Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2010. Том 51, № 3

УДК 512.57

О ДОМИНИОНАХ В КВАЗИМНОГООБРАЗИЯХ МЕТАБЕЛЕВЫХ ГРУПП

А. И. Будкин

Аннотация. *Доминион подгруппы* H группы A в квазимногообразии $\mathscr{M}$ — это множество всех элементов $a \in A$, образы которых равны для всех пар гомоморфизмов, совпадающих на H, из A в каждую группу из $\mathscr{M}$. Доминион является оператором замыкания на решетке подгрупп данной группы. Исследованы замкнутые подгруппы относительно доминиона. Найдены условия, при которых доминион полной подгруппы в квазимногообразиях метабелевых групп совпадает с этой подгруппой.

Ключевые слова: квазимногообразие, метабелева группа, доминион, n-замкнутая подгруппа, оператор замыкания.

1. Введение

Понятие доминиона введено в [1] для изучения эпиморфизмов. Согласно [1] *доминионом подалгебры* H *универсальной алгебры* A *в полной категории* $\mathscr{M}$ ($A \in \mathscr{M}$), обозначаемым $\mathrm{dom}_A^{\mathscr{M}}(H)$, называется множество всех элементов $a \in A$ таких, что $a^\varphi = a^\psi$ для любых двух морфизмов $\varphi, \psi : A \to M \in \mathscr{M}$, совпадающих на H. Оказалось, что отображение $\varphi : A \to B$ ($A, B \in \mathscr{M}$) является эпиморфизмом в $\mathscr{M}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{dom}_B^{\mathscr{M}}(A^\varphi) = B$. Этот факт послужил началом исследования доминионов. Далее понятие доминиона изучалось в различных классах алгебр [2–4] (см. также библиографию в [5]). В частности, установлена тесная связь между доминионами и амальгамами. За подробностями мы отсылаем читателя к обзорной статье [2]. Целесообразность изучения доминионов в квазимногообразиях обосновывается в [5] тем, что согласно [6] только квазимногообразия среди аксиоматизируемых классов обладают полной теорией определяющих соотношений, позволяющей определить свободное произведение с объединенной подалгеброй. Отметим, что доминионы подробно рассмотрены в квазимногообразиях абелевых групп [3, 7], а решетки доминионов введены и изучались в [5, 8, 9].

Пусть $\mathscr{M}$ — произвольное квазимногообразие групп. В этом случае для любой группы A из $\mathscr{M}$ и ее подгруппы H доминион $\mathrm{dom}_A^{\mathscr{M}}(H)$ подгруппы H в A (в $\mathscr{M}$) определяется так:

$$\mathrm{dom}_A^{\mathscr{M}}(H) = \{a \in A \mid \forall M \in \mathscr{M}\ \forall f, g : A \to M \text{ если } f|_H = g|_H, \text{ то } a^f = a^g\}.$$

Здесь, как обычно, через $f, g : A \to M$ обозначены гомоморфизмы группы A в группу M, через $f|_H$ — ограничение f на H.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (мероприятие 1).

Несложно заметить, что $\mathrm{dom}_A^{\mathscr{M}}(-)$ является оператором замыкания на решетке подгрупп данной группы A в том смысле, что он экстенсивный (доминион подгруппы H содержит H), идемпотентный (доминион доминиона подгруппы H равен доминиону H) и изотонный (если $H \subset B$, то доминион H содержится в доминионе B). Представляется интересным и естественным исследование замкнутых подгрупп. В [9] введено понятие n-замкнутой группы и показано [9, следствие 2], что изучение замкнутых групп сводится к изучению n-замкнутых групп. В частности, в [9, теорема 5] описаны все 1-замкнутые абелевы группы в каждом квазимногообразии нильпотентных групп без кручения ступени 2.

Группа H называется *n-замкнутой* в классе $\mathscr{M}$, если для любой группы $A = \mathrm{гр}(H, a_1, \dots, a_n)$ из $\mathscr{M}$, содержащей H и порожденной по модулю H подходящими n элементами, справедливо равенство $\mathrm{dom}_A^{\mathscr{M}}(H) = H$.

Цель данной работы — нахождение условий, при которых $\mathrm{dom}_A^{\mathscr{M}}(H) = H$, и изучение 1-замкнутых групп в квазимногообразиях, содержащихся в многообразии, заданном тождеством $(\forall x)(\forall y)([x^2, y^2] = 1)$.

