Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2009. Том 50, № 5

УДК 514.17

ОДНА ГИПОТЕЗА О ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКАХ

В. А. Залгаллер

Аннотация. Выделен класс пирамид специального вида и выдвинута гипотеза, что среди замкнутых выпуклых многогранников с четным числом вершин и единичным геодезическим диаметром наибольшую площадь поверхности имеют именно эти пирамиды. Описана их геометрия. Подтверждение этой гипотезы дало бы доказательство проблемы А. Д. Александрова «о дважды покрытом круге». Через связь с многоугольниками Рело доказано, что на плоскости выпуклый n-угольник единичного диаметра при нечетных n имеет наибольшую площадь, когда он правильный. При четных n это не так.

Ключевые слова: геодезический диаметр, изопериметрическая задача, выпуклый многоугольник, выпуклый многогранник.

Дорогому Юрию Григорьевичу Решетняку
к его 80-летию

§ 1. Задача на плоскости

1.1. Вопрос. Какую форму следует придать выпуклому n-угольнику, чтобы при диаметре 1 он имел максимальную площадь? Диаметр фигуры — это наибольшее расстояние между парами ее точек.

1.2. Простейшие факты. 1. Диаметр выпуклого многоугольника равен наибольшей из длин его сторон и диагоналей.

2. При $n = 3$ максимальную площадь имеет равносторонний треугольник со сторонами 1.

3. При $n = 4$ максимальный (по площади) четырехугольник не единствен. Это не только квадрат с диагоналями 1, но и выпуклая оболочка различно расположенных пересекающихся под прямым углом единичных отрезков, если у этой оболочки не появилась сторона больше 1.

4. При каждом фиксированном $n_0 \geq 3$ по принципу компактности Бляшке [1, § 2] в классе выпуклых многоугольников единичного диаметра с числом вершин $\leq n_0$ существует хотя бы один максимальной площади. Обозначим эту площадь через $\sigma(n_0)$.

5. Функция $\sigma(n_0)$ строго возрастает по n_0. Действительно, допущению $\sigma(n_0+1) \leq \sigma(n_0)$ противоречит возможность взять n_0-угольник площади $\sigma(n_0)$ и слегка «выдвинуть» середину одной из его сторон, не нарушая единичности диаметра.

6. У правильного пятиугольника с диагоналями 1 площадь $S_5 \simeq 0.657164$. У максимального n-угольника при любом $n \geq 5$ всегда $\sigma(n) \geq S_5$. Поэтому при $n \geq 5$ у максимального n-угольника диаметра 1 любая сторона короче 1.

© 2009 Залгаллер В. А.

Действительно, если бы у него была сторона $AB = 1$, он умещался бы в фигуре рис. 1, ограниченной стороной AB и круговыми дугами AC, BC радиуса 1 с центрами соответственно в B и A. Но для площади Ω такой фигуры имеем

Рис. 1.

$$\Omega = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \simeq 0.614185 < S_5.$$

1.3. Под *максимальным* n-угольником понимаем далее выпуклый n-угольник наибольшей площади при единичном диаметре. Поскольку нас интересуют только $n \geq 5$, единичность диаметра проявляется в существовании диагоналей длины 1. Стороны и остальные диагонали короче 1.

1.4. Необходимый признак максимального n-угольника. Небольшой сдвиг любой вершины при неподвижности остальных вершин, увеличивающий площадь, влечет появление диагонали > 1.

Выполнение этого признака для каждой из вершин лишь необходимо, но не достаточно для максимальности n-угольника.

Многоугольник, удовлетворяющий необходимому признаку 1.4, будем называть *допустимым.*

1.5. Классификация вершин допустимого многоугольника. 1. У допустимого многоугольника не может быть вершины, из которой не выходит ни одной диагонали длины 1.

2. Если из вершины T исходит более одной диагонали длины 1, назовем T *вершиной первого рода.* Если из T исходит единственная диагональ TT' длины 1, назовем T *вершиной второго рода.*

3. В последнем случае диагональ TT' обязательно ортогональна к той диагонали, которая соединяет две соседние с T (справа и слева) вершины U, V многоугольника. Иначе малым поворотом диагонали TT' вокруг точки T' можно сместить вершину T, увеличив площадь и сохранив единичность диаметра.

4. Исключим из числа претендентов на максимальность те допустимые многоугольники, у которых существует единичная диагональ TT', оба конца которой лежат в вершинах второго рода. Такая ситуация возможна при $n \geq 6$.

