

ДИАГОНАЛИ РЯДОВ ЛОРАНА РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Д. Ю. Почекутов

Аннотация. Рассматривается проблема алгебраичности диагональных рядов для разложений Лорана рациональных функций, геометрически идентифицируемых с помощью амебы знаменателя, либо с помощью целочисленной точки из многогранника Ньютона знаменателя. Даются достаточные условия алгебраичности диагоналей на основе теории многомерных вычетов и топологических свойств дополнений наборов комплексных гиперповерхностей на комплексно аналитических многообразиях.

Ключевые слова: диагонали рядов Лорана, амеба гиперповерхности, разделяющий цикл, локальный вычет, интегральные представления, алгебраическая функция.

1. Введение

Диагональные ряды (диагонали) степенных рядов от многих переменных естественно возникают в проблемах алгебраичности и D -финитности сумм степенных рядов [1, гл. 2].

Диагональю степенного ряда (ряда Лорана)

$$F(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha$$

назовем производящую функцию подпоследовательности коэффициентов $\{c_\alpha\}_{\alpha \in L}$, пронумерованной некоторой подрешеткой $L \subset \mathbb{Z}^n$. Такие диагонали будем называть *полными*. Диагонали различают по размерности (рангу) указанной подрешетки. Наибольший интерес представляют два предельных случая: ранга 1 и ранга $n - 1$. Эти два случая и рассматриваются в данной статье для рядов Лорана рациональных функций. В случае ранга 1 полная диагональ естественно разбивается в сумму односторонних диагоналей: подрядов по положительным и отрицательным степеням. Аналогично в произвольном случае можно рассматривать аналог односторонней диагонали как производящую функцию подпоследовательности, пронумерованной некоторой полуподрешеткой $L' \subset L$.

Ранее были изучены лишь диагонали степенных рядов по положительным степеням (т. е. рядов Тейлора):

$$F(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha z^\alpha.$$

Работа выполнена в рамках гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ 2427.2008.01), а также грантов Сибирского федерального университета и Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (2.1.1/4620).

В этом случае известно (см. [2, 3], а также расширенную библиографию в [1]), что любая диагональ рациональной функции над конечным полем всегда является алгебраической функцией. Диагонали двумерного ряда Тейлора комплексной рациональной функции также являются алгебраическими функциями [2]. В [4] показано, что диагональ D -финитного степенного ряда является D -финитной. Напомним, что ряд F называется D -финитным, если все производные F порождают конечномерное векторное пространство над полем рациональных функций.

Для исследования диагоналей лорановских рядов рациональных функций в настоящей статье используется геометрический способ идентификации этих рядов с помощью амёбы полярной гиперповерхности исходной рациональной функции либо с помощью целочисленной точки из многогранника Ньютона ее знаменателя (подробнее см. п. 2). В п. 3 доказано, что полная диагональ рациональной функции двух переменных всегда является алгебраической. В то же время односторонняя диагональ может быть трансцендентной. В п. 4 доказано, что полная $(n - 1)$ -мерная диагональ является алгебраической функцией.

2. Одномерные диагонали и их интегральные представления

Пусть дана рациональная функция n переменных

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_1, \dots, z_n)}{Q(z_1, \dots, z_n)},$$

где P и Q — несократимые полиномы. Рассмотрим произвольный ряд Лорана для F с центром в нуле:

$$F(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}. \tag{1}$$

В $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ зафиксируем направление q , которое определяет две диагональные подпоследовательности $\{c_{l \cdot q}\}_{l \in \mathbb{Z}_+}$ и $\{c_{l \cdot q}\}_{l \in \mathbb{Z}_-}$ кратной последовательности $\{c_\alpha\}$ (для определенности полагаем, что \mathbb{Z}_+ — это множество неотрицательных целых чисел, а \mathbb{Z}_- — множество отрицательных целых чисел).

Производящие функции

$$d_q^\pm(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}_\pm} c_{l \cdot q} t^l \tag{2}$$

указанных подпоследовательностей назовем *односторонними q -диагоналями ряда* (1). Соответственно сумму $d_q^+ + d_q^-$ назовем *полной q -диагональю*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Фактически достаточно изучать лишь диагонали для направления $q_0 = (1, \dots, 1)$. В самом деле, унимодулярным преобразованием $\beta = A\alpha$ решетки \mathbb{Z}^n любой несократимый вектор $q \in \mathbb{Z}^n$ можно перевести в q_0 . Соответственно биномиальная замена переменных $w = z^A$ сохранит свойство рациональности функции $F(z)$.

В случае, когда F голоморфна в начале координат (т. е. $Q(0) \neq 0$), один из рядов Лорана функции $F(z)$ — это ее ряд Тейлора с центром в нуле и для каждого $q \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$ полная диагональ $d_q(t)$ совпадает с односторонней $d_q^+(t)$. Согласно [5] для q -диагонали ряда Тейлора справедливо интегральное представление

$$d_q(t) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_\rho} F(z) \frac{z^q}{z^q - t} \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_n}{z_n}, \tag{3}$$

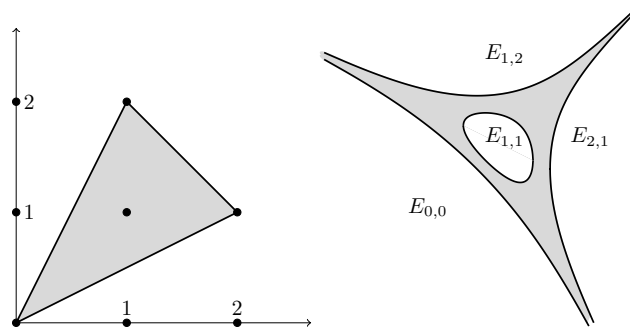


Рис. 1. Многогранник Ньютона (слева), амеба и компоненты дополнения E_ν (справа) для многочлена $Q = z_1^2 z_2 - 4z_1 z_2 + z_1 z_2^2 + 1$.