С основными понятиями теории квазимногообразий можно познакомиться в [10–13], а теории групп — в [14].

2. Основные результаты

Напомним некоторые понятия и обозначения. Запись $A \leq B$ означает, что A является подгруппой группы B; E — единичная группа. Через $\mathrm{гр}(S)$ будем обозначать группу, порожденную множеством S, через (a) — циклическую группу, порожденную элементом a; G' — коммутант группы G; $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. Как обычно, $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$, $a^b = b^{-1}ab$.

Вложением группы A в группу B будем называть любой гомоморфизм $\varphi : A \to B$, являющийся изоморфизмом A на A^φ. Если существует вложение A в B, то говорим, что A *вложима* в B.

Группа G называется *полной*, если для всякого целого числа $n > 0$ и любого элемента $g \in G$ уравнение $x^n = g$ имеет в группе G хотя бы одно решение.

Нам понадобится следующая теорема Дика.

Теорема [13, с. 281]. *Пусть группа G имеет в данном квазимногообразии $\mathscr{N}$ представление*

$$G = \mathrm{гр}(\{x_i \mid i \in I\} \ \| \ \{r_j(x_{j_1}, \dots, x_{j_{l(j)}}) = 1 \mid j \in J\}).$$

Предположим, что $H \in \mathscr{N}$ и группа H содержит множество элементов $\{g_i \mid i \in I\}$ такое, что для всякого $j \in J$ равенство $r_j(g_{j_1}, \dots, g_{j_{l(j)}}) = 1$ истинно в H. Тогда отображение $x_i \to g_i$ $(i \in I)$ продолжается до гомоморфизма G в H.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{M}$ — многообразие групп, заданное тождеством*

$$(\forall x)(\forall y)([x^2, y^2] = 1),$$

$G = \mathrm{гр}(a, H) \in \mathscr{M}$. Если H и $H \cap H^a$ — полные подгруппы группы G, то $\mathrm{dom}_G^{\mathscr{M}}(H) = H$.

Доказательство. Ясно, что H — абелева группа. Пусть $G^2 = \mathrm{гр}(g^2 \mid g \in G)$. Так как G/G^2 — абелева 2-группа, видим, что в G истинны тождества

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x^2, [y, z]] = 1), \quad (\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v)([[x, y], [u, v]] = 1).$$

Заметим, что если G — абелева группа, то $\mathrm{dom}_G^{\mathscr{M}}(H) = H$ по [3, теорема 1]; если H — единичная группа, то равенство $\mathrm{dom}_G^{\mathscr{M}}(H) = H$ непосредственно следует из определения доминиона. Считаем, что G — неабелева группа и $H \neq G$. Легко заметить, что $G = HH^a(a)$.

Пусть $A = H \cap H^a$. Так как A — полная подгруппа группы H, она выделяется в H прямым сомножителем: $H = H_1 \times A$. Ясно, что $A^a = A$ и $H^a = H_1^a \times A$.

Покажем, что $H_1H_1^a \cap A = (1)$. Пусть $hf^a \in H_1H_1^a \cap A(h, f \in H_1)$. Тогда $h = f^{-a}(hf^a)$, откуда $h^a = f^{-1}(hf^a)^a$. Так как $A^a = A$, то $h^a \in H_1A = H$. Но $h^a \in H_1^a$, отсюда $h^a \in H \cap H^a = A$, в частности, $h \in A$. Теперь видим, что $f \in A$. Поскольку теперь $h, f \in H_1 \cap A$ и $H_1 \cap A = (1)$, то $h = 1, f = 1$. Итак, $H_1H_1^a \cap A = (1)$ и $HH^a = H_1H_1^a \times A$. Еще поскольку $H_1 \cap H_1^a \subseteq A$ и $H_1 \cap A = (1)$, то $H_1 \cap H_1^a = (1)$. Стало быть, $HH^a = H_1 \times A \times H_1^a$.

Случай 1. $HH^a \cap (a) \neq (1)$. Пусть $a^n \in HH^a$, n — наименьшее положительное целое число с этим свойством. Если n — нечетное число, то a принадлежит группе гр(HH^a, a^2), которая является абелевой, откуда G — абелева группа. Таким образом, n — четное число. Отсюда, в частности, следует, что если a — элемент конечного порядка, то этот порядок четен. Итак, в рассматриваемом случае будем предполагать, что $n = 2m$.