В этом случае диагональ TT' ортогональна не только диагонали UV, соединяющей вершины, смежные с T, но и диагонали $U'V'$, соединяющей вершины, смежные с T'. Если при этом длина $U'V'$ больше длины UV, то малый продольный сдвиг этой диагонали в направлении от T к T' увеличит площадь, не нарушая единичности диаметра. Аналогичное будет при противоположном неравенстве для длин. Если $UV = U'V'$, то диагональ TT' можно подвергать параллельным переносам, сохраняя площадь и диаметр многоугольника. Этот перенос можно продолжить до положения, в котором у выпуклой оболочки исходного n-угольника и смещенных вершин T и T' окажется всего $n-1$ вершин. Значит, исходная площадь n-угольника не больше, чем $\sigma(n-1)$, поэтому заведомо не максимальна для n-угольников.

5. Мы исключили из класса «допустимых» все n-угольники, у которых была хоть одна диагональ длины 1 с обеими вершинами второго рода. В частности, такими являются все правильные n-угольники при четных n. Они не могут быть максимальными!

6. У сохраненных допустимых n-угольников для каждой вершины T второго рода противоположный конец T' единичной диагонали TT' первого рода.

1.6. Секторы радиуса 1 с центрами в вершинах первого рода. Пусть M — допустимый n-угольник и A — его вершина первого рода. Из нее исходят $n-3$ веерно упорядоченных диагоналей, среди которых $k \geq 2$ длиной 1. Пусть AB_1 и AB_k крайние среди единичных диагоналей (рис. 2). Имеем $\angle B_1AB_k \leq 60°$, поскольку расстояние B_1B_k не больше 1. Свяжем с вершиной A сектор радиуса 1 с углом B_1AB_k.

Рис. 2.

На дуге B_1B_k в случае $k > 2$ могут располагаться еще несколько вершин $B_2, \ldots, B_{k-1}$ многоугольника M. Но каждая из них будет вершиной второго рода. Действительно, чтобы такая вершина $B_i \quad (2 \leq i \leq k-1)$ была первого рода, из нее кроме B_iA должна идти еще хотя бы одна единичная диагональ B_iT. Но тогда вершина T оказалась бы удаленной более чем на 1 от одной из вершин B_1 и B_k (T вышла бы за пределы пересечения единичных кругов D_1, D_k с центрами B_1 и B_k, см. рис. 2).

Наконец, мы вправе считать, что при наличии точек $B_2, \ldots, B_{k-1}$ выполняются равенства

$$B_1B_2 = B_2B_3 = \cdots = B_{k-1}B_k,$$

иначе площадь n-угольника M можно увеличить, создав эти равенства.

Сами вершины B_1 и B_k обязательно первого рода. Действительно, допустим, например, что вершина B_k второго рода. На контуре n-угольника M за ней следует некоторая вершина X. Для диагонали $B_{k-1}X$ диагональ AB_k должна быть срединным перпендикуляром. Тогда $AX = 1$ и AB_k не была бы крайней среди диагоналей длины 1, выходящих из вершины A. Для вершин первого рода $A_1, \ldots, A_m$ углы связанных с ними секторов обозначим через $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Напомним [2], что *шириной плоской выпуклой фигуры в направлении* u называют расстояние между парой параллельных опорных прямых этой фигуры, ортогональных u. Если у фигуры F ширина во всех направлениях одинаковая, то F называют *фигурой постоянной ширины.* Именно такое множество Φ мы получили, дополнив исходный n-угольник до выпуклой оболочки всех секторов, прикрепленных к вершинам первого рода этого n-угольника. Согласно известной теореме Барбье периметр любой фигуры постоянной ширины 1 равен π. Поэтому $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = \pi$, т. е. $180°$.

1.7. Замечание. Построенное множество Φ относится к специальному подклассу фигур постоянной ширины — многоугольникам Рело. Это «многоугольники» постоянной ширины с конечным числом «сторон», которыми служат дуги окружностей радиуса, равного ширине фигуры. При этом все стыки дуг не гладкие, а являются выступающими углами.

Как известно [3], у любого многоугольника Рело число вершин нечетно, так что у каждого допустимого n-угольника нашей задачи число m вершин первого рода нечетно.

1.8. Теорема. *При нечетных n среди выпуклых n-угольников диаметра 1 наибольшую площадь имеет только правильный n-угольник.*

1.9. Некоторые теоремы о многоугольниках Рело. Лебег доказал, что среди фигур постоянной ширины 1 наименьшую площадь имеет треугольник Рело. Бляшке [4] с помощью четырехшарнирного метода показал, что треугольник Рело имеет наименьшую площадь среди всех многоугольников Рело той же ширины, откуда вывел снова теорему Лебега.