где z^q — моном $z_1^{q_1} \dots z_n^{q_n}$, цикл

$$\Gamma_\rho = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| = \rho_1, \dots, |z_n| = \rho_n\}$$

выбирается так, что

а) в замкнутом поликруге

$$\bar{U}_\rho = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| \leq \rho_1, \dots, |z_n| \leq \rho_n\}$$

нет полюсов функции $F(z)$;

б) $\rho^q > |t|$.

Чтобы получить интегральное представление для диагональных рядов произвольных рядов Лорана (1), отметим, что области сходимости последних логарифмически выпуклые (доказывается так же, как для рядов Тейлора, см., например, [6, п. 3]). Эти области сходимости представляют собой в логарифмической шкале связанные компоненты дополнения так называемой амебы гиперповерхности полюсов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [7, п. 6.1]. Амебой \mathcal{A}_V алгебраической гиперповерхности

$$V = \{z \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n : Q(z) = 0\}$$

(или полинома Q) называется образ V при отображении $\text{Log} : (\mathbb{C} \setminus 0)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенном формулой

$$\text{Log} : (z_1, \dots, z_n) \rightarrow (\log |z_1|, \dots, \log |z_n|).$$

Термин «амеба» мотивирован специфичным видом \mathcal{A}_V в случае $n = 2$ — это фигура с тонкими щупальцами, уходящими на бесконечность (рис. 1).

Обозначим, через $N(Q)$ многогранник Ньютона полинома Q , т. е. выпуклую оболочку в \mathbb{R}^n всех показателей мономов, участвующих в полиноме Q . Известно [8], что на множестве связанных компонент $\{E\}$ дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ существует инъективная функция порядка

$$\nu : \{E\} \rightarrow \mathbb{Z}^n \cap N(Q)$$

такая, что двойственный конус $C_{\nu(E)}^\vee$ к многограннику Ньютона в точке $\nu(E)$ есть конус рецессии компоненты E (напомним, что конус рецессии выпуклого множества E — это наибольший конус, который некоторым сдвигом можно поместить в E). Таким образом, дополнение $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ состоит из конечного числа связанных выпуклых компонент, которые можно перечислять (кодировать) в

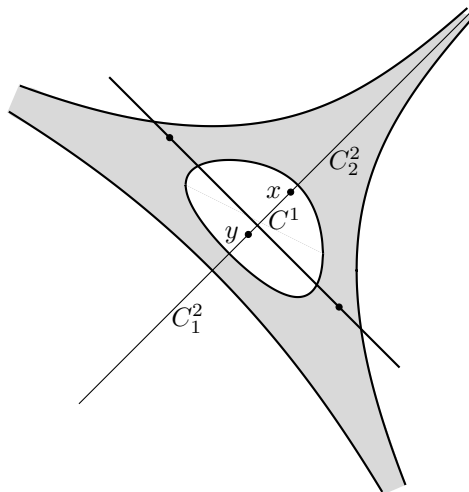


Рис. 2. Амебы полиномов Q (затемненная) и $z_1 z_2 - t$ (жирная прямая), цепи C^1 , $C^2 = C_1^2 + C_2^2$.

виде E_ν с помощью целочисленных векторов $\nu \in N(Q)$. Имеется взаимно однозначное соответствие между связными компонентами $\{E_\nu\}$ дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ и разложениями Лорана (с центром в нуле) несократимой дроби $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ (см. [7, п. 6.1]). Множества $\text{Log}^{-1}(E_\nu)$ и есть области сходимости соответствующих разложений Лорана.

В случае двух переменных конусом рецессии компоненты E_ν может быть плоский двумерный конус (когда ν — вершина $N(Q)$), луч (когда ν — целочисленная точка на внутренности ребра из $N(Q)$) и точка (когда ν — внутренняя целочисленная точка $N(Q)$).

Предложение 1. Пусть ряд Лорана (1) сходится в области $\text{Log}^{-1}(E)$, где E — связная компонента дополнения к амебе гиперповерхности $V = \{Q = 0\}$, и пусть x, y — две любые точки из E такие, что для выбранного направления $q \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ выполняется неравенство $\langle y, q \rangle < \langle x, q \rangle$. Тогда для полной диагонали $d_q(t)$ ряда Лорана (1) справедливо интегральное представление

$$d_q(t) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{z^q}{z^q - t} \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_n}{z_n},$$

где $e^{\langle y, q \rangle} < |t| < e^{\langle x, q \rangle}$, $\Gamma = \text{Log}^{-1}(x) - \text{Log}^{-1}(y)$.

Логарифмический образ гиперболы $z_1^{q_1} z_2^{q_2} = t$ разбивает компоненту E на две части. Указанное неравенство говорит о том, что точки x и y выбираются из различных частей этого разбиения (рис. 2).

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I_x(t) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{z^q}{z^q - t} \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_n}{z_n}$$

и подставим вместо дроби $\frac{P(z)}{Q(z)}$ соответствующий ей ряд Лорана (1), а вместо дроби $\frac{1}{z^q - t}$ — ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положи-

тельными степенями t . Тогда при $|t| < e^{\langle x, q \rangle}$ получим

$$I_x(t) = \frac{1}{(2\pi t)^n} \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n} c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{z_1^{q_1 k-1} \dots z_n^{q_n k-1}} dz.$$

Очевидно, что ненулевой вклад в данный интеграл внесут только мономы с коэффициентами c_{kq_1, \dots, kq_n} при $k > 0$, таким образом, данный интеграл равен

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{kq_1, \dots, kq_n} t^k = d_q^+(t).$$

Аналогично, раскладывая в интеграле I_y по $\text{Log}^{-1}(y)$ дробь $\frac{1}{z^q - t}$ в ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии с отрицательными степенями t , при $|t| > e^{\langle y, q \rangle}$ получим $-d_q^-(t)$.