Возьмем группы H_2, H_3, H_4 $(H_2 = H_1^a)$, изоморфные группе H_1, и зафиксируем следующие изоморфизмы:

$\alpha : H_1 \to H_2$, при этом $h_1^\alpha = h_1^a$, $h_1 \in H_1$,

$\sigma : H_2 \to H_3$, $\delta : H_3 \to H_4$ — произвольные изоморфизмы,

$\beta = \sigma\delta : H_2 \to H_4$.

Рассмотрим группу $M = A \times H_1 \times H_2 \times H_3 \times H_4$. Условимся писать у элементов из H_i индекс i (например, h_i — это элемент из H_i). Также вводим следующие обозначения: для $h_1 \in H_1$ полагаем, что

$$h_2 = h_1^\alpha, \quad h_3 = h_2^\sigma, \quad h_4 = h_3^\delta.$$

Определим теперь на M автоморфизмы α_1, α_2 так:

$$(fh_1u_2v_3w_4)^{\alpha_1} = f^a u_1 h_2 w_3 v_4, \quad (fh_1u_2v_3w_4)^{\alpha_2} = f^a v_1 w_2 h_3 u_4.$$

Имеем

$$(fh_1u_2v_3w_4)^{{\alpha_1}^2} = (f^a u_1 h_2 w_3 v_4)^{\alpha_1} = fh_1u_2v_3w_4,$$
$$(fh_1u_2v_3w_4)^{{\alpha_2}^2} = (f^a v_1 w_2 h_3 u_4)^{\alpha_2} = fh_1u_2v_3w_4,$$
$$(fh_1u_2v_3w_4)^{\alpha_1\alpha_2} = (f^a u_1 h_2 w_3 v_4)^{\alpha_2} = fw_1v_2u_3h_4,$$
$$(fh_1u_2v_3w_4)^{\alpha_2\alpha_1} = (f^a v_1 w_2 h_3 u_4)^{\alpha_1} = fw_1v_2u_3h_4.$$

Видим, что гр(α_1, α_2) является прямым произведением двух циклических групп (α_1) и (α_2) второго порядка.

Возьмем группу $L = (x_1) \times (x_2)$, являющуюся прямым произведением групп, изоморфных группе (a). Пусть $\chi : L \to$ гр(α_1, α_2) — гомоморфизм, при котором $x_1^\chi = \alpha_1$, $x_2^\chi = \alpha_2$. Возникает $C = M\lambda L$ — расширение группы M при помощи группы L. В дальнейшем будем пользоваться следующим свойством группы C:

$$h_1^{x_1} = h_2, \quad h_3^{x_1} = h_4, \quad h_1^{x_2} = h_3, \quad h_2^{x_2} = h_4.$$

Покажем, что в группе C истинно тождество $[x^2, y^2] = 1$. Действительно, берем любые элементы $x, y \in C$. Тогда x^2, y^2 имеют следующий вид: $x^2 = m_1c_1^2$, $y^2 = m_2c_2^2$, где $m_1, m_2 \in M$, $c_1, c_2 \in L$. Поскольку c_1^2, c_2^2 действуют на M как тождественный автоморфизм, получаем, что $\left[m_1c_1^2, m_2c_2^2\right] = 1$. Итак, мы показали, что $C \in \mathscr{M}$.

Напомним, что $a^{2m} \in HH^a$. Следовательно, этот элемент представим в виде $a^{2m} = cb_1h_2$, где $c \in A$, $b_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$. Так как $cb_1h_2 = (cb_1h_2)^a = c^ab_2h_1$, получаем, что $c = c^a$, $b_1 = h_1$, $b_2 = h_2$. Таким образом, $a^{2m} = cb_1b_1^a = cb_1b_2$ для подходящих элементов $c \in A$, $b_1 \in H_1$.

Положим $N = \text{гр}\big(cb_1b_2x_1^{-2m}, cb_1b_2x_2^{-2m}, cb_3b_4x_1^{-2m}, cb_3b_4x_2^{-2m}\big)$. Из вышесказанного следует, что $N \lhd C$. Пусть $K = C/N$. Поскольку $C \in \mathscr{M}$, то $K \in \mathscr{M}$.

