Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2010. Том 51, № 2

УДК 517.946

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПРЯМО И ОБРАТНО ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Терсенов

Аннотация. Для уравнений с меняющимся направлением времени ставятся и исследуются задачи типа задачи Коши.

Ключевые слова: прямо и обратно параболические уравнения, задача Коши.

Введение

Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^m$ заданы функции $b_k(t) \in C^1(D)$, $k = 1, \dots, m$, и существуют положительные постоянные γ_1, γ_2 такие, что

$$\gamma_1 < b_k(t) < \gamma_2, \quad t \in D, \ k = 1, \dots, m.$$

В области D рассмотрим уравнение

$$\partial_t w \equiv \sum_{k=1}^{m} b_k(t) \frac{\partial w}{\partial t_k} = 1. \tag{1}$$

Обозначим через Σ гладкую нехарактеристическую поверхность уравнения (1) с параметрическим представлением

$$t(z) = (t_1(z), \dots, t_m(z)), \quad z = (z_1, \dots, z_{m-1}) \in P, \ t(z) \in C^1(P),$$

где P — область в $\mathbb{R}^{m-1}$. Рассмотрим в области D все характеристические линии уравнения (1), проходящие через Σ, которые образуют область $D_0 \subset D$.

Пусть $\Lambda(t)$ — решение уравнения (1) в D_0, удовлетворяющее условию

$$\Lambda|_{\Sigma} = 0.$$

Функция $\Lambda(t) \in C^1(D_0)$ строго монотонна вдоль характеристик.

Обозначим через G_T ту часть D_0, где $0 < \Lambda(t) < T$, $T > 0$ — постоянная. Пусть Σ_s — множество точек G_T, где $\Lambda(t) = s$. Поверхность Σ_s нехарактеристическая и имеет ту же гладкость, что и Σ.

В области G_T рассмотрим характеристическую систему уравнений

$$\frac{d\tau}{ds} = b(\tau), \quad b = (b_1, \dots, b_m), \ \tau = (\tau_1, \dots, \tau_m). \tag{2}$$

Пусть $\tau(s,t) = \tau(s; \Lambda(t), t)$ — решение системы (2) в G_T, удовлетворяющее условию

$$\tau(s,t)|_{s=\Lambda(t)} = t \in G_T. \tag{3}$$

Вектор-функция $\tau(s,t)$ при любом $s \in (0,T)$ удовлетворяет относительно t уравнению

$$\partial_t \tau \equiv \sum_{k=1}^{m} b_k(t) \frac{\partial \tau(s,t)}{\partial t_k} = 0 \quad (\partial_t \tau_i(s,t) = 0). \tag{4}$$

Лемма. *Для любой точки $t \in G_T$ и для любых $s, s_1 \in (0,T)$ имеют место равенства*

$$\Lambda(\tau(s,t)) = s, \quad \tau(s,\tau(s_1,t)) = \tau(s,t). \tag{5}$$

Доказательство. При фиксированном $s \in (0,T)$ рассмотрим функцию $w(t) = \Lambda(\tau(s,t))$. В силу (4)

$$\partial_t w = \sum_{k=1}^{m} b_k(t) \frac{\partial w}{\partial t_k} = 0.$$

Пусть $t \in \Sigma_s$. Поскольку $\Lambda(t) = s$, то $\tau(s,t) = \tau(\Lambda(t); \Lambda(t), t) = t$. Таким образом, если $t \in \Sigma_s$, то $\tau(s,t) \in \Sigma_s$ и $w(t) = \Lambda(\tau(s,t)) = s$. В силу единственности решения задачи Коши заключаем, что $w(t) = s$ в G_T, т. е. $\Lambda(\tau(s,t)) = s$. Второе утверждение следует из того, что $\tau(s; \tau(s_1,t)) = \tau(s,t)$ при $s = s_1$.

Заметим, что если функция $f(t)$ дифференцируема, то

$$\partial_t f(\tau(s,t)) \equiv \sum_{k=1}^{m} b_k(t) \frac{\partial f}{\partial t_k} = 0.$$

Этим свойством мы часто будем пользоваться.