Разность интегралов $I_x - I_y$ и будет полной диагональю

$$d_q(t) = d_q^+(t) + d_q^-(t)$$

ряда Лорана (1).

3. Диагонали для рациональных функций двух переменных

Пусть F — рациональная функция двух переменных, представленная несократимой дробью

$$F(z_1, z_2) = \frac{P(z_1, z_2)}{Q(z_1, z_2)}.$$

Рассмотрим ее произвольный ряд Лорана с центром в нуле:

$$F(z_1, z_2) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2} c_{\alpha_1 \alpha_2} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}. \quad (4)$$

Как отмечалось выше, в предположении несократимости дроби $\frac{P}{Q}$, этот ряд сходится в области $\text{Log}^{-1}(E)$, соответствующей компоненте E из дополнения $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}_V$.

Теорема 1. Для любого $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ полная диагональ

$$d_q(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{kq_1, kq_2} t^k$$

всякого ряда Лорана (4) является алгебраической функцией.

Для доказательства нам потребуются сведения из теории многомерных вычетов и понятие циклов, разделяющих наборы комплексных гиперповерхностей на комплексных аналитических многообразиях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [9, п. 9]. Пусть S_1, \dots, S_n — n гиперповерхностей (дивизоров) на n -мерном комплексном аналитическом многообразии X . Цикл $\Gamma \in Z_n(X \setminus (S_1 \cup \dots \cup S_n))$ размерности n называется *разделяющим дивизором* S_1, \dots, S_n , если $\Gamma \sim 0$ в областях

$$X \setminus (S_1 \cup \dots \cup [j] \cup \dots \cup S_n), \quad j = 1, \dots, n.$$

В монографии [9, п. 9] доказан следующий критерий разделяющих циклов.

Теорема А. Если $H_{2n-1}(X) \simeq 0$ и $X \setminus S_j$ — штейново многообразие для всех $j = 1, \dots, n$, то цикл Γ разделяет дивизоры тогда и только, когда он представляется в виде линейной комбинации

$$\sum_{a \in S_1 \cap \dots \cap S_n} n_a \Gamma_a$$

локальных циклов

$$\Gamma_a = \{z \in U_a : |f_j(z)| = \varepsilon_j, j = 1, \dots, n\},$$

где $\{f_j = 0\} = S \cap U_a$, т. е. f_j — функция, локально определяющая S_j в некоторой окрестности U_a изолированной точки a пересечения $S_1 \cap \dots \cap S_n$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае двух переменных эта теорема доказана без требования штейновости дополнений $X \setminus S_1$ и $X \setminus S_2$ [9, п. 9].

Локальный цикл Γ_a участвует в определении локального вычета (вычета Гротендика), ассоциированного с голоморфным отображением (или векторным полем) $f = (f_1, \dots, f_n)$. Условие алгебраичности локального вычета, зависящего от параметра, дает следующий результат (см. [10] или [9, п. 10]).

Теорема В. Пусть $f_1(z, t), \dots, f_n(z, t)$ — полиномы переменных $z \in \mathbb{C}^n, t \in \mathbb{C}^m$, которые при $t = t^0$ имеют изолированный общий нуль $z = a$. Тогда интеграл рациональной формы

$$\int_{\Gamma_a} \frac{h(z, t) dz}{f_1(z, t) \cdot \dots \cdot f_n(z, t)}$$

по локальному циклу Γ_a определяет аналитический элемент алгебраической функции по t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Согласно предложению 1 для $d_q(t)$ справедливо интегральное представление

$$d_q(t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{P(z_1, z_2)}{Q(z_1, z_2)} \frac{z_1^{q_1-1} z_2^{q_2-1}}{z_1^{q_1} z_2^{q_2} - t} dz_1 dz_2 \tag{5}$$

по циклу $\Gamma = \text{Log}^{-1}(x) - \text{Log}^{-1}(y)$, где $x, y \in E$, причем $e^{\langle y, q \rangle} < |t| < e^{\langle x, q \rangle}$.

Рассмотрим подынтегральную дифференциальную форму в (5) в проективной компактификации $\mathbb{C}P^2$ пространства \mathbb{C}^2 . В зависимости от степени полинома P эта форма может иметь полюс на бесконечно удаленной прямой $\mathbb{P}_{\infty} = \mathbb{C}P^2 \setminus \mathbb{C}^2$. Разобьем семейство трех дивизоров на две группы

$$S_1 = \overline{\{Q = 0\}} \cup \mathbb{P}_{\infty}, \quad S_2 = \overline{\{z^q - t = 0\}},$$

где черта означает замыкание в $\mathbb{C}P^2$ соответствующего аффинного множества, и докажем, что Γ разделяет S_1 и S_2 .

Имеем $\Gamma = \partial C^1$, где цепь $C^1 = \text{Log}^{-1} \gamma$ — это прообраз отрезка $\gamma = [x, y]$, соединяющего точки x и y . Компонента E выпуклая, следовательно, $\gamma \cap \mathcal{A}_V = \emptyset$, поэтому прообраз $\text{Log}^{-1} \gamma$ отрезка не пересекает $\{Q = 0\}$. Отсюда заключаем, что $C^1 \cap S_1 = \emptyset$.

Аналогично $\Gamma = \partial C^2$, где $C^2 = \overline{\text{Log}^{-1}(r_+ \cup r_-)}$. Здесь r_{\pm} — лучи, выходящие из точек x и y соответственно и являющиеся продолжением отрезка γ , а замыкание берется в $\mathbb{C}P^2$. Точки x и y лежат в разных частях разбиения

компоненты E логарифмическим образом гиперболы $\{z^q - t = 0\}$. Поэтому $C^2 \cap S_2 = \emptyset$.