Четырехшарнирный метод впервые использовал Штейнер (см. [1, § 1]), доказывая, что замкнутая кривая фиксированной длины на плоскости охватывает наибольшую площадь, если она окружность.

Файери и Салли первыми доказали, что m-угольник Рело ширины 1 имеет наибольшую площадь, если он правильный. Купиц и Мартини [5] доказали эту теорему с использованием четырехшарнирного метода. Ниже в § 3 мы используем четырехшарнирный метод при поиске шестиугольника максимальной площади при единичном диаметре.

1.10. Доказательство теоремы 1.8. Пусть M — любой из допустимых n-угольников, где $n \geq 5$ нечетно, M_0 — правильный n-угольник тоже диаметра 1. Обозначим их площади через $\alpha(M)$ и $\alpha(M_0)$. Приложим к каждой из их n сторон сегмент единичной окружности с хордой, равной длине этой стороны. Общую площадь приложенных сегментов обозначим через $\beta(M)$ и $\beta(M_0)$. По теореме Файери — Салли

$$\alpha(M) + \beta(M) \leq \alpha(M_0) + \beta(M_0). \tag{$*$}$$

Докажем, что

$$\beta(M) \geq \beta(M_0) \tag{$**$}$$

с равенством только в случае $M = M_0$. Из $(*)$ и $(**)$ следует справедливость теоремы 1.8.

Секторы, прикрепленные к вершинам первого рода, имеют и в M, и в M_0 сумму углов $180°$. Эти секторы в том и другом случаях можно уложить на плоскость (с общей вершиной) так, что они заполнят полукруги D, D_0 радиусов 1. При этом хорды, по которым прикладывались сегменты, составят соответственно n-звенные ломаные L, L_0, вписанные в дуговые границы C, C_0 полукругов (рис. 3).

Рис. 3.

Площадь между L и C равна $\beta(M)$, а площадь между L_0 и C_0 равна $\beta(M_0)$. Выпуклый многоугольник между ломаной L и отрезком AB обозначим через N. Аналогичный выпуклый многоугольник между ломаной L_0 и отрезком A_0B_0 обозначим через N_0. Элементарно проверяется, что площадь N не превосходит площади N_0 с равенством только в случае $N = N_0$, что требует $M = M_0$. $\square$

§ 2. Задача в пространстве. Основная гипотеза

2.1. Определения. Для замкнутой выпуклой поверхности $F \subset \mathbb{R}^3$ *геодезическим расстоянием* $\rho(x,y)$ *между точками* $x, y \in F$ принято называть точную нижнюю границу длин спрямляемых кривых, соединяющих точки x и y и идущих по поверхности F. Всегда существует хотя бы одна кривая с длиной, равной $\rho(x,y)$. Такие кривые называют *кратчайшими на поверхности* F.

Геодезическим (или *внутренним*) *диаметром* поверхности F называют наибольшее значение $\rho(x,y)$ для всевозможных пар $x, y \in F$. Пары, для которых $\rho(x,y)$ равно геодезическому диаметру, называем *полярными* на F.

Линиями разреза от точки A на поверхности выпуклого многогранника называют множество всех тех точек, в которые из точки A идут на этой поверхности более одной кратчайшей.

2.2. До сих пор не предложено ни одного подхода к проблеме А. Д. Александрова (см. [6, проблема № 61]), высказавшего в 1950-е годы гипотезу, что среди замкнутых выпуклых поверхностей с геодезическим диаметром 1 наибольшую площадь имеет дважды покрытый круг (и только он).

2.3. Пирамиды $M(n)$. Обозначим через $M(n)$ выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^3$, имеющий форму пирамиды, основанием которой служит правильный $(2n+1)$-угольник $A_1A_2\dots A_{2n+1}$, вписанный в окружность радиуса $x(n)$, а вершина P пирамиды находится над центром O основания на высоте $y(n)$, причем значения $x(n)$ и $y(n)$ таковы, что $0.46 \le x(n) \le 0.5$, а геодезический диаметр поверхности $\partial M(n)$ равен 1, при этом полярными парами точек на $\partial M(n)$ служат только пара P и O и каждая пара A_i, B_i, где A_i — любая из вершин основания, а B_i — точка, наиболее удаленная по поверхности $\partial M(n)$ от A_i.