Рассмотрим постоянные $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{2p} = T$, удовлетворяющие условию

$$\beta_s = a_{2s+2} - a_{2s+1} = a_{2s+1} - a_{2s}, \quad s = 0, \ldots, p-1. \tag{6}$$

Введем обозначения:

$$G_k = \{t \in G_T, \text{ где } a_k < \Lambda(t) < a_{k+1}\}, \quad E_k = \mathbb{R}^n \times G_k, \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$Q_k = E_k \times (|x| < \infty), \quad Q_k^+ = E_k \times (x > 0),$$

$$Q_k^- = E_k \times (x < 0), \quad \Sigma_k = \{t \in G_T, \text{ где } \Lambda(t) = a_k\}.$$

Из леммы вытекает, что $\Lambda(\tau(a_k,t)) = a_k$ для любых $t \in G_T$. Следовательно, $d_k(t) = \tau(a_k,t) \in \Sigma_k$ для любых $t \in G_T$, и

$$\partial_t d_k(t) = 0, \quad k = 0, \ldots, 2p-1. \tag{7}$$

Краевым задачам для таких уравнений посвящено довольно много работ. Достаточно назвать работы [1–9] и цитированную в них литературу.

В предлагаемой работе рассматривается следующая задача, которую ниже мы будем называть задачей 1: в области $Q_T = \sum\limits_{k=0}^{2p-1} Q_k$ рассматривается уравнение

$$(-1)^k \partial_t u = x u_{xx} + \alpha u_x + \operatorname{sgn} x \Delta u, \quad \alpha \geq 1,$$

с начальными условиями, заданными либо на половине нижнего основания, где $x > 0$, или же на половине верхнего основания, где $x < 0$. Аналогичная задача, которую будем называть задачей 2, исследуется для уравнения

$$\prod_{s=1}^{n} \left[(-1)^k \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_s (-1)^m \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} \right] u = 0.$$

Точную постановку задач см. ниже в тексте статьи.

§ 1. Задача 1

1. Постановка задачи. В области $Q_T = \sum\limits_{k=0}^{2p-1} Q_k$ ищется непрерывная в $\overline{Q}_T$ функция, которая в каждой из областей Q_k является решением уравнения

$$(-1)^k \partial_t u = x u_{xx} + \alpha u_x + \operatorname{sgn} x \Delta u, \quad \alpha \geq 1, \tag{1.1}$$

и удовлетворяет одному из начальных условий:

$$u(x,y,t) = \phi_0(x,y,d_0(t)),\ x>0,\ y \in \mathbb{R}^n, \quad d_0(t) \in \Sigma, \tag{1.2}$$

или

$$u(x,y,t) = \psi_0(x,y,d_T(t)),\ x<0,\ y \in \mathbb{R}^n, \quad d_T(t) \in \Sigma_T. \tag{1.3}$$

2. Интегральное представление решения (см. [7, с. 114]). Обозначим через $V(y,\Lambda(t);f,x,d_0(t)) = V(y,\Lambda(t);f,x)$ решение задачи

$$\partial_t u = \Delta u \text{ в } \mathbb{R}^n \times G_T, \quad V(y,0;f,x) = f(x,y;d_0(t)),$$

$d_0(t) \in \Sigma$, x — параметр. Решение дается формулой Пуассона

$$V(y,\Lambda(t);f,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y-\eta,\Lambda(t)) f(x,\eta;d_0(t))\,d\eta,$$

где $\Gamma(y-\eta,\Lambda)$ — фундаментальное решение уравнения $u_t = \Delta u$. Предположим, что решение существует. Найдем его интегральное представление в Q_k. Обозначим: $u_k = u$ в Q_k^+, $v_k = u$ в Q_k^-. Любое ограниченное решение уравнения (1.1) в Q_k $(x \neq 0)$, $k = 0,\dots,2p-1$, однозначно определяется (см. [7, с. 114]):

1) в Q_{2s}^+ начальными данными $u_{2s} = \phi_{2s}(x,y,d_{2s}(t))$,

2) в Q_{2s}^- начальными данными $v_{2s} = \psi_{2s+1}(x,y,d_{2s+1}(t))$,

и представляется соответственно формулами

$$\begin{aligned} u_{2s} &= \int\limits_0^\infty \Gamma_\alpha(x,\xi,\Lambda - a_{2s}) V(y,\Lambda - a_{2s};\phi_{2s},\xi)\,d\xi, \\ v_{2s} &= \int\limits_0^\infty \Gamma_\alpha(-x,\xi,a_{2s+1} - \Lambda) V(y,a_{2s+1} - \Lambda;\psi_{2s+1},-\xi)\,d\xi, \end{aligned} \tag{1.4}$$