Заметим, что $\mathbb{C}P^2 \setminus S_j, j = 1, 2$, являются штейновыми многообразиями (см., например, [11]) и $H_3(\mathbb{C}P^2) \simeq 0$ (напомним, что комплексные проективные пространства допускают клеточные разбиения лишь с четномерными клетками).

Таким образом, многообразие $X = \mathbb{C}P^2$ и дивизоры S_1, S_2 удовлетворяют условию теоремы А, а цикл Γ разделяет дивизоры S_1 и S_2 . Согласно теореме А он представим в виде линейной комбинации локальных циклов

$$\Gamma = \sum_{a \in S_1 \cap S_2} c_a \Gamma_a.$$

Тем самым интеграл (5) равен линейной комбинации локальных вычетов от рациональной формы, которые по теореме В являются алгебраическими функциями. Линейная комбинация алгебраических функций является алгебраической функцией.

Теорема 2. Для любого $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ односторонняя диагональ ряда Лорана (4), связанного с неограниченной компонентой E , является алгебраической функцией.

Следующий пример показывает, что теорема 2 неверна для рядов, соответствующих ограниченному компонентам E_ν .

ПРИМЕР. Рассмотрим рациональную функцию двух переменных

$$F(z_1, z_2) = \frac{P(z_1, z_2)}{Q(z_1, z_2)} = \frac{1}{z_1^2 z_2 - 4z_1 z_2 + z_1 z_2^2 + 1}.$$

Заметим, что на единичном остове $|z_1| = |z_2| = 1$ модуль монома $4z_1 z_2$ больше суммы модулей трех остальных мономов, поэтому точка $(0, 0) = (\log 1, \log 1)$ не принадлежит амбе полинома Q и, более того, она лежит в компоненте с порядком $\nu = (1, 1)$ (см. [8, предложение 2.7]). Так как точка $(1, 1)$ — внутренняя точка многогранника Ньютона $N(Q)$, то $E_{1,1}$ — ограниченная компонента.

Разложение Лорана для F в $\text{Log}^{-1}(E_{1,1})$ следующее:

$$\begin{aligned} F(z_1, z_2) &= -\frac{1}{4z_1 z_2} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1 + z_1 z_2^2 + z_1^2 z_2}{4z_1 z_2} \right)^k \\ &= -\frac{1}{4z_1 z_2} \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{N}^2} \frac{(k_1 + k_2)!}{k_1! k_2!} \frac{(z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2)^{k_1}}{(4z_1 z_2)^{k_1 + k_2}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} c_{\alpha_1, \alpha_2} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}, \end{aligned}$$

где

$$c_{\alpha_1, \alpha_2} = \sum_{k \in \mathbb{N}^2: k_1 - 2k_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2} \frac{1}{4^{k_1 + k_2 + 1}} \binom{k_1 + k_2}{k_1} \binom{\alpha_2 + k_2 + 1}{k_1}.$$

Согласно предложению 1 полная $(1, 1)$ -диагональ для $F(z_1, z_2)$ выражается следующим интегралом:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{1}{z_1^2 z_2 - 4z_1 z_2 + z_1 z_2^2 + 1} \frac{dz_1 dz_2}{z_1 z_2 - t}, \tag{6}$$

где $\Gamma = \text{Log}^{-1}(x) - \text{Log}^{-1}(y)$, точки x и y выбираются в $E_{1,1}$ по разные стороны от амбы гиперболы $z_1 z_2 = t$, как показано на рис. 2.

Ввиду высокой степени знаменателя в (6) бесконечно удаленная прямая \mathbb{P}_∞ не является полярным дивизором для подинтегрального выражения, т. е. в $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ полярными дивизорами служат замыкания аффинных кривых $\{z_1^2 z_2 - 4z_1 z_2 + z_1 z_2^2 + 1 = 0\}$, $\{z_1 z_2 - t = 0\}$.

В данной ситуации $\Gamma = \partial C^k$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus S_k$, $k = 1, 2$, где C^1 и $C^2 = C_1^2 + C_2^2$ представляются отрезком и лучами в логарифмической шкале (см. рис. 2). Цепь $C^2 - C^1$ ограничивает область $G \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, которая на рисунке представляется полуплоскостью слева от прямой, составленной из C^1 , C^2 (ввиду симметрии можно считать, что $C^2 - C^1$ — это замыкание вещественной гиперплоскости $|z_1| = |z_2|$, а G — внутренность замыкания множества $|z_1| > |z_2|$). Согласно [9, п. 9, следствие 1] интеграл (6) равен сумме локальных вычетов по точкам пересечения дивизоров S_1 и S_2 , лежащим в области G . В область G попадают одна из конечных точек

$$p_\pm(t) = \left(\frac{2t^2}{4t - 1 \pm s(t)}, \frac{4t - 1 \pm s(t)}{2t} \right), \text{ где } s(t) = \sqrt{1 - 8t + 16t^2 - 4t^3},$$

пересечения $S_1 \cap S_2$ и бесконечно удаленная точка $(1 : 0 : 0)$.

Оказываются, вычеты в обеих точках на бесконечности равны нулю. Следовательно, полная $(1, 1)$ -диагональ указанного разложения Лорана равна вычету в точке $p_+(t)$, который по формуле Коши равен

$$d_{(1,1)}(t) = \frac{1}{J(p_+(t))} = \frac{4t + s(t) - 1}{4t^3 - 16t^2 + 8t - 4ts(t) + s(t) - 1},$$

где J — якобиан полиномов Q и $z_1 z_2$. Таким образом, полная диагональ является алгебраической функцией.