Такая точка B_i единственна. Она расположена на линии разреза от A_i за вершиной P, иными словами, на той апофеме PU пирамиды $M(n)$, которая соединяет вершину P с серединой U стороны $A_{i+n}A_{i+n+1}$, противоположной вершине A_i (рис. 4).

Рис. 4.

Как мы убедимся ниже (см. формулу (4)),

$$PB_i = x(n).$$

Кроме того, мы убедимся (см. лемму 2.7), что при $n \to \infty$ будет $y(n) \to 0$, т. е. высота пирамид $M(n)$ при $n \to \infty$ стремится к нулю. Они «сплющиваются» к дважды покрытому кругу.

2.4. Основная гипотеза настоящей статьи. При каждом $n = 1, 2, \dots$ в классе замкнутых выпуклых многогранников с единичным геодезическим диаметром и числом вершин $2n+2$ наибольшую площадь поверхности имеет пирамида $M(n)$.

2.5. Замечания. 1. Цель настоящей статьи — привлечь внимание молодых геометров к гипотезе А. Д. Александрова о дважды покрытом круге.

2. Владея техникой аппроксимации внутренней геометрии общих замкнутых выпуклых поверхностей аналитическими и многогранными выпуклыми поверхностями, несложно доказать следующее утверждение. Если верна гипотеза 2.4, то верна и гипотеза Александрова. Действительно, пусть Ψ — последовательность замкнутых выпуклых поверхностей с единичными геодезическими диаметрами, максимизирующая площадь. Если они «сплющиваются», то их предел — дважды покрытый круг. Если не сплющиваются, то по последовательности Ψ путем аппроксимаций можно построить последовательность выпуклых многогранных поверхностей с геодезическими диаметрами 1 и четными числами вершин, которая тоже будет максимизировать площадь к тому же значению. Заменив эти многогранники пирамидами $M(n)$ с соответствующим числом вершин, получим сплющивающуюся последовательность.

Нам представляется, что гипотеза 2.4 доступнее для доказательства или опровержения, чем общая гипотеза Александрова.

3. Было бы интересно опровергнуть гипотезу 2.4, что, конечно, не опровергнет гипотезу Александрова. Гипотеза 2.4 доказана [7] только при $n = 1$. Интересно доказать ее хотя бы для $n = 2, 3$.

4. В [7] опрометчиво сказано, что, возможно, среди n-вершинных многогранников с геодезическим диаметром 1 при $n \geq 5$ максимизация площади потребует полного вырождения в дважды покрытый многоугольник. Настоящее замечание исправляет эту ошибку.

2.6. О геометрии пирамид $M(n)$. 1. На рис. 4 изображена пирамида $M(n)$. Имеем

$$\varphi = \angle UOA_{i+n} = \frac{\pi}{2n+1}. \tag{1}$$

Требование $PU + UO = 1$ выражается равенством

$$\sqrt{y^2 + x^2\cos^2\varphi} + x\cos\varphi = 1,$$

откуда

$$y = \sqrt{1 - 2x\cos\varphi}, \quad x \geq 0.46. \tag{2}$$

2. Поместим центр сферы S в точку A_{i+n}. Точки O', P', A'_{i+n+1} пересечения сферы S с лучами $A_{i+n}O'$, $A_{i+n}P'$, $A_{i+n}A'_{i+n+1}$ образуют на S сферический треугольник с прямым углом при вершине O' и известными угловыми длинами катетов

$$P'O' = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad A'_{i+n+1}O' = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Отсюда находим

$$\cos\lambda = \cos P'O' \cdot \cos A'_{i+n+1}O' = \frac{x\sin\varphi}{\sqrt{1 - 2x\cos\varphi + x^2}} = \frac{x\sin\varphi}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\psi = \pi - 2\lambda = \pi - 2\arccos\frac{x\sin\varphi}{\sqrt{1 - 2x\cos\varphi + x^2}}. \tag{3}$$

3. Точка B_i, наиболее удаленная по поверхности $\partial M(n)$ от вершины A_i, лежит на апофеме PU и отличается тем, что она соединяется на $\partial M(n)$ с A_i тремя кратчайшими.

Одна из этих кратчайших A_iB_i проходит участок $A_iU = x + x\cos\varphi$ по основанию пирамиды, а затем еще небольшой участок $UB_i = 1 - x - x\cos\varphi$ «вверх» по апофеме PU. Это намечает желаемое положение точки B_i на апофеме PU:

$$PB_i = PU - UB_i = \sqrt{y^2 + x^2\cos^2\varphi} + x + x\cos\varphi - 1$$
$$= \sqrt{1 - 2x\cos\varphi + x^2\cos^2\varphi} - x + x\cos\varphi - 1 = x. \quad (4)$$

Две другие геодезические A_iB_i идут по боковой поверхности пирамиды, симметрично обходя вершину P справа и слева. Второе требование к форме пирамиды $M(n)$ состоит в том, чтобы эти две геодезические тоже были кратчайшими длины 1.

