

УДК 514.17

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ
КЛАССА k -ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ
В. П. Голубятников, В. Ю. Ровенский

Аннотация. Изучаются взаимосвязи некоторых классов тел в евклидовых пространствах. Вводятся и изучаются понятия круговых проекций в нормированных линейных пространствах и классы тел, связанных с семействами таких проекций. Изучение таких тел из более широких классов, чем классы k -выпуклых и k -обозримых тел, позволяет обобщить некоторые классические результаты геометрической томографии и найти их новые приложения.

Ключевые слова: k -выпуклое тело, k -обозримое тело, опорный шар, круговая проекция, видимая оболочка, геометрическая томография.

Юрию Григорьевичу Решетняку к 80-летию

Введение

Как обычно, *выпуклым телом* в евклидовом (вещественном, комплексном или в кватернионном) пространстве \mathbb{E}^n будем называть компактное выпуклое множество K с непустой внутренностью $\text{int}(K)$, замыкание которого совпадает с самим телом — $\text{cl}(\text{int}(K)) = K$. Классические проблемы геометрической томографии связаны с реконструкцией тел $K \subset \mathbb{E}^n$ по проекционным данным, т. е. по информации об их ортогональных проекциях на $(n - k)$ -мерные плоскости из некоторого семейства \mathcal{P}_k таких плоскостей.

Выпуклые тела характеризуются тем, что их можно представлять в виде пересечения семейств полупространств. Аксиоматический подход к изучению понятия выпуклости состоит обычно в том, что в пространстве X выбирается семейство подпространств \mathcal{B} , называемых *базой выпуклости*. Множество $A \subset X$ называется *\mathcal{B} -выпуклым*, если оно представимо в виде пересечения некоторого набора множеств из \mathcal{B} .

С целью изучения поведения геодезических линий Ю. Г. Решетняк [1] рассматривал класс объектов, более широкий, чем класс выпуклых поверхностей, — δ -прикасаемые поверхности.

В работе [2] введено понятие *множеств с положительной достижимостью*, которое использовалось при изучении гладкости функций, описывающих множества, близкие к чебышевским. Подробный обзор этого направления, связанного также с интегральной геометрией, с формулами объемов трубок и т. п., приведен в [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ-8526.2006.1), программы Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (код проекта 2.1.1/3707) и стипендии Марии Складовской-Кюри (грант FP7-PEOPLE-2007-2-1-IEF, N 219696).

Следуя тем же идеям, мы ввели понятие ε -выпуклых тел, обобщающее понятие выпуклого тела, и рассмотрели ряд задач восстановления ε -выпуклых тел по проекционным данным специального вида (см. [4]). Вместо опорных полупространств мы использовали дополнения к шарам и к цилиндрам и ввели понятие круговой проекции на гиперплоскость с выколотой точкой.

Некоторые результаты, относящиеся к классу выпуклых тел, могут быть перенесены на более широкие классы k -выпуклых и k -обозримых тел (см. [5]), а также на видимые тела, изучение которых начато в [6] (см. также [7]). Определение k -выпуклого подмножества в \mathbb{R}^n введено в [8]. Для доказательств устойчивости решения задач геометрической томографии одним из авторов было введено понятие α -топорного тела K , для которого каждая точка $x \notin K$ содержится в некотором двугранном углу величины $\alpha \in (0, \pi]$, не пересекающимся с K (см. [9]). При $\alpha = \pi$ этот класс совпадает с классом выпуклых тел.

В настоящей работе мы расширяем классы k -выпуклых и k -обозримых тел в \mathbb{E}^n и изучаем задачи восстановления тел из этих новых классов по их проекциям на $(n - k)$ -мерные плоскости.

Основными проекционными данными, которые мы здесь рассматриваем, являются семейства \mathcal{P}_k круговых проекций на $(n - k)$ -мерные плоскости с выколотыми точками. С целью расширения сферы применения наших предыдущих результатов [4, 5, 10, 11], следуя общим конструкциям геометрических категорий, описанных в [12], мы изучаем классы \mathcal{C} -выпуклых $\mathcal{H} \mathcal{P}_i^k$, $\mathcal{H}_i^{k,\varepsilon}$ и \mathcal{C} -обозримых тел $\mathcal{V} \mathcal{P}_i^k$, $\mathcal{V}_i^{k,\varepsilon}$ ($i = 1, 2$, $\varepsilon > 0$), более широкие, чем введенные нами в [4] классы ε -выпуклых или ε -обозримых тел.

В определениях этих классов тел при $i = 1$ рассматриваются граничные точки тел и при $i = 2$ — точки, не лежащие в этих телах.

В работе установлены строгие включения между этими классами. Отметим, что классы \mathcal{H}_2^k , $\mathcal{H} \mathcal{P}_2^k$, $\mathcal{H}_2^{k,\varepsilon}$ замкнуты относительно пересечений тел, некоторые результаты для второго класса тел ($i = 2$) могут быть распространены на более широкий первый класс.

Было бы интересно найти такие условия \mathbf{C} , что «если $U, V \subset \mathbb{E}^n$ удовлетворяют условиям \mathbf{C} и их круговые проекции из заданного семейства \mathcal{P}_k совпадают, то $U = V$ ». Намного сложнее более общий

Вопрос. *Каким условиям \mathbf{CT} должны удовлетворять тела $U, V \subset \mathbb{E}^n$ и какими должны быть классы преобразований \mathbf{PT} , \mathbf{ST} и семейства проекций \mathcal{P}_k для того, чтобы имело место утверждение: «если U, V удовлетворяют условиям \mathbf{CT} , а их круговые проекции из семейства \mathcal{P}_k \mathbf{PT} -эквивалентны, то U и V \mathbf{ST} -эквивалентны в объемлющем пространстве»?*

Для случая ортогональных проекций некоторые ответы на такой вопрос получены нами в [5, 10]. Изучение круговых проекций и обозримых тел позволяет расширить некоторые классические результаты теории выпуклых тел, описанные, например, в [5, 13], и найти их новые применения в геометрической томографии.

1. k -Выпуклые тела и видимые оболочки тел

Начиная с этого раздела в качестве объемлющих пространств будем рассматривать в основном вещественные евклидовы пространства \mathbb{E}^n . Пусть $P^k \subset$

\mathbb{E}^n — k -мерная плоскость. Обозначим через

$$B(P^k, r) = \{x \in \mathbb{E}^n : \text{dist}(x, P^k) \leq r\} \quad (1)$$

заполненный цилиндр радиуса $r > 0$ с осью P^k , т. е. прямое произведение \mathbb{E}^k и шара $B^{n-k}(O, r) \subset \mathbb{E}^{n-k}$. При $k = 0$ условие (1) задает шар $B^n(C, r)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $L \subset \mathbb{E}^n$ — тело или k -мерная плоскость. Будем говорить, что L является *опорным* к телу K , если $L \cap \partial K \neq \emptyset$ и L не пересекается с $\text{int } K$. В качестве опорных тел мы рассматриваем обычно шары или цилиндры.