Докажем, что односторонняя диагональ, выраженная интегралом

$$d_{(1,1)}^-(t) = -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\text{Log}^{-1}(y)} \frac{1}{z_1^2 z_2 - 4z_1 z_2 + z_1 z_2^2 + 1} \frac{dz_1 dz_2}{z_1 z_2 - t},$$

является неалгебраической функцией.

Этот интеграл можно свести к интегралу по 1-циклу на римановой поверхности $V = \{z \in \mathbb{C}^2 : z_1^2 z_2 - 4z_1 z_2 + z_1 z_2^2 + 1 = 0\}$, представив цикл интегрирования $\text{Log}^{-1}(y)$ в виде трубки над 1-циклом на V . Следуя схеме из предложения 6 статьи [12], получаем, что таким 1-циклом можно взять $\sigma = V \cap C_1^2$.

Тогда согласно формуле Лере [13, п. 16]

$$d_{(1,1)}^-(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{dz_2}{(2z_1 z_2 - 4z_1 + z_1^2)(z_1 z_2 - t)} \Big|_V. \tag{7}$$

Уточним расположение σ на римановой поверхности V . Амеба \mathcal{A}_V имеет максимальное количество компонент дополнения, и ее граница $\partial \mathcal{A}_V$ гладкая, тогда Log -проекция V на \mathcal{A}_V является $2 \rightarrow 1$ -отображением, а у точек границы $\partial \mathcal{A}_V$ имеется только один прообраз (см. [12]). Поэтому цикл σ является поднятием на V отрезка $C_1^2 \cap \mathcal{A}_V$, соединяющего ограниченную компоненту $E_{1,1}$ с компонентой $E_{0,0}$. На римановой поверхности V он соответствует одному из канонических разрезов тора (см. рис. 3 на развертке тора, представляющей эллиптическую кривую V).

Гипербола пересекает кривую V в точках $p_\pm(t)$, сливающихся при $t_j \in \mathbb{C}$ таких, что $s(t_j) = 0$, $j = 1, 2, 3$. Геометрически это соответствует ситуации,

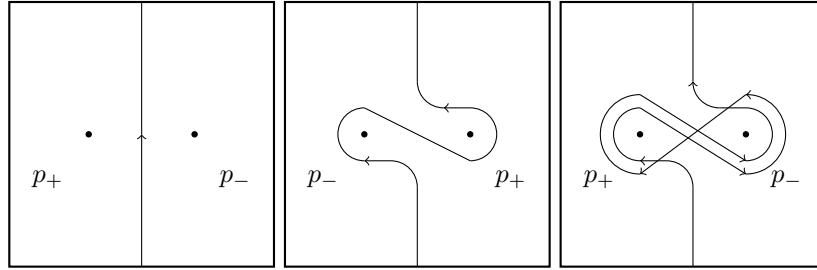


Рис. 3. Цикл σ (меридиан тора на левом рисунке) и его поведение при обходе параметра t вдоль γ и 2γ .

когда гипербола касается кривой V . Если t_j пронумерованы так, что $|t_1| < |t_2| < |t_3|$, то нас интересует значение t_2 , при котором на рис. 2 логарифмический образ гиперболы касается нижней границы ограниченной компоненты $E_{1,1}$ (при таком значении t цикл $\text{Log}^{-1}(y)$ становится «зажимающимся»).

Пусть γ — окружность малого радиуса вокруг точки t_2 . Проследим на развертке тора для V (рис. 3) поведение цикла σ при обходе параметра t вдоль петли γ . При однократном обходе вдоль γ точки p_- и p_+ переставляются местами, а вариация цикла $\text{var}_\gamma \sigma$ равна $\sigma_1 - \sigma_2$, где σ_1, σ_2 — петли вокруг точек p_+ и p_- соответственно. При двухкратном обходе вдоль γ точки $p_\pm(t)$ два раза меняются местами, а $\text{var}_\gamma \sigma = 2(\sigma_1 - \sigma_2)$.

Заметим, что $J(p_+(t)) = -J(p_-(t))$, поэтому

$$d_{(1,1)}(t) = \int_{\sigma_1} \frac{dz_2}{(2z_1z_2 - 4z_1 + z_1^2)(z_1z_2 - t)} \Big|_V = - \int_{\sigma_2} \frac{dz_2}{(2z_1z_2 - 4z_1 + z_1^2)(z_1z_2 - t)} \Big|_V.$$

Таким образом, при аналитическом продолжении вдоль петли γ аналитический элемент $d_{(1,1)}^-(t)$, заданный интегралом (7), переходит в $d_{(1,1)}^-(t) + 2d_{(1,1)}(t)$, а при продолжении вдоль петли 2γ он переходит в $d_{(1,1)}^-(t) + 4d_{(1,1)}(t)$. При k -кратном обходе γ аналитический элемент будет получать приращение, равное $2kd_{(1,1)}(t)$.

Алгебраическая функция не может иметь такого ветвления. Следовательно, односторонняя диагональ $d_{(1,1)}^-(t)$ является неалгебраической функцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Аналогично доказательству теоремы 1 покажем, что в интегральном представлении для односторонней диагонали цикл, по которому введется интегрирование, является разделяющим. Тогда согласно теореме А он представим в виде линейной комбинации локальных циклов, вычеты по которым являются алгебраическими функциями параметра (теорема В).

Пусть гиперповерхность задается в торе знаменателем функции $F(z)$:

$$V = \{z \in \mathbb{T}^2 : Q(z) = 0\}.$$

Для доказательства удобно рассматривать торическую компактификацию \mathbb{X} пространства \mathbb{T}^2 , построенную по многограннику Ньютона $N(Q)$, точнее, по вееру Σ , двойственному к $N(Q)$ (см. [14]).

