_2$, а группа G_3 изоморфна некоторому прямому слагаемому в G_2. Произведение групп A_i, не вошедших в G_1, G_2 и G_3, обозначим через G_4. Ясно, что прямые слагаемые ранга 1 групп $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$ и G_4 не изоморфны (лемма 14).

Покажем, что в G_4 нет бесконечного подмножества групп A_i несравнимых типов. Допустим противное, и пусть $B = \prod_{i=1}^{\infty} A_{j_i}$, где $t(A_{j_i})$ не сравним с $t(A_{j_k})$ при $j_i \ne j_k$ ($i, k = 1, 2, \dots$). Тогда $t(A_k) \ne t(A_s)$ для любых $k \in I \setminus \{j_i\}_{i=1}^\infty$ и $s \in \{j_i\}_{i=1}^\infty$. Пусть V — прямое произведение всех таких групп A_l ($l \in I$), что $t(A_l) < t(A_s)$ хотя бы для одного $s \in \{j_i\}_{i=1}^\infty$, а U — прямое произведение A_j ($j \in I$), не вошедших в V и B. Тогда $A = V \oplus B \oplus U$. Из леммы 13 следует, что $B \oplus U \le fi\, A$ и $U \le fi\, A$. Поэтому по лемме 6 в B каждая pi-подгруппа является fi-подгруппой, но это противоречит лемме 10. Согласно замечанию после леммы 11 частично упорядоченное множество типов прямых слагаемых ранга 1 группы G_4 удовлетворяет условию максимальности и условию минимальности, и по доказанному это множество не содержит бесконечных подмножеств несравнимых элементов, поэтому оно должно быть конечным. Из теоремы 1 следует, что G_4 не содержит ненулевых p-делимых элементов для каждого простого числа p, т. е. $p^\omega G_4 = 0$.

Достаточность. Каждую из групп G_i ($i = 1, 2, 3$) разобьем на два слагаемых: $G_i = G_i^{(1)} \oplus G_i^{(2)}$, пусть $G_i^{(2)}$ состоит из прямого произведения групп A_i ранга 1 таких, что тип группы A_i больше хотя бы одного типа прямого слагаемого ранга 1 группы G_4, $G_i^{(1)}$ — прямое произведение оставшихся групп A_j. Тогда

$$A = G_1^{(1)} \oplus G_2^{(1)} \oplus G_3^{(1)} \oplus G_4 \oplus G_1^{(2)} \oplus G_2^{(2)} \oplus G_3^{(2)},$$

где $G_1^{(j)} \cong G_2^{(j)}$, а группа $G_3^{(j)}$ изоморфна некоторому прямому слагаемому группы $G_2^{(j)}$ ($j = 1, 2$). Из леммы 13 следует, что $G_4 \oplus G_1^{(2)} \oplus G_2^{(2)} \oplus G_3^{(2)}$ и

$G_1^{(2)} \oplus G_2^{(2)} \oplus G_3^{(2)}$ являются fi-подгруппами группы A, поэтому ссылка на лемму 6 завершает доказательство.

Отметим, что в [5] доказаны некоторые другие факты о pi-подгруппах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гриншпон С. Я.* О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1981. С. 56–92.
2. *Megibben C.* Projective-invariant subgroups of Abelian groups // Tamkang J. Math. 1977. V. 8, № 2. P. 177–182.
3. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир. Т. 1. 1974; Т. 2. 1977.
4. *Еремина М. В., Крылов П. А.* Тензорное произведение абелевых групп как нетеров модуль над кольцом эндоморфизмов // Изв. вузов. Математика. 2001, № 4. С. 16–23.
5. *Чехлов А. Р.* Свойства подгрупп абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. 2008. № 1. С. 76–82.

Статья поступила 24 июля 2008 г.

Чехлов Андрей Ростиславович
Томский гос. университет, механико-математический факультет, кафедра алгебры,
пр. Ленина, 36, Томск 634050
cheklov@math.tsu.ru