Представим замкнутую полуплоскость P_{\geq}^{k+1} в виде объединения $P_{>}^{k+1} \cup P^k$ открытой полуплоскости и граничной k -мерной плоскости. Полуплоскость P_{\geq}^{k+1} будет называться *опорной* к телу K , если $P^k \cap \partial K \neq \emptyset$ и $P_{>}^{k+1} \cap B(P^k, r)$ не пересекается с $\text{int } K$ при некотором $r > 0$, зависящем только от K . В этом случае, очевидно, плоскость P^k является опорной к K .

В дальнейшем для простоты будем полагать $r = \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Тело $K \subset \mathbb{E}^n$ ($n > 2$) будем называть *k -выпуклым класса* \mathcal{H}_i^k , если

(\mathcal{H}_1^k) любая точка $x \in \partial K$ лежит на границе полуплоскости P_{\geq}^{k+1} опорной к K ;

(\mathcal{H}_2^k) любая точка $x \notin K$ принадлежит границе полуплоскости P_{\geq}^{k+1} , не пересекающейся с K .

Тело $K \subset \mathbb{E}^n$ будет называться *k -обозримым класса* \mathcal{V}_i^k , если

(\mathcal{V}_1^k) любая опорная к K плоскость Q^{k-m} лежит на границе опорной к K полуплоскости P_{\geq}^{k+1} ;

(\mathcal{V}_2^k) любая плоскость Q^{k-m} , не пересекающаяся с K , принадлежит границе полуплоскости P_{\geq}^{k+1} , не пересекающейся с K .

Здесь $0 < m \leq k < n$ и 0 -мерная плоскость — это точка.

Связная компонента границы k -выпуклого (или k -обозримого) тела K называется *k -выпуклой* (или *k -обозримой*) *гиперповерхностью* соответствующего класса из вышеперечисленного списка. Аналогично будем называть и компоненты границ тел, принадлежащих другим рассматриваемым нами классам.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. (а) Π -образное невыпуклое тело в \mathbb{E}^3 принадлежит классу \mathcal{H}_1^k .

(б) Связное тело класса \mathcal{H}_1^{n-1} выпукло.

Утверждение 1. Условия \mathcal{H}_i^k ($i = 1, 2$) означают, что

($i = 1$) для любой точки $x \in \partial K$, $K \in \mathcal{H}_1^k$, существует такая плоскость P^{n-k} , что $f(x)$ является вершиной опорного к $f(K)$ луча. Здесь $f : \mathbb{E}^n \rightarrow P^{n-k}$ — ортогональная проекция.

($i = 2$) для любой точки $x \notin K$, $K \in \mathcal{H}_2^k$, существует такая плоскость P^{n-k} , что ортогональная проекция $f(x)$ на эту плоскость является вершиной луча, не пересекающегося с $f(K)$.

Условия \mathcal{V}_i^k ($i = 1, 2$) означают, что

($i = 1$) для любой опорной к K плоскости Q^{k-m} , $K \in \mathcal{V}_1^k$, существует такая плоскость P^{n-k} , что $Q^{k-m} \subset (P^{n-k})^\perp$ и ортогональная проекция $f(Q^{k-m})$ на P^{n-k} (это точка) является вершиной луча, опорного к $f(K)$.

($i = 2$) для любой не пересекающейся с K плоскости Q^{k-m} , $K \in \mathcal{V}_2^k$, существует такая плоскость P^{n-k} , что $Q^{k-m} \subset (P^{n-k})^\perp$ и ортогональная проекция

$f(Q^{k-m})$ на P^{n-k} (это точка) является вершиной луча, не пересекающегося с $f(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА непосредственно следуют из определений.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Классы k -выпуклых и k -обозримых тел можно определить и для любого непустого семейства ортогональных проекций на $(n-k)$ -мерные плоскости.

Класс \mathcal{V}_2^k замкнут относительно пересечения тел в \mathbb{E}^n при $k=1$ (см. [5]). При $k>1$ это неверно. Нетрудно проверить, что $\mathcal{V}_i^1 = \mathcal{K}_i^1$ ($i=1,2$). Отметим, что утверждение 1 ($i=1$) не выполняется, если заменить определение классов $\mathcal{K}_1^k, \mathcal{V}_1^k$ более слабыми:

(\mathcal{K}_{1-}^k) любая точка $x \in \partial K$ принадлежит опорной к телу K k -мерной плоскости P^k .

(\mathcal{V}_{1-}^k) любая опорная к K плоскость Q^{k-m} содержится в плоскости P^k , которая также является опорной к K .

Аналогичным образом можно определить и классы $\mathcal{K}_{2-}^k, \mathcal{V}_{2-}^k$.

Некоторые результаты данного раздела могут быть установлены и для этих классов тел, соответствующих $i=1-, i=2-$.

ПРИМЕР 1. (а) Объединение черных клеток на шахматной доске и его n -мерные аналоги представляют негомеоморфные шару примеры тел для классов $\mathcal{K}_{1-}^{n-1} \setminus \mathcal{K}_1^{n-1}$ и $\mathcal{V}_{1-}^{n-1} \setminus \mathcal{V}_1^{n-1}$. Соответствующие примеры, гомеоморфные шарам, будут описаны ниже.

(б) Рассмотрим гомеоморфное шару тело K в \mathbb{E}^3 , заключенное между двумя геликоидами M_1 и M_0 , где $M_h : [u \cos v, u \sin v, v+h]$ и $0 \leq v \leq 2\pi, 0 \leq u \leq 1$. Проекция тела K на плоскость xy — единичный диск. Свойство (\mathcal{K}_{1-}^k) для $k=1$ выполняется, но проекция оси z , которая является опорной к телу K , на плоскость xy является внутренней точкой того диска (его центром), поэтому $K \notin \mathcal{K}_1^k$.

Следующее утверждение получено в [5] для более узкого класса тел \mathcal{V}_2^k .

Лемма 1. (а) Связное тело $K \in \mathcal{V}_1^{n-1}$ в \mathbb{E}^n выпукло.

(б) Проекция тела $K \in \mathcal{V}_1^k$ в \mathbb{E}^n на любую гиперплоскость принадлежит классу \mathcal{V}_1^{k-1} . Соответствующая обозримость будет и у его проекций на плоскости меньших размерностей, в частности, проекция тела $K \in \mathcal{V}_1^{n-2}$ в \mathbb{E}^n на любую трехмерную плоскость принадлежит классу \mathcal{V}_1^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. П. (а) леммы следует из того факта, что такое тело лежит по одну сторону относительно каждой своей опорной гиперплоскости.