Заметим, что нечетномерные гомологии компактного торического многообразия являются тривиальными, в частности, $H_3(\mathbb{X}) \simeq 0$ [14, п. 4.5].

Моментное отображение μ переводит \mathbb{X} в многоугольник Ньютона $N(Q)$ (рис. 4), при этом \mathbb{T}^2 переводится во внутренность $N(Q)$ [7, п. 6.1].

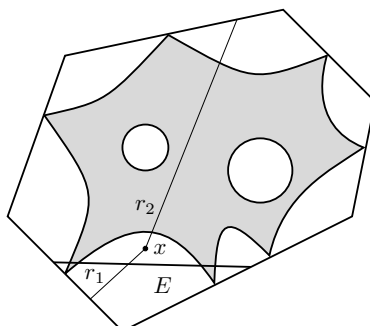


Рис. 4. Компактифицированные амобы для Q (затемненная часть) и $z_1^{q_1} z_2^{q_2} - t$ (жирный отрезок).

Полином $Q(z)$ определяет в \mathbb{X} гиперповерхность \bar{V} . Образ $\mu(\bar{V}) \subset N(Q)$ называется *компактифицированной амобой*. Типичное расположение компактифицированной амобы относительно $N(Q)$ представлено на рис. 4.

Рассмотрим первый случай, когда E — компонента с невырожденным конусом рецессии. Выберем точку $x \in E$, как показано на рис. 4. Интеграл

$$I = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \frac{P(z_1, z_2)}{Q(z_1, z_2)} \frac{z_1^{q_1-1} z_2^{q_2-1}}{z_1^{q_1} z_2^{q_2} - t} dz_1 dz_2 \tag{8}$$

равен какой-то из односторонних диагоналей с точностью до знака (см. доказательство предложения 1).

Пусть D_i — \mathbb{T}_N -инвариантный дивизор, являющийся замыканием 1-мерных орбит [14]. Некоторые \mathbb{T}_N -инвариантные дивизоры являются потенциально полярными для подынтегральной формы в (8). При моментном отображении \mathbb{T}_N -инвариантные дивизоры D_i переходят в ребра $\mu(D_i)$ многоугольника $N(Q)$.

Пусть соседние щупальцы амобы, разделенные компонентой E , пересекают $\mu(D_i)$ и $\mu(D_j)$.

Разобьем семейство полярных дивизоров в (8) на две группы. Пусть дивизор S_1 состоит из \bar{V} и нескольких \mathbb{T}_N -инвариантных дивизоров (среди которых нет D_i и D_j), а S_2 состоит из замыкания в \mathbb{X} гиперболы $\{z^q - t = 0\}$ и дивизоров D_i, D_j .

Докажем, что цикл $\Gamma = \text{Log}^{-1}(x)$ разделяет дивизоры S_1 и S_2 .

Имеем $\Gamma = \partial C^{(1)}$, где цепь $C^{(1)} = \overline{\text{Log}^{-1}(r_1)}$, r_1 — это выходящий из точки x луч, лежащий в компоненте E и пересекающий прямую $\langle q, u \rangle = \log |t|$. Луч не пересекает амобу, поэтому его прообраз не будет пересекать $Q = 0$. Таким образом, $C^{(1)} \cap S_1 = \emptyset$.

Аналогично $\Gamma = \partial C^{(2)}$, где цепь $C^{(2)} = \overline{\text{Log}^{-1}(r_2)}$, r_2 — это выходящий из точки x луч, противоположно направленный лучу r_1 . Луч r_2 не пересекает $\langle q, u \rangle = \log |t|$. Следовательно, $C^{(2)} \cap S_2 = \emptyset$.

Таким образом, цикл Γ разделяет дивизоры S_1, S_2 .

Повторяя рассуждения, завершающие доказательство теоремы 1, получаем, что одна из односторонних диагоналей является алгебраической. Согласно теореме 1 полная диагональ, равная сумме двух односторонних, является алгебраической. Следовательно, и другая односторонняя диагональ есть алгебраическая функция.

Рассмотрим второй случай, когда E — компонента, у которой конус рецессии есть луч, и прямая $\langle q, u \rangle = \log |t|$ разбивает E на неограниченную и ограниченную части. Выберем точку x из ограниченной части, тогда интеграл

$$I = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \frac{P(z_1, z_2)}{Q(z_1, z_2)} \frac{z_1^{q_1-1} z_2^{q_2-1}}{z_1^{q_1} z_2^{q_2} - t} dz_1 dz_2$$

равен одной из односторонних диагоналей с точностью до знака.

Пусть соседние щупальцы амебы, разделенные компонентой E , пересекают $\mu(D_i)$.

Докажем, что $\Gamma = \text{Log}^{-1}(x)$ разделяет дивизоры S_1 , состоящий из \overline{V} и нескольких \mathbb{T}_N -инвариантных дивизоров (среди которых нет D_i), и S_2 , состоящий из замыкания в \mathbb{X} гиперболы $\{z^q - t = 0\}$ и дивизора D_i .

Имеем $\Gamma = \partial C^{(1)}$, где цепь $C^{(1)} = \overline{\text{Log}^{-1}(r_1)}$, r_1 — это выходящий из точки x луч, лежащий в компоненте E и пересекающий прямую $\langle q, u \rangle = \log |t|$. Прообраз r_1 не будет пересекать $Q = 0$, так как сам луч не пересекает амебу. Таким образом, $C^1 \cap S_1 = \emptyset$.

Аналогично $\Gamma = \partial C^{(2)}$, где цепь $C^{(2)} = \overline{\text{Log}^{-1}(r_2)}$, r_2 — это выходящий из точки x луч, противоположно направленный лучу r_1 . Луч r_2 не пересекает $\langle q, u \rangle = \log |t|$. Следовательно, $C^2 \cap S_2 = \emptyset$. Значит, цикл Γ разделяет дивизоры S_1, S_2 . Тогда, как и в предыдущем случае, получаем, что односторонняя диагональ является алгебраической функцией.