Разрежем боковую поверхность пирамиды $M(n)$ по линии A_iPU на две части. На рис. 5 изображена развертка на плоскость одной из этих половин. Обозначенный на рис. 5 угол равен

$$\alpha = (n + 1/2)\psi. \quad (5)$$

Зная α, из треугольника A_iPB_i находим длину геодезической A_iB_i, идущей по боковой поверхности пирамиды. Выбор $x(n)$ подчиняется требованию, чтобы эта длина оказалась равна 1.

Рис. 5.

4. Пирамида $M(1)$ — один из тетраэдров. В [7] доказано, что среди тетраэдров с геодезическим диаметром 1 наибольшую площадь поверхности имеет правильный тетраэдр с длиной ребер $\sqrt{3}/2$. Убедимся, что это и есть $M(1)$.

Полагаем $n = 1$, $x = 1/2$. По формулам (1)–(5) находим

$$\varphi = \pi/3, \quad y = 1/\sqrt{2}, \quad \psi = \pi/3, \quad PB_i = 1/2, \quad \alpha = \pi/2, \quad A_iP = \sqrt{3}/2.$$

При этих значениях из рис. 5 следует точное равенство $A_iB_i = 1$.

5. Вычисление $x(n)$, $y(n)$ при фиксированном n можно вести последовательными приближениями. Это доказывает существование и единственность многогранников $M(n)$ при каждом n. Но вычисление при больших n потребует растущей точности счета.

Таблица 1

n	$x(n)$	$y(n)$
2	0.469659042	0.489975210
3	0.467085075	0.397921823
4	0.468942261	0.344495045
5	0.471517849	0.308486424
6	0.473997688	0.282049014
7	0.476204300	0.261541226
8	0.478125381	0.245012701
9	0.479791260	0.231311338
10	0.481239510	0.219706796

6. В табл. 1 приведены приближенные значения $x(n)$ и $y(n)$ для $n = 2, \dots, 10$. Эти значения получены по следующей программе.

Фиксируем число n. В качестве нижней и верхней границ для x берем значения $X1 = 0.46$ и $X2 = 0.5$. Цикл счета полагает x равным полусумме нижней и верхней границ. При таком x по формулам (1)–(5) находятся $\varphi, y, \psi, \alpha, A_iP$.

Для треугольника A_iPB_i (рис. 5) вычисляем A_iB_i. Если $A_iB_i > 1$, то верхняя граница заменяется на x, а если $A_iB_i < 1$, то нижняя граница заменяется на x. Цикл повторяется до тех пор, пока не окажется $X2 - X1 < 10^{-7}$.

2.7. Лемма. *При $n \to \infty$ имеет место сходимость $y(n) \to 0$. Иными словами при $n \to \infty$ пирамиды $M(n)$ сплющиваются, а их поверхности сходятся к дважды покрытому кругу.*

Доказательство. Допустим, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y(n) \neq 0$. Тогда существует последовательность n_i, для которой $\lim\limits_{i\to\infty} y(n_i) = y_0 > 0$. Мы вправе считать, что в ней уже выбрана подпоследовательность, для которой значения $x(n_i)$ тоже имеют предел x_0, где $0.46 \leq x_0 \leq 0.5$. Тогда пирамиды $M(n_i)$ сходятся к прямому круговому конусу C с высотой y_0 и радиусом основния x_0.

Подвергнем каждую пирамиду $M(n_i)$ равномерному «вертикальному» растяжению (или сжатию) с коэффициентом $y_0/y(n_i)$, после чего совместим их высоты с высотой OP_0 конуса C . Затем отобразим взаимно однозначно точки боковых поверхностей $\frac{y_0}{y(n_i)}M(n_i)$ на точки боковой поверхности конуса C посредством проектирования от общей оси OP_0. Точки многоугольных оснований пирамид $M(n_i)$ отобразим равномерным растяжением (или сжатием) каждого «радиуса» многоугольника на соответствующий радиус основания конуса C. При таком отображении внутренняя метрика на поверхностях $\partial M(n_i)$ сходится к внутренней метрике на поверхности ∂C.