(б) Пусть $K(\omega)$ — проекция тела K на гиперплоскость $P^{n-1}(\omega)$, перпендикулярную единичному вектору $\omega \in \mathbb{E}^n$, и $y \in \partial K(\omega)$. Все прообразы этой точки при таком проектировании лежат на границе тела K . Пусть $z \in \partial K$ — один из прообразов точки y . Прямая $l(yz) \parallel \omega$ является опорной к K и по определению класса \mathcal{V}_1^k лежит на границе $(k+1)$ -мерной полуплоскости H^{k+1} , опорной к K . Проекция H^{k+1} на $P^{n-1}(\omega)$ будет k -мерной полуплоскостью, опорной к $K(\omega)$. \square

Теорема 1. Имеют место включения $\mathcal{K}_2^k \subset \mathcal{K}_1^k, \mathcal{V}_2^k \subset \mathcal{V}_1^k$ и $\mathcal{V}_i^k \subset \mathcal{K}_i^k$ ($i=1,2$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $\mathcal{K}_2^k \subset \mathcal{K}_1^k$. Пусть $K \in \mathcal{K}_2^k$ и $x_* \in \partial K$. Рассмотрим сходящуюся к x_* последовательность точек $x_i \notin K$. Для каждого i найдется такая k -мерная плоскость P_i^k , что она включает x_i и ограничивает

Рис. 1. Тело K класса $\mathcal{K}_1^k \setminus \mathcal{K}_2^k$, $k = 1$, его «развертка» и модель из 13 кубиков.

некоторое полупространство $P_{\geq, i}^{k+1}$, не пересекающееся с K . Пусть p_i — единичная внутренняя нормаль к P_i^k в $P_{\geq, i}^{k+1}$ в точке x_i . Выбрав подпоследовательность номеров i , можно считать, что $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = p_*$ и найдется такая плоскость $P_*^k = \lim_{i \rightarrow \infty} P_i^k$, содержащая x_* . Тогда P_*^k ограничивает полупространство $P_{\geq, *}^{k+1}$ и единичная нормаль $p_* \perp P_*^k$ направлена внутрь $P_{\geq, *}^{k+1}$. Это предельное полупространство является опорным к K . Действительно, если $P_{\geq, *}^{k+1}$ содержит внутреннюю точку $y_0 \in \text{int } K$, то найдется последовательность точек $z_i \notin K$, сходящаяся к y_0 , что и доказывает требуемое включение.

Остальные включения доказываются аналогичным образом. Их строгость следует из приведенных ниже примеров. \square

ПРИМЕР 2. (а) Построим $K \in \mathcal{K}_1^k \setminus \mathcal{K}_2^k$ при $k = 1, n = 3$. Рассмотрим гомеоморфную кругу фигуру D , состоящую из четырех квадратов с двумя разрезами вдоль отрезков p и q (рис. 1). Изогнем произведение $D \times [-c, c]$ (при малом c) на угол, чуть меньший 90° , вдоль отрезка r и на угол 90° вдоль линий p, q . Получаем тело $K \subset \mathbb{E}^3$, которое окружает с четырех направлений единичный куб. Очевидно, $K \in \mathcal{K}_1^1$, но свойство \mathcal{K}_2^1 не выполняется для точки $C(0, -1/4, 1/4) \notin K$, близкой к передней грани, содержащей отрезок r .

Цилиндр $K' = K \times [-a, a] \subset \mathbb{E}^4$ представляет пример тела $K' \in \mathcal{K}_1^k \setminus \mathcal{K}_2^k$ при $k = 2, n = 4$.

(б) Пример тела $K \in \mathcal{K}_2^k \setminus \mathcal{K}_2^k$ при $k = 2, n = 4$ (т. е. 2-выпуклого тела в \mathbb{E}^4 , которое не является 2-обозримым) приведен в [5].

Следующий несложный результат получен нами на начальной стадии изучения сформулированного во введении вопроса.

Лемма 2 [5]. Пусть $V_1, V_2 \in \mathcal{K}_2^k$ — компактные тела в $\mathbb{E}^n, n > 2, n - k > 1$ (вещественном, комплексном или кватернионном), и группа G состоит либо из всех параллельных переносов, либо из всех гомотетий или тривиальна. Если проекции тел V_1, V_2 на любую $(n - k)$ -мерную плоскость P совмещаются преобразованиями группы G , то тела V_1, V_2 также совмещаются преобразованиями этой группы.

Это утверждение неверно при $n - k = 1$ и нетривиальной группе G , поскольку различные тела одинаковой постоянной ширины имеют изометричные проекции на любую прямую.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть у тела $K \in \mathcal{K}_1^k, k > n/2$, в \mathbb{E}^n граница $M = \partial K$ является C^2 -регулярной гиперповерхностью с единичной внутренней нормалью ξ . По условию любая точка $x \in \partial K$ лежит в плоскости P_x^k , которая не пересекается с $\text{int } K$. Значит, $P_x^k \subset TM_x$, и вторая фундаментальная форма гиперповерхности M неотрицательна на P_x^k , поэтому по крайней мере k собственных

чисел симметричного оператора Вейнгартена A_ξ (т. е. главные кривизны гиперповерхности ∂K) неотрицательны. В этом случае для целочисленных групп гомологий этой поверхности выполняются соотношения $H_{n-1-k+s}(\partial K) = 0$ при $0 < s < 2k - n - 1$ (см. [14, лемма 16; 11, лемма 6(b)]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Определяемая непустым семейством \mathcal{P}_k ортогональных проекций на $(n-k)$ -мерные плоскости *видимая оболочка* $\mathcal{P}_k\langle W \rangle$ множества W в \mathbb{E}^n — это наибольшее множество V , для которого $f(V) \subseteq f(W)$ при всех $f \in \mathcal{P}_k$. Тело $K \subset \mathbb{E}^n$ называется *видимым* относительно \mathcal{P}_k , если $\mathcal{P}_k\langle K \rangle = K$ [6].

Пусть f — ортогональная проекция на подпространство $P \subset \mathbb{E}^n$. Будем обозначать через $\mathcal{R}(f)$ ее образ P . Будем также обозначать через $\overline{\mathcal{P}}_k$ семейство ортогональных проекций на всевозможные $(n-k)$ -мерные плоскости в \mathbb{E}^n .

Утверждение 2 [6]. $\mathcal{P}_k\langle K \rangle = K$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \notin K$ существует такое $f \in \mathcal{P}_k$, что $x + \mathcal{R}(f)^\perp$ не пересекается с K .

Видимые оболочки тел в \mathbb{E}^3 для конечных семейств \mathcal{P}_k изучаются в вычислительной геометрии и в машинном (компьютерном) зрении (см. [7, 15] и т. п.) при восстановлении трехмерных объектов по их двумерным образам (фотографиям, рентгеновским снимкам и др.).

Утверждение 3. $K \in \mathcal{H}_2^k$ тогда и только тогда, когда $\overline{\mathcal{P}}_{n-k}\langle K \rangle = K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Предположим, что $x \in \overline{\mathcal{P}}_{n-k}\langle K \rangle \setminus K$. По определению класса \mathcal{H}_2^k через точку x проходит k -мерная плоскость P^k , не пересекающаяся с K , значит, проекция тела K на $(n-k)$ -мерную плоскость $(P^k)^\perp$ не содержит проекции точки x , поэтому $x \notin \overline{\mathcal{P}}_{n-k}\langle K \rangle$.