Рассмотрим третий случай, когда E — компонента, у которой конус рецессии есть луч, и прямая $\langle q, u \rangle = \log |t|$ разбивает E на две неограниченные части. Выберем точку $x \in E$ из компоненты, тогда интеграл

$$I = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \frac{P(z_1, z_2)}{Q(z_1, z_2)} \frac{z_1^{q_1-1} z_2^{q_2-1}}{z_1^{q_1} z_2^{q_2} - t} dz_1 dz_2$$

равен какой-то из односторонних диагоналей с точностью до знака.

Пусть соседние щупальцы амебы, разделенные компонентой E , пересекают $\mu(D_i)$.

Докажем, что $\Gamma = \text{Log}^{-1}(x)$ разделяет дивизоры S_1 , состоящий из \overline{V} , замыкания в \mathbb{X} гиперболы $\{z^q - t = 0\}$ и нескольких \mathbb{T}_N -инвариантных дивизоров (среди которых нет D_i), и S_2 , состоящий из \mathbb{T}_N -инвариантного дивизора D_i .

Имеем $\Gamma = \partial C^{(1)}$, где цепь $C^{(1)} = \overline{\text{Log}^{-1}(r_1)}$, r_1 — это выходящий из точки x луч, лежащий в компоненте E , следовательно, не пересекающий прямую $\langle q, u \rangle = \log |t|$. Прообраз r_1 не будет пересекать $Q = 0$, так как r_1 не пересекает амебу. Таким образом, $C^1 \cap S_1 = \emptyset$.

Аналогично $\Gamma = \partial C^{(2)}$, где цепь $C^{(2)} = \overline{\text{Log}^{-1}(r_2)}$, r_2 — это выходящий из точки x луч, перпендикулярный конусу рецессии. Очевидно, что $C^2 \cap S_2 = \emptyset$. Тем самым цикл Γ разделяет дивизоры S_1, S_2 . Так же, как и в первом случае, получаем, что односторонняя диагональ является алгебраической функцией.

4. Полные диагонали ранга $n - 1$ (примитивные диагонали)

Рассмотрим для ряда Лорана (1) следующую $(n - 1)$ -мерную диагональ:

$$I_{12} := \sum_{(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}} c_{\alpha_2, \alpha_2, \dots, \alpha_n} t_2^{\alpha_2} t_3^{\alpha_3} \dots t_n^{\alpha_n}. \quad (9)$$

В статье [3], где такие диагонали рассматриваются для степенных рядов по положительным степеням, они названы *примитивными*. По аналогии назовем (9) *полной примитивной* диагональю ряда Лорана (1).

Заметим, что полная $(1, \dots, 1)$ -диагональ является композицией примитивных, например, при $n = 3$

$$d_{(1,1,1)}(t) = I_{23}(I_{12}(F)).$$

Для краткости обозначим $(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ через α' . Вся решетка \mathbb{Z}^{n-1} представляется дизъюнктивной суммой ортаэдров $\mathbb{Z}^{n-1} = \bigcup_{\varepsilon} \mathbb{Z}_{\varepsilon_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{\varepsilon_n}$, где $\varepsilon = (\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ с компонентами $\varepsilon_j = \pm 1$, а $\mathbb{Z}_{\varepsilon_j}$ равно \mathbb{Z}_+ , если $\varepsilon_j = +1$, и \mathbb{Z}_- , если $\varepsilon_j = -1$.

Соответственно диагональ I_{12} представляется суммой ортаэдральных диагоналей $I_{12} = \sum_{\varepsilon} I_{12}^{\varepsilon}$, где

$$I_{12}^{\varepsilon} = \sum_{\alpha' \in \mathbb{Z}_{\varepsilon_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{\varepsilon_n}} c_{\alpha_2 \alpha'} t^{\alpha'}.$$

В случае $n = 2$ ортаэдральные диагонали I_{12}^{\pm} совпадают с односторонними диагоналями $d_{(1,1)}^{\pm}$.

Пусть ряд Лорана (1) сходится в области $\text{Log}^{-1}(E)$, где E — связная компонента дополнения амобы для Q . Выберем $t = (t_2, \dots, t_n)$ так, чтобы плоскости (амобы полиномов $z_1 z_2 - t_2, z_3 - t_3, \dots, z_n - t_n$)

$$u_1 + u_2 = \log |t_2|, \quad u_3 = \log |t_3|, \dots, u_n = \log |t_n|$$

пересекались в некоторой точке из E .

Предложение 2. Пусть x^{ε} — произвольная точка из пересечения E с конусом

$$\varepsilon_2(e^{x_1+x_2} - |t_2|) > 0, \quad \varepsilon_3(e^{x_3} - |t_3|) > 0, \dots, \varepsilon_n(e^{x_n} - |t_n|) > 0.$$

Тогда для полной примитивной диагонали (9) ряда Лорана (1) в $\text{Log}^{-1}(E)$ справедливо интегральное представление

$$I_{12} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{dz}{(z_1 z_2 - t_2)(z_3 - t_3) \dots (z_n - t_n)}, \quad (10)$$

где $\Gamma = \sum_{\varepsilon} (\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n) \text{Log}^{-1}(x^{\varepsilon})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем для определенности считать, что точка x^{ε} такая, что $\varepsilon_j = +1$ при $j = \overline{2, m}$ и $\varepsilon_j = -1$ при $j = \overline{m+1, n}$.