а условие непрерывности при $x = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} &(\Lambda(t) - a_{2s})^{-\alpha} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\xi}{\Lambda - a_{2s}}} \xi^{\alpha-1} V(y,\Lambda - a_{2s};\phi_{2s},\xi)\,d\xi \\ &\quad = (a_{2s+1} - \Lambda(t))^{-\alpha} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\xi}{a_{2s+1}-\Lambda}} \xi^{\alpha-1} V(y,a_{2s+1} - \Lambda;\psi_{2s+1},-\xi)\,d\xi; \end{aligned} \tag{1.5}$$

3) в Q_{2s+1}^+ начальными данными $u_{2s+1} = \phi_{2s+2}(x,y,d_{2s+2}(t))$,

4) в Q_{2s+1}^- начальными данными $v_{2s+1} = \psi_{2s+1}(x,y,d_{2s+1}(t))$,

и представляется соответственно формулами

$$u_{2s+1} = \int\limits_0^\infty \Gamma_\alpha(x,\xi,a_{2s+2}-\Lambda)V(y,a_{2s+2}-\Lambda;\phi_{2s+2},\xi)\,d\xi,$$
$$v_{2s+1} = \int\limits_0^\infty \Gamma_\alpha(-x,\xi,\Lambda-a_{2s+1})V(y,\Lambda-a_{2s+1};\psi_{2s+1},-\xi)\,d\xi, \tag{1.6}$$

а условие непрерывности при $x=0$ имеет вид

$$(a_{2s+2}-\Lambda(t))^{-\alpha}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\xi}{a_{2s+2}-\Lambda}}\xi^{\alpha-1}V(y,a_{2s+2}-\Lambda;\phi_{2s+2},\xi)\,d\xi$$
$$=(\Lambda(t)-a_{2s+1})^{-\alpha}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\xi}{\Lambda-a_{2s+1}}}\xi^{\alpha-1}V(y,\Lambda-a_{2s+1};\psi_{2s+1},-\xi)\,d\xi,\ s=0,\dots,p-1, \tag{1.7}$$

где

$$\Gamma_\alpha(x,\xi,\tau)=\tau^{-1}(x\xi)^{\frac{1-\alpha}{2}}I_{\alpha-1}\left(2\frac{\sqrt{x\xi}}{\tau}\right)e^{-\frac{x+\xi}{\tau}}\xi^{\alpha-1}.$$

3. В области $\mathbb{R}^n\times(\xi>0)\times(0<z<\beta_s)$ рассмотрим уравнение

$$z^{-\alpha}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\xi}{z}}\xi^{\alpha-1}V(y,z;\mu_1,\xi)\,d\xi=(\beta_s-z)^{-\alpha}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\xi}{\beta_s-z}}\xi^{\alpha-1}V(y,z;\mu_2,-\xi)\,d\xi, \tag{1.8}$$

где μ_1 определена для $\xi>0$, а μ_2 — для $\xi<0$. В ряде случаев уравнение (1.8) можно разрешить относительно μ_1 или μ_2 (см. [7]). Хорошо известно (см. [7, с. 115]), что

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\beta_s-z}{\beta_s z}}\xi_1^{\frac{\alpha-1}{2}}J_{\alpha-1}\left(2\frac{\sqrt{\xi\xi_1}}{\beta_s}\right)d\xi_1=\beta_s z^\alpha(\beta_s-z)^{-\alpha}e^{-\frac{z\xi}{\beta_s(\beta_s-z)}}\xi^{\frac{\alpha-1}{2}}.$$

Определив отсюда выражение $(\beta_s-z)^\alpha\xi^{\alpha-1}e^{-\frac{\xi}{\beta_s-z}}$ и подставив в (1.8), получим

$$z^{-\alpha}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\xi}{z}}\xi^{\alpha-1}\big[V(y,z;\mu_1,\xi)-\beta_s^{-1}\xi^{\frac{1-\alpha}{2}}e^{\frac{\beta_s-z}{\beta_s z}}A(\xi,\beta_s)V(y,\beta_s-z;\mu_2,-\xi)\big]\,d\xi=0, \tag{1.9}$$

где

$$A(\xi,\beta_s)=\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\beta_s-z}{\beta_s z}}\xi_1^{\frac{\alpha-1}{2}}J_{\alpha-1}\left(2\frac{\sqrt{\xi\xi_1}}{\beta_s}\right)d\xi_1.$$