2. Доказательство обратного утверждения столь же несложно (см. доказательство утверждения 4). \square

2. Круговые проекции и выпуклость

Расширим классы k -выпуклых тел в \mathbb{E}^n , используя вместо k -мерных плоскостей k -мерные сферы радиуса $1/\varepsilon$ при некотором фиксированном $\varepsilon > 0$ и круговые проекции вместо обычных ортогональных проекций.

2.1. Круговые проекции. $(n-k)$ -Мерная плоскость $P(C)$, содержащая точку $C \in \mathbb{E}^n$, будет называться $(n-k)$ -мерной плоскостью с выколотой точкой. Обозначим через $P^\perp(C)$ k -мерную плоскость с выколотой точкой C , ортогональную к $P(C)$. Пусть $S^{n-1}(C, r)$ — сфера радиуса $r > 0$ с центром в C и $S^{n-k-1}(P(C), r) = S^{n-1}(C, r) \cap P(C)$ — сфера того же радиуса с тем же центром. Такие сферы будем называть *большими*. Для каждой точки $x \notin P^\perp(C)$ обозначим через $S^\perp(P(C), x)$ проходящую через x большую k -мерную сферу в сфере $S^{n-1}(C, |Cx|)$, ортогональную к большой сфере $S^{n-k-1}(P(C), |Cx|)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $P(C)$ — $(n-k)$ -мерная плоскость с выколотой точкой. Определим *круговую проекцию* $f_{P(C)} : \mathbb{E}^n \setminus P^\perp(C) \rightarrow P(C) \setminus C$ следующим образом: для каждой точки $x \notin P^\perp(C)$ пусть $f_{P(C)}(x)$ — ближайшая к x точка сферы $S^{n-k-1}(P(C), |Cx|) \subset P(C)$.

Круговую проекцию можно описать явно с помощью формулы. Пусть $C = O$, $\omega = \text{pr}_{P^\perp(C)}(x) / \|\text{pr}_{P^\perp(C)}(x)\|$ и $x \notin P^\perp(O)$. Тогда

$$f_{P(O)}(x) = \frac{\|x\|}{\sqrt{x^2 - (\omega, x)^2}} [x - (\omega, x)\omega]. \quad (2)$$

Круговая проекция шара может оказаться невыпуклым телом (см. [4]).

Круговая проекция на прямую с выколотой точкой имеет «более простую природу», чем ее многомерные аналоги, поскольку круговые проекции на разные прямые, содержащие точку C , в понятном смысле подобны. В связи с этим можно также определить положительную круговую проекцию $|f_C| : E^n \rightarrow \mathbb{R}_+^1$, полагая $|f_C|(x) := |Cx|$.

В вещественном евклидовом пространстве \mathbb{E}^n точки $f_{P(C)}(x)$ и x лежат в одном полупространстве относительно гиперплоскости $P^\perp(C)$. В комплексном или в кватернионном евклидовом пространстве \mathbb{E}^n пересечение $P^a(C) \cap S^{an-1}(C, |Cx|)$ ($a = 2, 4$) — $(a-1)$ -мерная сфера и $f_{P(C)}(x)$ — это ближайшая к x точка этой сферы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. С целью некоторого обобщения понятия круговой проекции рассмотрим расслоение $\pi_0 : \mathbb{E}^n \setminus (0 \times \mathbb{E}^k) \rightarrow \mathbb{E}^{n-k} \setminus \{0\}$, в котором слои $S_0(x) = \pi^{-1}(x)$ являются k -мерными поверхностями, в частном случае такое расслоение имеет эллипсоидальные слои.

Пусть $g : [-a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $0 < a, b \leq \infty$, — гладкая выпуклая функция такая, что $g(0) = 1, g'(0) = 0$, у которой кривизна удовлетворяет условию $k \leq 1$. Обозначим через γ_R кривую $x = Rg(y/R)$, которая либо содержится во внутренности вещественной полуплоскости \mathbb{E}_+^2 , либо трансверсально пересекается с его краем.

Пусть при некотором k имеет место такое разложение $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}^{n-k} \times \mathbb{E}^k$, что \mathbb{E}_+^2 ортогонально обоим множителям (например, ось x лежит в \mathbb{E}^{n-k} , а ось y — в \mathbb{E}^k). Группа $SO(n)$ содержит подгруппу G , изоморфную $SO(n-k) \times SO(k)$, и действует на \mathbb{E}^n блочным образом: $G_1 = SO(n-k)$ и $G_2 = SO(k)$. Это действие порождает G -инвариантную гиперповерхность $M_{O,R}^{n-1} = G(\gamma_R) \subset \mathbb{E}^n$ (обозначаемую для краткости через M_R^{n-1}), будем называть ее *гиперповерхностью вращения с образующей γ_R* . Каждая такая поверхность M_R^{n-1} пересекается с $\mathbb{E}^{n-k} \times \{0\}$ по сфере $G_1(\gamma_R(0)) = S^{n-k-1}(R)$ радиуса R , т. е. по G_1 -орбите точки $\gamma_R(0)$. Действие подгруппы G_2 определяет расслоение $\pi_0 : \mathbb{E}^n \setminus (0 \times \mathbb{E}^k) \rightarrow \mathbb{E}^{n-k} \setminus \{0\}$, в котором слоями являются k -мерные поверхности $S_0 = G_2(\gamma_R)$, и M_R^{n-1} представимо в виде объединения таких поверхностей.

Например, если $g(y) = \sqrt{1-y^2}$, то γ_R является полуокружностью, а M_R^{n-1} — сферой радиуса R . $G_1(\gamma_R)$ является большой k -мерной сферой, ортогональной к $(n-k)$ -мерной сфере $M_R^{n-1} \cap \mathbb{E}^{n-k}$. Аналогичным образом функция $g(y) = A\sqrt{1-(y/B)^2}$ порождает эллипсоиды.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Для $(n-k)$ -мерной плоскости $P(C)$ с выколотой точкой рассмотрим изометрическое преобразование $T : \mathbb{E}^n \setminus P^\perp(C) \rightarrow \mathbb{E}^n \setminus \mathbb{E}^k$. Пусть функция $g : [-a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяет приведенным выше условиям, тогда $\pi_C := T^{-1} \circ \pi_0 \circ T : \mathbb{E}^n \setminus P^\perp(C) \rightarrow P(C) \setminus C$ является расслоением на k -мерные поверхности. Обозначим через $M^k(P(C), x)$ слой, проходящий через какую-либо точку $x \notin P^\perp(C)$.

Для любой такой точки обозначим через $f_{P(C)}(x)$ ближайшую к x точку сферы $S(P(C), g, x) := S(C, R(x)) \cap P(C)$. Здесь $M_{C,R(x)}^{n-1}$ — гиперповерхность, содержащая x и построенная так же, как и $M_{O,R}^{n-1}$ при $R = R(x) = |Cx|$. Назовем $f_{P(C)} : \mathbb{E}^n \setminus P^\perp(C) \rightarrow P(C) \setminus C$ *g -нелинейной проекцией* на плоскость $P(C)$ и обозначим через $S^\perp(P(C), x)$ проходящий через точку x k -мерный «меридиан» в $M_{C,R(x)}^{n-1}$ (перпендикулярный к $S(P(C), g, x)$).