Пусть A и U — диаметрально противоположные точки на границе основания конуса C . Из сходимости внутренних метрик следует, что на образующей P_0U конуса C на растоянии $P_0B = x_0$ от P должна лежать точка B, соединяющаяся с точкой A на боковой поверхности двумя кратчайшими длины 1. Убедимся, что это невозможно при $y_0 > 0$.

Выделим боковую поверхность конуса C. Разрежем ее по линии AP_0U и одну из двух полученных частей развернем на плоскость (рис. 6). При указанных на рис. 6 обозначениях имеем

$$\alpha = \frac{\pi x_0}{L}, \quad L = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Рис. 6.

Но по формуле (2) $y(n) = \sqrt{1 - 2x(n)\cos\varphi}$. Поскольку $\varphi = \pi/(2n+1) \to 0$ при $n \to \infty$, то $y_0 = \sqrt{1 - 2x_0}$. Поэтому длина L образующей AP_0 конуса равна $L = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 1 - x_0$ и в треугольнике AP_0B для длины кратчайшей имеем $AB < AP_0 + P_0B = 1 - x_0 + x_0 = 1$. $\square$

В действительности $y(n) \to 0$, $x(n) \to 0.5$, поверхности $\partial M(n)$ сходятся к дважды покрытому диску радиуса 0.5.

§ 3. Снова на плоскости

Теорема 1.8 только при *нечетных* n ответила на вопрос о форме n-угольника максимальной площади при диаметре 1. При *четных* n вопрос много сложнее. Мы ограничимся примером $n = 6$.

У максимального шестиугольника нечетное число вершин первого рода либо $m = 5$, либо $m = 3$.

3.1. Начнем со случая $m = 5$. Пусть у шестиугольника $ABCDEF$ пять вершин A, B, C, E, F первого рода. Все попарно соединяющие их диагонали имеют длину 1. Дуги AB, BC, CE, EF, FA радиуса 1 ограничивают пятиугольник Рело ширины 1. Вершина D, единственная вершина второго рода, расположена в середине дуги CE (рис. 7).

Рис. 7. Рис. 8.

Площадь шестиугольника слагается из площади выделенного на рис. 7 четырехугольника $ACDE$ и площади двух треугольников: CAB и EFA.

3.2. Зафиксируем неподвижно как твердую пластину четырехугольник $ACDE$.

Диагонали CF, FB, BE соединим как стержни длины 1 друг с другом и с четырехугольником $ACDE$ четырьмя шарнирами, расположенными в точках C, F, B, E (рис. 8). Эти шарниры позволяют изменять положение диагонали BF.

Выберем декартовы координаты с началом в точке C и осью x вдоль CE (см. рис. 8).

Обозначим

$$\alpha = \angle ECF,\ \beta = \angle BEC,\ \Delta = CE/2.$$

Поскольку диаметр шестиугольника равен 1, имеем $\Delta < 1/2$.

Координаты вершин таковы:

$$A(\Delta, \sqrt{1-\Delta^2}), \quad B(2\Delta - \cos\beta, \sin\beta), \quad C(0,0), \quad E(2\Delta, 0), \quad F(\cos\alpha, \sin\alpha).$$

Значения α и β связаны требованием $\overrightarrow{BF}^2 = 1$. После элементарных преобразований этой связи можно придать вид

$$\cos(\alpha+\beta) = 2\Delta(\cos\alpha + \cos\beta) - \frac{1+4\Delta^2}{2}. \tag{6}$$

3.3. Замечание. 1. Если пятиугольник $ABCEF$ правильный, то $\Delta \simeq 0.309017$. Добавление CDE дает площадь шестиугольника $\simeq 0.672288$. При любом $\Delta \leq 0.309$ площадь шестиугольника $ABCDEF$ будет меньше.

Действительно, по теореме 1.8 отклонение от правильности пятиугольника уменьшит его площадь, а площадь треугольника CDE тоже уменьшится, так как уменьшатся и его основание $CE = 2\Delta$, и его высота. Поэтому далее считаем

$$\Delta \geq 0.309.$$

3.4. Предварительные сведения о введенном шарнирном механизме. Не нарушая общности, считаем $\alpha \geq \beta$. При $\alpha = \beta$ диагональ BF занимает положение $B_0F_0 \parallel EC$, выделенное пунктиром на рис. 8. В этом положении

$\cos\alpha = \cos\beta = \Delta + 1/2$. Угол α может возрастать до значения $\alpha = \angle ECA$, при котором $\cos\alpha = \Delta$.