Из (1.9) имеем (см. [7, с. 115])

$$V(y,z;\mu_1,\xi)=\beta_s^{-1}\xi^{\frac{1-\alpha}{2}}e^{\frac{\beta_s-z}{\beta_s z}}A(\xi,\beta_s)V(y,\beta_s-z;\mu_2,-\xi). \tag{1.10}$$

Используя (1.10), докажем, что

1) $u_{2s}|_{\Lambda=a_{2s+1}}=u_{2s+1}|_{\Lambda=a_{2s+1}}$,
2) $v_{2s+1}|_{\Lambda=a_{2s+2}}=v_{2s+2}|_{\Lambda=a_{2s+2}}$, $\quad s=0,\dots,p-1.$

Тем самым мы покажем непрерывность решения в $\overline{Q}_T$, если оно существует. Ограничимся доказательством равенства 1, равенство 2 доказывается аналогично. Надо показать, что

$$\int_0^\infty \Gamma_\alpha(x,\xi,a_{2s+1}-a_{2s})V(y,a_{2s+1}-a_{2s};\phi_{2s},\xi)\,d\xi = \int_0^\infty \Gamma_\alpha(x,\xi,a_{2s+2}-a_{2s+1})V(y,a_{2s+2}-a_{2s+1};\phi_{2s+2},\xi)\,d\xi. \quad (1.11)$$

В (1.10) возьмем $z = a_{2s+2} - a_{2s+1} = a_{2s+1} - a_{2s}$. Имеем

$$V(y,a_{2s+1}-a_{2s};\phi_{2s},\xi) = \beta_s^{-1}\xi^{\frac{1-\alpha}{2}}A(\xi,\beta_s)V(y,0;\psi_{2s+1},-\xi) = V(y,a_{2s+2}-a_{2s+1};\psi_{2s+1},-\xi), \quad (1.12)$$

откуда и следует (1.11).

4. Вернемся к задаче 1.

Единственность. Пусть $\phi_0 = 0$, тогда $u_0 = 0$ и в силу (1.12) $v_0 = 0$. Продолжая этот процесс, получим, что $u = 0$ в Q_T.

Существование. Обозначим через $\partial_t C^2_{x,y}(\mathbb{R}^{n+1}\times G_T)$ множество функций, имеющих непрерывные производные по t первого порядка и непрерывные вторые производные по $x, y_1, \dots, y_n$. Пусть $\phi_0 \in \partial_t C^2_{x,y}(\mathbb{R}^{n+1}\times\Sigma)$, тогда $u_0 \in \partial_t C^2_{x,y}(Q_0^+)$. В силу зависимости функций u_0 и v_0 при $x = 0$ можно показать, что $v_0 \in \partial_t C^2_{x,y}(Q_0^-)$. Продолжая этот процесс, найдем решение, где

$$u_k \in \partial_t C^2_{x,y}(Q_k^+), \quad v_k \in \partial_t C^2_{x,y}(Q_k^-), \quad k = 0,\dots,2p-1.$$

§ 2. Задача 2

1. Постановка задачи. В области $Q = R\times(0 < t < \infty)$ рассмотрим полосы $Q_k = \mathbb{R}\times(a_k < t < a_{k+1})$, $k = 0,\dots,2p-1$, $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{2p} = T$. Рассмотрим уравнение

$$\prod_{s=1}^n\left((-1)^k\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_s(-1)^m\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}\right)u = 0 \quad \text{в } Q_T = \sum_{k=0}^{2p-1}Q_k, \quad (2.1)$$

где $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ и $\alpha_k \neq \alpha_s$ при $k \neq s$.

Обозначим через u_k значение искомой функции u в Q_k. Требуется найти функцию u в Q_T, которая удовлетворяет:

1) в области Q_k уравнению (2.1),

2) одному из начальных условий

$$\left.\frac{\partial^s u_0}{\partial t^s}\right|_{t=0} = \phi_s(x), \quad s = 0,\dots,n-1,$$
$$\left.\frac{\partial^s u_{2p-1}}{\partial t^s}\right|_{t=a_{2p}} = \psi_s(x), \quad s = 0,\dots,n-1, \quad (2.2)$$

3) условиям склеивания

$$\left.\frac{\partial^i u_{2k}}{\partial t^i}\right|_{t=a_{2k+1}} = (-1)^i\left.\frac{\partial^i u_{2k+1}}{\partial t^i}\right|_{t=a_{2k+1}}, \quad i = 0,\dots,n-1,\ k = 0,\dots,p-1. \quad (2.3)$$