Результаты и определения этого раздела (начиная с определения 4) могут быть обобщены и на случай g -нелинейных проекций.

2.2. \mathcal{C} -выпуклые тела и их аналоги. Для начала расширим определения 1 и 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Шар $B^{k+1}(x, r) \subset \mathbb{E}^n$ с границей $S^k(x, r)$ будет называться *опорным* к телу $K \subset \mathbb{E}^n$, если $S^k(x, r) \cap \partial K \neq \emptyset$ и $B^{k+1}(x, r)$ не пересекается с $\text{int } K$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть \mathcal{P}_k — непустое семейство круговых проекций на $(n - k)$ -мерные плоскости с выколотыми точками в \mathbb{E}^n . Будем называть подмножества A, B в \mathbb{E}^n \mathcal{P}_k - \mathcal{C} -эквивалентными и обозначать это через $A \stackrel{\mathcal{P}_k}{\sim} B$, если $f(A) = f(B)$ при всех $f \in \mathcal{P}_k$. Для каждого подмножества A в \mathbb{E}^n определим $\mathcal{P}_k\langle A \rangle$ как объединение всех подмножеств B , удовлетворяющих условию $B \stackrel{\mathcal{P}_k}{\sim} A$.

Определим \mathcal{C} -видимую оболочку $\mathcal{C}\mathcal{P}_k\langle W \rangle$ множества W в \mathbb{E}^n как наибольшее множество $V \supseteq W$, для которого $f(V) = f(W)$ при всех $f \in \mathcal{P}_k$. Тело $K \subset \mathbb{E}^n$ будем называть \mathcal{P}_k - \mathcal{C} -видимым, если $\mathcal{C}\mathcal{P}_k\langle K \rangle = K$.

Утверждение 4. $\mathcal{C}\mathcal{P}_k\langle K \rangle = K$ тогда и только тогда, когда для любой точки $x \notin K$ найдется такая круговая проекция $f_{P(C)} \in \mathcal{P}_k$, что $S^\perp(P(C), x)$ не пересекается с K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО почти полностью повторяет доказательство утверждения 3.

1. Пусть $x \in \mathcal{C}\mathcal{P}_k\langle K \rangle \setminus K$. Это означает, что для всех круговых проекций $f_{P(C)} \in \mathcal{P}_k$ проекция этой точки $f_{P(C)}(x)$ лежит в $f_{P(C)}(K)$, но тогда соответствующие окружности $S^\perp(P(C), x)$ будут пересекаться с K .

2. Пусть для любой точки $x \notin K$ найдется такая круговая проекция $f_{P(C)} \in \mathcal{P}_k$, что $S^\perp(P(C), x)$ не пересекается с K . Это означает, что $f_{P(C)} \notin \mathcal{P}_k$, и тем самым никакая точка вне K не может содержаться в $\mathcal{C}\mathcal{P}_k\langle K \rangle$. \square

Для дальнейшего изучения сформулированного во введении вопроса расширим определение 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Тело $K \subset \mathbb{E}^n$ называется \mathcal{C} -выпуклым класса $\mathcal{H}_i^{k,\varepsilon}$ (для некоторых $\varepsilon > 0$, $0 \leq k \leq n - 1$), если

($\mathcal{H}_1^{k,\varepsilon}$) для любой точки $x \in \partial K$ найдется такая круговая проекция $f_{P(C)} \in \mathcal{P}_{k,K,\varepsilon}$, что $x \in P(C)$, $|Cx| = 1/\varepsilon$ и $f_{P(C)}(x) \in \partial(f_{P(C)}(K))$,

($\mathcal{H}_2^{k,\varepsilon}$) для любой точки $x \notin K$, $\text{dist}(x, K) \leq 1/\varepsilon$, найдется такая $f_{P(C)} \in \mathcal{P}_{k,K,\varepsilon}$, что $x \in P(C)$, $|Cx| = 1/\varepsilon$ и $f_{P(C)}(x)$ не лежит в $f_{P(C)}(K)$.

Тело $K \subset \mathbb{E}^n$ назовем \mathcal{C} -обозримым класса $\mathcal{V}_i^{k,\varepsilon}$, если

($\mathcal{V}_1^{k,\varepsilon}$) для любого опорного к K шара $\tilde{B}^{k-m+1}(C, 1/\varepsilon)$ найдется такая $f_{P(C)} \in \mathcal{P}_{k,K,\varepsilon}$, что $\partial\tilde{B} \perp S(P(C), 1/\varepsilon)$ и $f_{P(C)}(\tilde{B})$ является опорным к $f_{P(C)}(K)$ телом,

($\mathcal{V}_2^{k,\varepsilon}$) для любой не пересекающейся с K сферой $\tilde{S}^{k-m}(C, 1/\varepsilon)$, $\text{dist}(C, K) \leq 1/\varepsilon$, найдется такая $f_{P(C)} \in \mathcal{P}_{k,K,\varepsilon}$, что $\tilde{S} \perp S(P(C), 1/\varepsilon)$ и $f_{P(C)}(\tilde{S})$ также не пересекается с $f_{P(C)}(K)$.

Здесь, как и выше, $0 < m \leq k < n$.

Подобным же образом можно определить классы $\mathcal{H}\mathcal{P}_{k,i}$ \mathcal{C} -выпуклых и \mathcal{C} -обозримых тел в \mathbb{E}^n относительно любого семейства \mathcal{P}_k (в частности, \mathcal{P}_{Lk} и $\mathcal{P}_{k,M}$, см. ниже) круговых проекций на $(n - k)$ -мерные плоскости с выколотыми точками.

Можно проверить, что пересечение связных тел класса $\mathcal{H}_2^{k,\varepsilon}$ будет также принадлежать этому классу. Такое пересечение может оказаться несвязным.

Рассмотрим теперь несколько полезных семейств \mathcal{P}_k .

ПРИМЕР 3. Для любого множества $M \subset \mathbb{E}^n$ обозначим через $\mathcal{P}_{k,M}$ семейство круговых проекций на такие $(n-k)$ -мерные плоскости $P(C)$ в \mathbb{E}^n с выколотыми точками, что $C \in M$. Например, если тело K лежит в шаре $B(x, r)$, можно взять в качестве M сферу $S^{n-1}(x, r)$.

В дальнейшем будем рассматривать следующие случаи.

1. Для тела $K \subset \mathbb{E}^n$ обозначим через $\mathcal{P}_{k,K,\varepsilon}$ семейство всех круговых проекций на такие $(n-k)$ -мерные плоскости $P(C)$ в \mathbb{E}^n с выколотыми точками, что $P^\perp(C) \cap K = \emptyset$ и $\text{dist}(C, K) \leq 1/\varepsilon$.