1. Углы α и β острые. Мы утверждаем, что *при всех положениях угол* $\alpha + \beta$ *тоже острый.*

Достаточно показать, что $\cos(\alpha+\beta) > 0$. Для этого выделим промежуточное значение α, при котором $\cos\alpha = 2\Delta$. В таком положении ребро EF параллельно оси y, поэтому $\sin\beta = \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1+4\Delta^2}$, откуда $\cos\beta = \sqrt{\frac{3}{4} - \Delta^2}$.

На участке от $\cos\alpha = \Delta + 1/2$ до $\cos\alpha = 2\Delta$ значение $\cos\beta$ возрастает от $\Delta + 1/2$. Тем самым

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= 2\Delta(\cos\alpha + \cos\beta) - \frac{1+4\Delta^2}{2} \\ &> 2\Delta\left(2\Delta + \Delta + \frac{1}{2}\right) - \frac{1+4\Delta^2}{2} = 4\Delta^2 + \Delta - \frac{1}{2} > 0.\end{aligned}$$

На участке от $\cos\alpha = 2\Delta$ до $\cos\alpha = \Delta$ значение $\cos\beta$ возрастает от $\sqrt{\frac{3}{4} - \Delta^2}$, тем самым

$$\cos(\alpha+\beta) > 2\Delta\left(\Delta + \sqrt{\frac{3}{4} - \Delta^2}\right) - \frac{1+4\Delta^2}{2} = 2\Delta\sqrt{\frac{3}{4} - \Delta^2} - \frac{1}{2} > 0. \quad \square$$

2. Дифференцируя по α равенство (6), находим

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\sin(\alpha+\beta) - 2\Delta\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta) - 2\Delta\sin\beta}.$$

Учитывая, что $\beta \le \alpha < \alpha + \beta < \pi/2$, заключаем, что при $\alpha > \beta$ скорость возрастания угла α превосходит скорость убывания β, так что в условиях рис. 8 всегда

$$\angle B_0EB < \angle F_0CF. \tag{7}$$

3. При движении шарнирного механизма вершина F движется по дуге радиуса 1 с центром в точке C. Проведем из C луч, ортогональный AE, до его встречи с этой дугой в некоторой точке F'. Аналогично вершина B движется по дуге радиуса 1 с ценром E. Проведем из E луч, ортогональный AC, до встречи с этой дугой в точке B'.

Рис. 9.

В зависимости от выбранного значения Δ отрезок B_0F_0 может располагаться выше, чем $B'F'$, может совпадать с $B'F'$, может лежать ниже, чем $B'F'$ (рис. 9).

Совпадение $B_0F_0 \equiv B'F'$ имеет место при $\Delta_m \simeq 0.411438$. Требование $\alpha + \angle AEC = 90^\circ$ выражается уравнением

$$\arccos(\Delta_m + 1/2) + \arccos(\Delta_m) = 90^\circ,$$

из которого получено приведенное значение Δ_m. В этом положении $\alpha = \beta \simeq 24^\circ.29516$, а площадь шестиугольника $ABCDEF$ приближенно равна 0.66, что меньше, чем при правильности пятиугольника $ABCEF$ (см. разд. 3.3).

Точки B' и F' при фиксированном Δ (см. рис. 9(a)) наиболее удалены соответственно от оснований AC и AE. Если в условиях рис. 9(a) точку F равномерно двигать по дуге $F'A$ от F' к A, то скорость убывания высоты F над AE возрастает по мере приближения к A.

3.5. Лемма о симметричности. *У искомого максимального шестиугольника обязательно $\alpha = \beta$ и значение Δ лежит в следующих пределах:*

$$0.309 < \Delta < \Delta_m \simeq 0.411438. \tag{8}$$

Доказательство. 1. При фиксированном Δ шестиугольник $ABCDEF$ слагается из неизменного четырехугольника $ACDE$ и двух треугольников ABC и AFE. Их площади зависят только от высот точек B и F над единичными основаниями AC и AE этих треугольников.

2. Пусть фиксированное Δ удовлетворяет (8). Тогда мы находимся в условиях рис. 9(a). Пусть угол α возрос от позиции $\alpha = \beta$ и точка β еще не достигла положения B'. При этом точка F_0 перешла в положение F, пройдя дугу $F_0F > B_0B$ (см. (7)). Но согласно п. 3 из разд. 3.4 скорость возрастания высоты B над AC была меньше скорости убывания высоты F над AE, т. е. сумма высот треугольников убывала.

Если же точка B перейдет за точку B', то далее будут убывать высоты обоих треугольников.