Рассмотрим интеграл

$$I_{x^{\varepsilon}}(t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\text{Log}^{-1}(x^{\varepsilon})} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{dz}{(z_1 z_2 - t_2)(z_3 - t_3) \dots (z_n - t_n)}.$$

Подставим в интеграл вместо дроби F ее ряд Лорана (1), вместо дроби $\frac{1}{z_1 z_2 - t_2}$ — ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными степенями t_2 , вместо дробей $\frac{1}{z_j - t_j}$, $j = \overline{3, m}$, — ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными степенями t_j , а вместо дробей $\frac{1}{z_j - t_j}$,

$j = \overline{m+1, n}$, — ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии с отрицательными степенями t_j . Тогда получаем, что интеграл I_{x^ε} равен

$$\frac{\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n}{(2\pi i)^n} \int_{\text{Log}^{-1}(x^\varepsilon)} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\beta z^\beta \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \frac{t_2^{\alpha_2}}{(z_1 z_2)^{\alpha_2+1}} \prod_{j=3}^m \sum_{\alpha_j=0}^{\infty} \frac{t_j^{\alpha_j}}{z_j^{\alpha_j+1}} \prod_{j=m+1}^n \sum_{\alpha_j=0}^{\infty} \frac{z_j^{\alpha_j}}{t_j^{\alpha_j+1}} dz.$$

Ненулевой вклад в данный интеграл внесут только мономы $c_\beta z^\beta$ при $\beta_1 = \beta_2 = \alpha_2 \geq 0$, $\beta_j = \alpha_j \geq 0$, $j = 3, \dots, m$, $\beta_j = \alpha_j < 0$, $j = m+1, \dots, n$. Таким образом, данный интеграл равен

$$\sum_{\alpha_2 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0, \alpha_{m+1} < 0, \dots, \alpha_n < 0} c_{\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n} t_2^{\alpha_2} t_3^{\alpha_3} \cdots t_n^{\alpha_n}.$$

Тогда комбинация интегралов $\sum_{\varepsilon} (\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n) I_{x^\varepsilon}$ и будет диагональю I_{12} .

Теорема 3. Полная примитивная диагональ (9) ряда Лорана (1), связанная с компонентой E , является алгебраической функцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2 для $I_{12}(t)$ справедливо интегральное представление

$$I_{12}(t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{dz}{(z_1 z_2 - t_2)(z_3 - t_3) \cdots (z_n - t_n)},$$

где $\Gamma = \sum_{\varepsilon} (\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n) \text{Log}^{-1}(x^\varepsilon)$.

Рассмотрим подынтегральную дифференциальную форму в (10) в проективной компактификации $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ пространства \mathbb{C}^n . В зависимости от степени полинома P эта форма может иметь полюс на бесконечно удаленной плоскости $\mathbb{P}_\infty = \mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{C}^n$. Разобьем семейство дивизоров на n групп

$$S_1 = \overline{\{Q = 0\}} \cup \mathbb{P}_\infty, S_2 = \overline{\{z_1 z_2 = t_2\}}, S_3 = \overline{\{z_3 = t_3\}}, \dots, S_n = \overline{\{z_n = t_n\}},$$

где черта означает замыкание аффинного множества в $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, и докажем, что Γ разделяет S_1, \dots, S_n .

Имеем $\Gamma = \partial C^1$, где цепь $C^1 = \overline{\text{Log}^{-1} \bigcup_{\varepsilon} (\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n) r_\varepsilon}$, r_ε — луч, выходящий из точки x_ε , не пересекающий дивизоры S_2, \dots, S_n .

Имеем $\Gamma = \partial C^2$, где $C^2 = \text{Log}^{-1} \bigcup_{\varepsilon} (\varepsilon_3 \cdots \varepsilon_n) [x_{+1, \varepsilon}, x_{-1, \varepsilon}]$, $[x_{+1, \varepsilon}, x_{-1, \varepsilon}]$ — отрезок, пересекающий дивизор D_2 и не пересекающий дивизоры S_1, S_3, \dots, S_n .

Цепи C^3, \dots, C^n строятся аналогично цепи C^2 .

Как уже отмечалось выше, дополнение до дивизора в проективном пространстве является штейновым. Таким образом, утверждение теоремы следует из теорем А и В.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stanley R. Enumerative combinatorics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. V. II.
2. Furstenberg H. Algebraic functions over finite fields // J. of Algebra. 1967. V. 7. P. 271–277.
3. Denef J., Lipshitz L. Algebraic power series and diagonals // J. Number Theory. 1987. V. 26. P. 46–67.
4. Lipshitz L. D-finite power series // J. of Algebra. 1989. V. 122. P. 353–373.
5. Djoković D. Ž. A properties of the Taylor expansion of rational function in several variables // J. Math. Anal. Appl. 1978. V. 66. P. 679–685.

6. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1985. Т. II.
7. Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A. Discriminants, resultants and multidimensional determinants. Boston: Birkhäuser, 1994.
8. Forsberg M., Passare M., Tsikh A. Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas // Adv. Math. 2000. V. 151. P. 45–70.
9. Цих А. К. Многомерные вычеты и их приложения. Новосибирск: Наука, 1988.
10. Сафонов К. В., Цих А. К. Об особенностях вычета Гротендика, зависящего от параметра, и диагонали двойных степенных рядов // Изв. вузов. Математика. 1984. № 4. С. 57–58.
11. Kiselman C. O. On entire functions of exponential type and indicators of analytic functionals // Acta Math. 1967. V. 117. P. 1–35.
12. Лейнартас Е. К., Пассаре М., Цих А. К. Многомерные версии теоремы Пуанкаре для разностных уравнений // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 10. С. 87–104.
13. Айзенберг Л. А., Южаков А. П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.
14. Fulton W. Introduction to toric varieties. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.

Статья поступила 5 октября 2008 г.

Почекутов Дмитрий Юрьевич
 Сибирский федеральный университет, институт математики,
 пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
 potchekutov@gmail.com