Если здесь взять $M = \{C \in \mathbb{E}^n : \text{dist}(C, K) \leq 1/\varepsilon\}$, то получатся классы из определения 8.

2. Для k -мерной плоскости $L^k \subset \mathbb{E}^n$ обозначим через \mathcal{P}_{L^k} семейство круговых проекций на такие $(n-k)$ -мерные плоскости $P(C)$ в \mathbb{E}^n с выколотыми точками, что $C \in L^k$ и $P(C) \perp L^k$.

Для $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_{L^k}$ в определении 8 получим четыре класса тел, которые будем обозначать через $\mathcal{H}_{k,i}(L^k)$ и $\mathcal{Y}_{k,i}(L^k)$, $i = 1, 2$.

Утверждение 5. Условия $\mathcal{H}_i^{k,\varepsilon}$ ($i = 1, 2$) эквивалентны следующим:

($i = 1$) $\mathcal{H}_1^{k,\varepsilon}$: каждая точка $x \in \partial K$ лежит в шаре $B^{k+1}(C, 1/\varepsilon)$, опорном к K ,

($i = 2$) $\mathcal{H}_2^{k,\varepsilon}$: каждая точка $x \notin K$ лежит в сфере, ограничивающей шар $B^{k+1}(C, 1/\varepsilon)$, не пересекающийся с K .

Условия $\mathcal{Y}_i^{k,\varepsilon}$ ($i = 1, 2$) эквивалентны следующим:

($i = 1$) $\mathcal{Y}_1^{k,\varepsilon}$: любой опорный к K шар $B^{k-m+1}(C, 1/\varepsilon)$ лежит в шаре $B^{k+1}(C, 1/\varepsilon)$, который также является опорным к K ,

($i = 2$) $\mathcal{Y}_2^{k,\varepsilon}$: любая не пересекающаяся с K сфера $S^{k-m}(C, 1/\varepsilon)$, для которой $\text{dist}(C, K) \leq 1/\varepsilon$, лежит в сфере, ограничивающей шар $B^{k+1}(C, 1/\varepsilon)$, который также с K не пересекается.

Доказательство несложным образом следует из определений.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Напомним, что мы ввели в [4] « $(n-1)$ -мерную версию» \mathcal{C} -выпуклых объектов.

Тело K называется ε -выпуклым класса $\mathcal{H}_i^\varepsilon$, если

($\mathcal{H}_1^\varepsilon$) любая точка $x \in \partial K$ принадлежит опорному к K шару радиуса $1/\varepsilon$;

($\mathcal{H}_2^\varepsilon$) любая точка $x \notin K$ лежит в таком шаре B радиуса $1/\varepsilon$, что $\text{int } K \cap B = \emptyset$.

Здесь только класс $\mathcal{H}_1^\varepsilon$ совпадает с $\mathcal{H}_1^{n-1,\varepsilon}$. Простые примеры показывают, что классы $\mathcal{H}_2^\varepsilon$ и $\mathcal{H}_2^{n-1,\varepsilon}$ различны.

Теорема 2. Для всех $\varepsilon > 0$, $k < n$, $i = 1, 2$ имеют место строгие включения $\mathcal{H}_2^{k,\varepsilon} \subset \mathcal{H}_1^{k,\varepsilon}$, $\mathcal{Y}_2^{k,\varepsilon} \subset \mathcal{Y}_1^{k,\varepsilon}$ и $\mathcal{Y}_i^{k,\varepsilon} \subset \mathcal{H}_i^{k,\varepsilon}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\mathcal{H}_2^{k,\varepsilon} \subset \mathcal{H}_1^{k,\varepsilon}$. Пусть $x_* \in \partial K$, $K \in \mathcal{H}_2^{k,\varepsilon}$. Рассмотрим сходящуюся к x_* последовательность точек $x_i \notin K$. Для каждого i найдется сфера $S^k(C_i, 1/\varepsilon)$, $\text{dist}(C_i, K) \leq 1/\varepsilon$, содержащая x_i и не пересекающаяся с K . Ограниченная последовательность $\{C_i\}$ имеет предельную точку C_* , при этом $\text{dist}(C_*, K) \leq 1/\varepsilon$ и $1/\varepsilon \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \rho(x_i, C_i) = \rho(x_*, C_*)$. Следовательно, $x_* \in S^k(C_*, 1/\varepsilon)$, и эта сфера $S^k(C_*, 1/\varepsilon)$ не пересекается с внутренностью K и задает требуемую круговую проекцию из класса $\mathcal{H}_1^{k,\varepsilon}$.

Рис. 2. Тело K класса $\mathcal{H}_1^{k,\varepsilon} \setminus \mathcal{H}_2^{k,\varepsilon}$ ($k = 1$).

Остальные утверждения теоремы доказываются аналогичным образом. \square

ПРИМЕР 4. Можно построить примеры тел $K \in \mathcal{H}_1^{k,\varepsilon} \setminus \mathcal{H}_2^{k,\varepsilon}$, применяя малые деформации примеров $K \in \mathcal{H}_1^k \setminus \mathcal{H}_2^k$ (рис. 2), где круговая область вблизи начала координат заменена сферической поверхностью радиуса $1/\varepsilon$ (см. рис. 2).

Следующее утверждение установлено в [4] для случая $k = n - 1$.

Утверждение 6. Если у связного тела $K \in \mathcal{H}_1^{k,\varepsilon}$ диаметр меньше $1/\varepsilon$, то граница ∂K этого тела также связна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что тело K связно, а его граница несвязна, тогда одна из компонент границы, пусть $\partial_1 K$, отделяет K от «бесконечности» и является при этом границей некоторого тела L , $\text{diam } L = \text{diam } \partial K = \text{diam } K$. Пусть $\partial_2 K \neq \partial_1 K$ — другая компонента границы K и $x_1 \in \partial_2 K$. Поскольку $K \in \mathcal{H}_1^{k,\varepsilon}$, то x_1 лежит и в L , и в некотором опорном к K шару $B^{k+1}(C, 1/\varepsilon)$, $\text{dist}(C, K) \leq 1/\varepsilon$. Значит, $B^{k+1}(C, 1/\varepsilon) \subset L$, и $\text{diam } L \geq 1/\varepsilon$, что противоречит условиям. \square

Рассмотрим специальный случай определения 7.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Будем называть ε -видимой оболочкой $\mathcal{C} \mathcal{P}_{k,\varepsilon}(V)$ множества V в определяемой семейством $\mathcal{P}_{k,V,\varepsilon}$ круговых проекций такое наибольшее множество $K \supseteq V$, что $f(K) = f(V)$ при всех $f \in \mathcal{P}_{k,V,\varepsilon}$. Тело $K \subset \mathbb{E}^n$ будет называться ε -видимым (относительно $\mathcal{P}_{k,K,\varepsilon}$), если $\mathcal{C} \mathcal{P}_{k,\varepsilon}(K) = K$.