3. Пусть $\Delta > \Delta_m$. Тогда мы находимся в условиях рис. 9(c). Площадь такого шестиугольника возрастет, если (независимо от шарниров) переместить вершины B и F в положения B' и F' и одновременно увеличить длину Δ до 1. В таком положении у шестиугольника будет площадь $\simeq 0.633946$.

3.6. Кстати, это будет не рассмотренный в начале § 3 случай $m = 3$, так что нам не надо к нему возвращаться.

3.7. Осталось среди симметричных шестиугольников (рис. 10), где $x = \alpha = \beta$, выбрать наибольший по площади.

Для углов (вместо Δ) границы (8) принимают вид

$$24^\circ.295 < x < 36^\circ.$$

Найдем площадь $f(x)$ такого шестиугольника. Имеем $CF = FB = BE = AB = 1$, $CE = 2\cos x - 1$. Высота трапеции $BCEF$ равна $\sin x$. Площадь этой трапеции равна $(\sin 2x)/2$,

Рис. 10.

$$AH = \sqrt{1-(CH)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \cos x - \cos^2 x}, \quad DH = 1 - AH,$$

откуда площадь треугольника CDE равна

$$\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \sqrt{\frac{3}{4} + \cos x - \cos^2 x}\right).$$

Площадь треугольника ABF равна

$$\frac{1}{2}(AH - \sin x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4} + \cos x - \cos^2 x} - \frac{\sin x}{2}.$$

Вся площадь шестиугольника равна

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin x}{2} + \cos x - \frac{1}{2} + (1 - \cos x)\sqrt{\frac{3}{4} + \cos x - \cos^2 x}.$$

Производная равна

$$\frac{df}{dx} = \cos(2x) - \frac{\cos x}{2} - \sin x + \sin x\sqrt{\frac{3}{4} + \cos x - \cos^2 x} + \frac{(1 - \cos x)(\sin(2x) - \sin x)}{2\sqrt{\frac{3}{4} + \cos x - \cos^2 x}}.$$

Компьютерная программа «График» наглядно показала убывающий характер функции $f'(x)$. Для уточнения мы повторили с помощью той же программы расчеты в более узких пределах. Результат одного из расчетов приведен на рис. 11.

Рис. 11.

Приближенное значение корня уравнения $f'(x) = 0$, полученное с достаточной для наших целей точностью и проверенное подстановкой, таково: $x_0 \simeq 32.459455°$. Ему соответствует приближенное значение максимальной площади $f(x_0) \simeq 0.674975435$. Форма такого шестиугольника весьма близка к рис. 9(a).

3.8. Замечания. 1. Можно было начать с рис. 8, где нужно заменить обозначение одного из углов x на y и, не предполагая симметрии, выразить площадь как функцию двух переменных. Поиск ее максимума дает тот же результат. Но мы хотели сначала обосновать симметрию.

2. Случай $n = 6$ поучителен тем, что у соответствующего результату шестиугольника Рело дуги AF и FE не равные. Это исключает ожидание получить общее решение для всех четных $n \geq 6$ на пути, аналогичном доказательству теоремы 1.8.

3. Вероятно, при четных $n > 6$ максимальный n-угольник тоже имеет только одну вершину второго рода и симметричен относительно прямой, соединяющей эту вершину с противоположной ей. Автор не умеет это доказывать.

Но даже если это будет доказано, поиск максимального n-угольника при больших n потребует вычислений с большим числом переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бляшке В.* Круг и шар. М.: Наука, 1967.
2. *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М.: Фазис, 2002.
3. *Schilling F.* Die Theorie and Konstruktion der Kurven konstanter Breite // Z. Math. Phys. 1914. Bd 63. S. 67–136.

4. *Blaschke W.* Konvexe Bereich gegebener konstanter Breite und kleinsten Inhalts // Math. Ann. 1915. Bd 76. S. 504–513.

5. *Kupitz Ya. S., Martini H.* On the isoperimetric inequalities for Reuleaux polygons // J. Geometry. 2000. V. 68, N 2. P. 179–191.

6. *Yau S. T.* Problem section // Seminar of Differential Geometry. Princeton NJ: Princeton Univ. Press, 1982. (Ann. Math. Stud.; V. 102). P. 684.

7. *Залгаллер В. А.* Одна изопериметрическая задача для тетраэдра // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2005. Т. 329. С. 28–55.

Статья поступила 1 февраля 2009 г.

Залгаллер Виктор Абрамович
The Weizmann Institute of Science
Rehovot, 76100, Israel
Viktor.Zalgaller@gmail.com