2. Единственность. Пусть $\phi_s = 0$, $s = 0, \dots, n-1$. Рассмотрим в Q_0 функцию

$$v_1 = \prod_{s=2}^{n} \Big(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_s (-1)^m \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} \Big) u_0.$$

Функция v_1 является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \alpha_1 (-1)^m \frac{\partial^{2m} v_1}{\partial x^{2m}} = 0 \quad \text{в } Q_0, \quad v_1(x,0) = 0,$$

т. е. $v_1 = 0$ в Q_0. Рассмотрим в Q_0 функцию

$$v_2 = \prod_{s=3}^{n} \Big(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_s (-1)^m \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} \Big) u_0.$$

Так как $v_1 = 0$, то v_2 в Q_0 будет решением задачи

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + \alpha_2 (-1)^m \frac{\partial^{2m} v_2}{\partial x^{2m}} = 0 \quad \text{в } Q_0, \quad v_2(x,0) = 0,$$

т. е. $v_2 = 0$ в Q_0. Продолжая эту процедуру, получим, что $u_0 = 0$ в Q_0. Рассмотрим теперь в Q_1 функцию

$$w_1 = \prod_{s=2}^{n} \Big(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha_s (-1)^m \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} \Big) u_1,$$

которая в Q_1 в силу условий склеивания является решением следующей обратной задачи:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - \alpha_1 (-1)^m \frac{\partial^{2m} w_1}{\partial x^{2m}} = 0 \text{ в } Q_1, \quad w_1(x, a_1) = 0.$$

Ввиду единственности решения обратной задачи получаем $w_1 = 0$ в Q_1. Как и выше, продолжая эту процедуру, получим $u_1 = 0$ в Q_1. В итоге $u = 0$ в Q_T.

3. Существование. Предположим, что $\phi_q \in H^{2(n-q)m+\alpha}(\mathbb{R})$, $0 < \alpha < 1$. Если

$$a_{2s+2} - a_{2s+1} = a_{2s+1} - a_{2s}, \tag{2.4}$$

то решение задачи 2 существует и

$$u_k \in H^{2nm+\alpha}(Q_k).$$

Действительно, рассмотрим определитель

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_1^{n-1} & \gamma_2^{n-1} & \dots & \gamma_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

где $\gamma_s = (-1)^{m+1} \alpha_s$. Пусть A_{ls} — алгебраическое дополнение γ_l^s, деленное на A, т. е.

$$\sum_{l=1}^{n} A_{ls} \gamma_l^i = \delta_{is}, \quad i, s = 0, \dots, n-1. \tag{2.5}$$

В дальнейшем, не оговаривая особо, будем пользоваться следующим фактом: функция

$$u = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x - \xi, \alpha_l t) \phi(\xi) \, d\xi$$

в области $Q_T = (0 < t < T) \times \mathbb{R}$ является решением задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_l (-1)^m \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} \text{ в } Q_T, \quad u(x,0) = \phi(x), \tag{2.6}$$

и если $\phi \in H^{2m+\alpha}(\mathbb{R})$, то $u \in H^{2m+\alpha}(Q_T)$. Здесь функция

$$\Gamma(x-\xi, \alpha_l t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-z^{2m}\alpha_l t} \cos(x-\xi) z \, dz$$

удовлетворяет уравнению (2.6). Уравнение (2.1) в Q_{2k} имеет вид

$$\prod_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_s (-1)^m \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} \right) u = 0, \tag{2.7}$$

а в Q_{2k+1} —

$$\prod_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha_s (-1)^m \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} \right) u = 0. \tag{2.8}$$

В области Q_{2k} $(k = 0, \dots, p-1)$ решение $u = u_{2k}$ возьмем в виде

$$u = u_{2k} = \sum_{q=0}^{n-1} v_{qk}(x,t),$$

где

$$v_{qk} = \frac{1}{q!} \sum_{l=1}^{n} A_{lq} \gamma_l^q \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{a_{2k}}^{t} (t-\tau)^q \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \Gamma(x-\xi, \alpha_l(\tau - a_{2k})) \phi_q(\xi) \, d\xi \right) d\tau.$$