Утверждение 7. Если $\text{diam } K < 1/\varepsilon$, то $K \in \mathcal{H}_2^{k,\varepsilon}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{C} \mathcal{P}_{k,\varepsilon}(K) = K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения класса $\mathcal{H}_2^{k,\varepsilon}$ следует, что для любой точки $x \notin K$ существует такая круговая проекция $f_{P(C)} \in \mathcal{P}_{k,K,\varepsilon}$, что $|Cx| = 1/\varepsilon$ и $f_{P(C)}(x)$ не пересекается с $f_{P(C)}(K)$. Значит, любая точка вне K не может содержаться в его ε -видимой оболочке. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Для «больших тел» ($\text{diam } K > 1/\varepsilon$) это предложение неверно.

Пусть $K = B(0; 3/\varepsilon) \setminus B(0; 2/\varepsilon)$. Для любой точки $C \in B(0; 2/\varepsilon)$ и для любой плоскости $P(C)$ любой размерности ортогональное дополнение $P^\perp(C)$ пересекается с этим телом K , которое, очевидно, принадлежит классу $\mathcal{H}_2^{k,\varepsilon}$ при любом k , $1 < k < n$ (для «малых тел» это не так). Значит, для определения ε -видимой оболочки $\mathcal{C} \mathcal{P}_{k,\varepsilon}(K)$ следует выбирать центры шаров C вне «большого» шара $B(0; 3/\varepsilon)$, т. е. здесь мы имеем $\mathcal{C} \mathcal{P}_{k,\varepsilon}(K) = B(0; 3/\varepsilon)$.

2.3. Реконструкция \mathcal{C} -выпуклых тел по их круговым проекциям.

Теорема 3. Если круговые проекции тел $V_1, V_2 \in \mathcal{K}_2^{n-1, \varepsilon}$ на любую прямую $P^1(C)$ с выколотой точкой совпадают и $\text{diam } V_1, \text{diam } V_2 < 1/(2\varepsilon)$, то $V_1 = V_2$. Здесь C — центр любого опорного к V_1 или V_2 шара радиуса $1/\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Из условий следует, что если шар $B(C, 1/\varepsilon)$ является опорным к V_1 , то он будет опорным и к V_2 , и наоборот. Аналогично можно проверить, что для расстояния между V_1, V_2 в метрике Хаусдорфа выполняется соотношение $d(V_1, V_2) < 1/(2\varepsilon)$.

2. Отсюда следует, что $\text{conv}(V_1) = \text{conv}(V_2)$. Обозначим эту выпуклую оболочку через K , ее диаметр также меньше $1/(2\varepsilon)$, никакой центр опорного к V_1, V_2 шара радиуса $1/\varepsilon$ не может содержаться в K .

3. Предположим, что существует такое $y_2 \in V_2 \subset K$, что $y_2 \notin V_1$; можно считать, что $y_2 \in \text{int } V_2$, $y_2 \in B(C(y_2), 1/\varepsilon) \equiv B_2$. Здесь $C(y_2)$ — центр круговой проекции, которая описывается в определении 8 класса $\mathcal{K}_2^{n-1, \varepsilon}$. Из этого же определения следует, что шар B_2 не может быть опорным к V_1 — в противном случае он должен бы быть опорным и к V_2 . Таким образом, B_2 не пересекается с V_1 .

4. Пусть $E(y_2)$ — экваториальная гиперплоскость шара B_2 , ортогональная отрезку $[C(y_2), y_2]$. Поскольку тела V_1, V_2 имеют «малые» диаметры, эта гиперплоскость делит пространство \mathbb{E}^n на полупространство \mathcal{E}^+ , содержащее V_1 и V_2 , и на полупространство \mathcal{E}^- , которое с ними не пересекается.

5. Будем сдвигать шар B_2 в направлении $y_2, C(y_2)$ от тела K , обозначая результаты этого переноса через $B_2(t)$. Во время этого перемещения шары $B_2(t)$ будут содержаться в объединении $B_2 \cup \mathbb{E}^-$ и никогда не пересекутся с V_1 . В некоторый момент t_1 шар $B_2(t_1)$ окажется опорным к V_2 , но при этом тела V_1 он коснуться не сможет. Источник противоречия состоял в допущении из п. 3. Следовательно, $V_1 = V_2$. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Для «больших» тел V_1, V_2 , $\text{diam } V_1, \text{diam } V_2 > 1/\varepsilon$, и для положительной круговой проекции доказанная теорема неверна.

Пусть $V_1 \subset R^2$ — кольцо $1 + 2/\varepsilon \leq |x| \leq 3 + 2/\varepsilon$ и $V_2 = V_1 \cup B(0, 1)$, где $B(0, 1)$ — единичный шар с центром в начале координат. Все шары $B(Z, 1/\varepsilon)$ с центрами Z , $|Z| = 1 + 1/\varepsilon$ являются опорными и для V_1 , и для V_2 (и для $B(0, 1)$). Очевидно, что для всех Z выполняется тождество $|f_Z|(V_1) = |f_Z|(V_2)$.

Эта теорема также неверна для более широкого класса тел $\mathcal{K}_1^{n-1, \varepsilon}$, что показывают аналогичные примеры.

Утверждение 8. Если $V_1 \subset \mathbb{E}^n \setminus L^k$ принадлежит классу $\mathcal{K} \mathcal{D}_{k,2}(L^k)$, $1 \leq k \leq n-1$, и V_2 получено из V_1 некоторым вращением \mathbb{E}^n вокруг L^k (т. е. некоторым преобразованием из $SO(n-k)$), то для любого $C \in L^k$ круговые проекции $f_{P(C)}$ тел V_1 и V_2 на плоскости $P^{n-k}(C)$ конгруэнтны относительно некоторого вращения этой плоскости (или, иными словами, $SO(n-k)$ -эквивалентны).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО немедленно следует из того, что при любом $C \in L^k$ сфера $S^{n-1}(C, r)$ и разложение пространства $\mathbb{E}^n = L^k \oplus P^{n-k}(C)$ инвариантны относительно вращений из группы $SO(n-k)$.

Будем говорить, что тело $K \subset \mathbb{E}^n$ окружает плоскость P^{n-2} , если любая полуплоскость H^{n-1} с границей P^{n-2} пересекается с K .

Приведем пример ответа на сформулированный во введении вопрос.

Теорема 4. Если $V_1, V_2 \subset \mathbb{E}^n \setminus L^{n-2}$ принадлежат классу $\mathcal{H} \mathcal{P}_{n-2,2}(L^{n-2})$ и не окружают плоскость L^{n-2} , а их круговые проекции на все плоскости $P^2(C)$, $C \in L^{n-2}$, $P^2(C) \perp L^{n-2}$, $SO(2)$ -эквивалентны относительно центра C , то V_1 может быть получено из V_2 некоторым вращением вокруг L^{n-2} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для наглядности изложения разобьем доказательство на два этапа — трехмерный и многомерный.

СЛУЧАЙ $n - 2 = 1$.