Условимся образ каждого элемента $g \in C$ при естественном гомоморфизме $C \to K = C/N$ обозначать через $\bar{g}$. Несложные вычисления показывают, что отображения

$$gt_1u_2 \to \overline{gt_1u_2}\ (g \in A,\ t_1 \in H_1,\ u_2 \in H_1^a), \quad a \to x_1,$$

$$gt_1u_2 \to \overline{gt_1u_3}\ (g \in A,\ t_1 \in H_1,\ u_2 \in H_1^a), \quad a \to x_2$$

продолжаемы до вложений (достаточно, что продолжаемы до гомоморфизмов) $\varphi : G \to K$, $\psi : G \to K$ соответственно, совпадающих на $H = H_1 \times A$.

Покажем, что если $g^\varphi = g^\psi$, то $g \in H$. Действительно, элемент g можно представить в виде $g = a^kft_1u_2$ ($f \in A$, $t_1 \in H_1$, $u_2 \in H_1^a$, $k \in \mathbb{Z}$, $|k| < 2m$). Из равенства $g^\varphi = g^\psi$ следует, что $\big(x_1^kft_1u_2\big)^{-1}\big(x_2^kft_1u_3\big) \in N$. Отсюда $k = 0$ и $u_2^{-1}u_3 \in N$. Таким образом, элемент $u_2^{-1}u_3$ можно записать так:

$$u_2^{-1}u_3 = \big(cb_1b_2x_1^{-2m}\big)^{l_1}\big(cb_1b_2x_2^{-2m}\big)^{l_2}\big(cb_3b_4x_1^{-2m}\big)^{l_3}\big(cb_3b_4x_2^{-2m}\big)^{l_4}$$

для подходящих $l_i \in \mathbb{Z}$. Отсюда следуют равенства $b_1^{l_1+l_2} = 1$, $u_2b_2^{l_1+l_2} = 1$. Сопрягая обе части соотношения $u_2b_2^{l_1+l_2} = 1$ элементом x_1, видим, что $u_1b_1^{l_1+l_2} = 1$, значит, $u_1 = 1$, откуда $u_2 = 1$. Итак, $g = ft_1 \in H$. Это означает, что $\text{dom}_G^{\mathscr{M}}(H) = H$.

Случай 2. $HH^a \cap (a) = (1)$. Строим группу C так же, как и в случае 1. Снова нетрудные вычисления позволяют убедиться, что отображения

$$gt_1u_2 \to gt_1u_2\ (g \in A,\ t_1 \in H_1,\ u_2 \in H_1^a), \quad a \to x_1,$$

$$gt_1u_2 \to gt_1u_3\ (g \in A,\ t_1 \in H_1,\ u_2 \in H_1^a), \quad a \to x_2$$

продолжаемы до вложений $\varphi : G \to C$, $\psi : G \to C$ соответственно, совпадающих на $H = H_1 \times A$. Кроме того, видим, что если $g \notin H$, то $g^\varphi \neq g^\psi$. Отсюда $\text{dom}_G^{\mathscr{M}}(H) = H$. Теорема доказана.

Напомним определение свободного квадрата группы. Пусть $\mathscr{N}$ — произвольное квазимногообразие групп и группа G имеет в $\mathscr{N}$ представление

$$G = \text{гр}\{x_i \mid i \in I\} \parallel \{r_j(\bar{x}) = r'_j(\bar{x}) \mid j \in J\}.$$

Возьмем две группы $G_1, G_2 \in \mathscr{N}$, изоморфные группе G, и зафиксируем их представления в $\mathscr{N}$:

$$G_1 = \text{гр}\{x_i \mid i \in I\} \parallel \{r_j(\bar{x}) = r'_j(\bar{x}) \mid j \in J\},$$

$$G_2 = \text{гр}\{y_i \mid i \in I\} \parallel \{r_j(\bar{y}) = r'_j(\bar{y}) \mid j \in J\}.$$

Предполагаем, что пересечение $X = \{x_i \mid i \in I\}$ и $Y = \{y_i \mid i \in I\}$ пусто.