Если $i \le q-1$, то

$$\frac{\partial^i v_{qk}}{\partial t^i} = \frac{1}{\Gamma(q-i)} \sum_{l=1}^{n} A_{lq} \gamma_l^q \int\limits_{a_{2k}}^{t} (t-\tau)^{q-i-1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \Gamma(x-\xi, \alpha_l(\tau - a_{2k})) \phi_q(\xi) \, d\xi \right) d\tau.$$

Если $i \ge q$, то, учитывая, что Γ удовлетворяет уравнению (2.6), и интегрируя по частям, получаем

$$\frac{\partial^i v_{qk}}{\partial t^i} = \sum_{l=1}^{n} A_{lq} \gamma_l^i \int\limits_{\mathbb{R}} \Gamma(x-\xi, \alpha_l(t - a_{2k})) \phi_q^{(2m(i-q))}(\xi) \, d\xi.$$

Из этих соотношений в силу (2.5) вытекает, что

$$\left. \frac{\partial^i v_{qk}}{\partial t^i} \right|_{t=a_{2k}} = \phi_q(x) \delta_{iq}. \tag{2.9}$$

Кроме того, функции v_{qk} являются решениями уравнения (2.7) в Q_{2k}. В области Q_{2k+1} $(k = 0, \dots, p-1)$ решение $u = u_{2k+1}$ возьмем в виде

$$u = u_{2k+1} = \sum_{q=0}^{n-1} w_{qk}(x,t),$$

$$w_{qk} = -\frac{1}{q!}\sum_{l=1}^{n} A_{lq}\gamma_l^q \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_t^{a_{2k+2}} (\tau - t)^q \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \Gamma(x-\xi, \alpha_l(a_{2k+2}-t))\phi_q(\xi)\,d\xi\right)d\tau.$$

Как и выше, если $i \leq q-1$, то

$$\frac{\partial^i w_{qk}}{\partial t^i} = \frac{(-1)^i}{\Gamma(q-i)}\sum_{l=1}^{n} A_{lq}\gamma_l^q \int\limits_t^{a_{2k+2}} (\tau - t)^{q-i-1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \Gamma(x-\xi, \alpha_l(a_{2k+2}-\tau))\phi_q(\xi)\,d\xi\right)d\tau.$$

Если же $i \geq q$, то

$$\frac{\partial^i w_{qk}}{\partial t^i} = (-1)^i \sum_{l=1}^{n} A_{lq}\gamma_l^i \int\limits_{\mathbb{R}} \Gamma(x-\xi, \alpha_l(a_{2k+2}-t))\phi_q^{(2m(i-q))}(\xi)\,d\xi.$$

Из этих равенств заключаем, что

$$(-1)^i \frac{\partial^i w_{qk}}{\partial t^i}\bigg|_{t=a_{2k+2}} = \phi_q(x)\delta_{iq}. \qquad (2.10)$$

Кроме того, функции w_{qk} являются решениями уравнения (2.8). Нетрудно видеть, что в силу (2.4) условия склеивания (2.3) выполнены.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arena O.* On a singular parabolic equation related to axially symmetric heat potentials // Ann. Mat. Pura Appl. 1975. V. 105, N 4. P. 347–393.
2. *Gevrey M.* Sur les equations aux derives partielles du type parabolique // J. Math. Appl. 1914. V. 4. P. 105–137.
3. *Pagani C., Talenti G.* On a forward-backward parabolic equation // Ann. Mat. Pura Appl. 1971. V. 90, N 4. P. 1–58.
4. *Ахмедов Х. Х.* Разрешимость некоторых краевых задач для прямо и обратно параболических уравнений. Новосибирск, 1984. (Препринт / СО АН СССР. Ин-т математики.; № 78).
5. *Егоров И. Е.* Об одной краевой задаче для системы сингулярных параболических уравнений // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1973. Вып. 14. С. 100–105.
6. *Попов С. В.* Нелокальные контактные краевые задачи для итерированных уравнений теплопроводности // Мат. заметки ЯГУ. 1994. Т. 1, № 2. С. 55–65.
7. *Терсенов С. А.* Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1982.
8. *Терсенов С. А.* Об основных краевых задачах для одного ультрапараболического уравнения // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 6. С. 1413–1430.
9. *Справочная математическая библиотека.* Таблица интегральных преобразований. М.: Наука, 1970. Т. II.

Статья поступила 25 августа 2008 г.

Терсенов Савва Авраамович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
aterseno@ucy.ac.cy, tersenov@math.uoc.gr