1. Фиксируем $C_0 \in L^1$ и повернем тело V_1 вокруг оси L^1 так, чтобы полученное тело V'_1 и тело V_2 имели совпадающие круговые проекции на $P^2(C_0)$, т. е. $f_{C_0}(V'_1) = f_{C_0}(V_2)$. Эти проекции содержатся в некотором углу $A_0C_0B_0$ в плоскости $P(C_0)$ и касаются сторон этого угла. Следовательно, тела V'_1 и V_2 содержатся в двугранном углу $A_0C_0B_0$ с ребром L^1 и касаются граней этого угла.

2. Если при некотором $C_1 \in L^1$ круговые проекции $f_{C_1}(V'_1)$ и $f_{C_1}(V_2)$ не совпадают и эквивалентны относительно вращения в плоскости $P(C_1)$ на некоторый угол $\phi(C_1)$, $0 < \phi(C_1) < 2\pi$, то $f_{C_1}(V'_1)$ содержится в некотором плоском углу $A_1C_1B_1$ и касается его сторон, а круговая проекция $f_{C_1}(V_2)$ содержится в некотором равном ему углу $A'_1C_1B'_1$ и касается его сторон. Следовательно, тела V'_1 и V_2 содержатся в двугранных углах $A_1C_1B_1$, $A'_1C_1B'_1$ соответственно. Эти углы имеют общее ребро L^1 и их грани касаются тел V'_1 и V_2 ; противоречие с существованием двугранного угла $A_0C_0B_0$, построенного ранее.

СЛУЧАЙ $n - 2 > 1$.

3. Как и выше, фиксируем $C_0 \in L^{n-2}$ и повернем тело V_1 вокруг L^{n-2} так, чтобы полученное тело V'_1 и тело V_2 имели совпадающие круговые проекции $f_{C_0}(V'_1) = f_{C_0}(V_2)$ в $P^2(C_0)$.

4. Если при некотором $C_1 \in L^{n-2}$ круговые проекции $f_{C_1}(V'_1)$ и $f_{C_1}(V_2)$ не совпадают, но эквивалентны относительно некоторого поворота $\varphi(C_1) \in SO(2)$ плоскости $P^2(C_1)$, то, поскольку тела V_1, V_2 не окружают плоскость L^{n-2} , их круговые проекции $V'_1(P^2(C_1))$ и $V_2(P^2(C_1))$, как и в трехмерном случае, содержатся в некоторых равных плоских углах $A_1C_1B_1$ и $A'_1C_1B'_1$ соответственно и касаются их сторон. Как и выше, тела V'_1, V_2 содержатся в двугранных углах $A_1C_1B_1$ и $A'_1C_1B'_1$ с общим $(n - 2)$ -мерным «ребром» L^{n-2} и касаются их граней. Эти углы конгруэнтны относительно вращения на угол $\varphi(C_1)$ в плоскости $P^2(C_1)$. С другой стороны, пересечения этих граней с плоскостями $P^2(C_0)$ порождают в этой плоскости углы с общим центром C_0 . Эти двугранные углы содержат круговые проекции $f_{C_0}(V'_1) = f_{C_0}(V_2)$ и конгруэнтны относительно того же самого поворота на угол $\varphi(C_1)$, что противоречит предположению и нетривиальности этого угла. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 8. (а) В отличие от рассмотренного в [5] случая $SO(2)$ -эквивалентных ортогональных проекций на всевозможные двумерные плоскости, где при дополнительном ограничении на отсутствие у этих проекций $SO(2)$ -симметрий доказывалось, что тела V_1, V_2 эквивалентны друг другу либо относительно параллельного переноса, либо относительно центральной симметрии, в условии теоремы 4 такой асимметрии не предполагается, но при этом рассматриваются круговые проекции только на двумерные плоскости, перпендикулярные L^{n-2} , и центры всех вращений предполагаются лежащими на этой плоскости L^{n-2} .

(b) Аналогичным образом эта теорема может быть сформулирована для случаев комплексных и кватернионных евклидовых пространств и для преобразований из групп $U(n - k)$, $SU(n - k)$ и $Sp(n - k)$; в [10] соответствующие результаты получены для случая ортогональных проекций на $(n - k)$ -мерные плоскости комплексного евклидова пространства при произвольных k и при дополнительном условии отсутствия у этих проекций $U(n - k)$ - или $SU(n - k)$ -симметрий.

Авторы выражают искреннюю благодарность В. В. Пикалову за полезные обсуждения применений в физической и компьютерной томографии круговых проекций и других геометрических схем сканирования, а также анонимному рецензенту за советы и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Решетняк Ю. Г. Об одном обобщении выпуклых поверхностей // *Мат. сб.* 1956. Т. 40, № 3. С. 381–398.
2. Federer H. Curvature measures // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1959. V. 93, N 3. P. 418–491.
3. Thäle C. 50 years sets with positive reach — A survey // *Surv. Math. Appl.* 2008. V. 3. P. 123–165.
4. Golubyatnikov V. P., Rovenski V. Y. Some extensions of the class of convex bodies. ArXiv: 0808.1788 V. 1 [math DG] 13 August 2008, 28 pages.
5. Golubyatnikov V. P. Uniqueness questions in reconstruction of multidimensional objects from tomography-type projection data. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2000.
6. Meisters G. H., Ulam S. M. On visual hull of sets // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1967. V. 57. P. 1172–1174.
7. Larman D. G., Mani P. On visual hulls // *Pacific J. Math.* 1970. V. 32, N 1. P. 157–171.
8. Шефель С. З. О двух классах k -мерных поверхностей в n -мерном евклидовом пространстве // *Сиб. мат. журн.* 1969. Т. 10, № 2. С. 459–466.
9. Голубятников В. П. Вопросы устойчивости в некоторых обратных задачах реконструкции выпуклых компактов по их проекциям // *Сиб. мат. журн.* 1992. Т. 33, № 3. С. 50–57.
10. Голубятников В. П. Об однозначной восстановимости выпуклых компактов по их проекциям. Случай комплексных пространств // *Сиб. мат. журн.* 1999. Т. 40, № 4. С. 805–810.
11. Rovenski V. Yu. On (k, ε) -saddle submanifolds of Riemannian manifolds // *Geom. Dedicata.* 2006. V. 121. P. 187–203.
12. Gromov M. Spaces and questions // *Geom. Funct. Anal. (GAFA). Special Volume.* 2000. Part I. P. 118–161.
13. Gardner R. Geometric tomography. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006.
14. Борисенко А. А. О внешне геометрических свойствах параболических поверхностей и топологические свойства седловых поверхностей в симметрических пространствах ранга один // *Мат. сб.* 1981. Т. 116, № 3. С. 440–457.
15. Lazebnik S., Furukawa Y., Ponce J. Projective visual hulls // *Int. J. Comput. Vision.* 2007. V. 74, N 2. P. 137–165.

Статья поступила 6 августа 2008 г.

Голубятников Владимир Петрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
glbtn@math.nsc.ru

Ровенский Владимир Юозефович
Department of Mathematics, University of Haifa,
Mount Carmel, Haifa, 31905, Israel
rovenski@math.haifa.ac.il