Пусть H — подгруппа группы G. Берем произвольное множество $\{h_l(\bar{x}) \mid l \in L\}$ групповых слов в алфавите $X = \{x_i \mid i \in I\}$, множество $\{h_l(\bar{x}) \mid l \in L\}$

значений которых в G порождает H. Согласно [6] существует группа $D \in \mathscr{N}$, обладающая в $\mathscr{N}$ представлением

$$D = \text{гр}(X \cup Y \parallel \{r_j(\bar{x}) = r'_j(\bar{x}) \mid j \in J\} \cup \{r_j(\bar{y}) = r'_j(\bar{y}) \mid j \in J\} \\ \cup \{h_l(\bar{x}) = h_l(\bar{y}) \mid l \in L\}).$$

Эта группа D обозначается через $G *_H^{\mathscr{N}} G$ и называется *свободным квадратом* в $\mathscr{N}$ группы G с объединенной подгруппой H. Отображения $\lambda : G \to D$, где $x_i^\lambda = x_i$ $(i \in I)$, $\rho : G \to D$ $\big(x_i^\rho = y_i$ $(i \in I)\big)$ являются вложениями, и подгруппы G^λ, G^ρ, H^λ снова обозначим через G_1, G_2, H соответственно.

Известно (см., например, [2]), что $G_1 \cap G_2 = \text{dom}_{G_1}^{\mathscr{N}}(H)$.

Следствие 1. *Пусть $\mathscr{M}$ — многообразие групп, заданное тождеством*

$$(\forall x)(\forall y)([x^2, y^2] = 1),$$

$G = \text{гр}(H, a) \in \mathscr{M}$, где H и $H \cap H^a$ — полные подгруппы. Тогда $G_1 \cap G_2 = H$ в $G *_H^{\mathscr{M}} G$.

Конструкцию, возникшую в теореме 1, применим для доказательства следующего факта.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{M}$ — многообразие групп, заданное тождеством*

$$(\forall x)(\forall y)([x^2, y^2] = 1),$$

$\mathscr{N}$ — произвольное квазимногообразие, содержащееся в $\mathscr{M}$. Предположим, что в $\mathscr{N}$ истинно квазитождество $(\forall x)(x^2 = 1 \to x = 1)$. Если $G = \text{гр}(a, H) \in \mathscr{N}$, H и $H \cap H^a$ — полные подгруппы группы G, то $\text{dom}_G^{\mathscr{N}}(H) = H$.

Доказательство. Ясно, что H — абелева группа. Снова если G — абелева группа либо $H = (1)$, то $\text{dom}_G^{\mathscr{M}}(H) = H$ по [3]. Считаем, что $G = \text{гр}(a, H)$, G — неабелева группа и $H \neq G, H \neq (1)$.

Покажем, что $HH^a \cap (a) = (1)$. Пусть, напротив, $HH^a \cap (a) \neq (1)$. Возьмем $a^n \in HH^a$, n — наименьшее положительное число с этим свойством. Если n — нечетное число, то $a \in \text{гр}(HH^a, a^2)$, которая является абелевой, т. е. G — абелева группа. Таким образом, n — четное число. Пусть $n = 2m$. Так как HH^a — полная группа, то $a^{2m} = h^{2m}$ для подходящего $h \in HH^a$. Следовательно, $(a^{-1}ha)^{2m} = h^{2m}$, откуда ввиду абелевости HH^a имеем $((a^{-1}ha)^m h^{-m})^2 = 1$. Но HH^a — группа без элементов второго порядка, значит, $(a^{-1}ha)^m h^{-m} = 1$, в частности, $[a^m, h^m] = 1$. Так как $a^{2m} = h^{2m}$, находим, что $(a^{-m}h^m)^2 = 1$. Но G не имеет элементов порядка 2, поэтому $a^m = h^m$, что противоречит выбору числа n.

Пусть $C = M\lambda L$ — группа из доказательства теоремы 1 и

$$R = \text{гр}\big(h_1h_2h_3^{-1}h_4^{-1} \mid h_1 \in H_1\big) = \big\{h_1h_2h_3^{-1}h_4^{-1} \mid h_1 \in H_1\big\}.$$

Ясно, что $R \lhd C$. Полагаем $T = C/R$.

Покажем сначала, что $\text{гр}(x_1, A, H_1, H_2) \cap R = (1)$. Для этого возьмем произвольный элемент $g \in \text{гр}(x_1, A, H_1, H_2) \cap R$. Его можно записать так:

$$g = fr_1t_2 = h_1h_2h_3^{-1}h_4^{-1}$$

для подходящих $f \in A$, $r_1, t_1, h_1 \in H_1$. Отсюда $h_3 = 1$. Сопрягая это равенство, получаем $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 1$, поэтому $g = 1$. Аналогично показывается, что $\text{гр}(x_2, A, H_1, H_3) \cap R = (1)$.

Условимся образ каждого элемента $g \in C$ при естественном гомоморфизме $C \to T = C/R$ обозначать через $\bar{g}$. Вышесказанное означает, что отображения

$$gt_1u_2 \to \overline{gt_1u_2}\ (g \in A,\ t_1 \in H_1,\ u_2 \in H_1^a), \quad a \to x_1,$$

$$gt_1u_2 \to \overline{gt_1u_3}\ (g \in A,\ t_1 \in H_1,\ u_2 \in H_1^a), \quad a \to x_2$$

продолжаются до вложений $\varphi : G \to T$, $\psi : G \to T$ соответственно. Покажем, что если $x^\varphi = y^\psi$, то $x = y$ и $x \in H$.

Предположим, что

$$(a^k g t_1 u_2)^\varphi = (a^m f r_1 v_2)^\psi, \quad (g, f \in A,\ t_1, r_1 \in H_1,\ u_2, v_2 \in H_1^a).$$

Тогда $k = m = 0$ и в группе C для некоторого $h \in H_1$ верно равенство $gt_1u_2 = fr_1v_3\bigl(h_1h_2h_3^{-1}h_4^{-1}\bigr)$. Отсюда $g = f$, $t_1 = r_1h_1$, $u_2 = h_2$, $v_3h_3^{-1} = 1$, $h_4 = 1$. При помощи сопряжений замечаем, что $u_1 = h_1$, $v_1h_1^{-1} = 1$, $h_1 = 1$. Поэтому $t_1 = r_1$, $v_1 = 1$, $u_1 = 1$. Итак, мы показали, что φ и ψ совпадают в точности на H.

Наша цель — показать, что $T \in \mathscr{N}$. Это будет означать, что $\mathrm{dom}_G^{\mathscr{N}}(H) = H$. Будем показывать, что T аппроксимируется группой G.

По теореме Дика отображение

$$x_1 \to x_1,\ x_2 \to x_1,\ h_1 \to h_2,\ h_2 \to h_1,\ h_3 \to h_1,\ h_4 \to h_2,\ f \to f\ (h_1 \in H_1, f \in A)$$

продолжаемо до гомоморфизма $\varphi_1 : C \to \mathrm{гр}(x_1, A, H_1, H_2) \le C$. Несложно заметить, что

$$\begin{aligned} N_1 = \ker\varphi_1 = \mathrm{гр}\bigl(x_1x_2^{-1}, h_2h_3^{-1}, h_1h_4^{-1} \mid h_1 \in H_1\bigr) \\ = \bigl\{\bigl(x_1x_2^{-1}\bigr)^m h_2h_3^{-1}f_1f_4^{-1} \mid h_1, f_1 \in H_1,\ m \in \mathbb{Z}\bigr\}. \end{aligned}$$

Полагаем $A_0 = \{f^{-1}f^a \mid f \in A\}$. Очевидно, что A_0 — полная подгруппа группы A.

Пусть $X = \mathrm{гр}(x_1, x_2) \le C$, $X^2 = \mathrm{гр}(x^2 \mid x \in X)$. Стандартным образом определяется действие фактор-группы X/X^2 на A, а именно полагаем $u^{xX^2} = u^x$, $u \in A$, $x \in X$. Группа X/X^2 конечна, пусть $s = |X/X^2|$ — порядок группы X/X^2, s — степень двойки. Из истинности в A квазитождества из формулировки этой теоремы следует однозначность извлечения квадратного корня из элементов группы A. Через $h^{\frac{1}{s}}$ будем обозначать корень s-й степени из h.

Так как A_0 — полная подгруппа группы A, то A_0 выделяется в A прямым сомножителем: $A = A_0 \times W$. Пусть $\pi : A \to W$ — проектирование группы A на W. Полагаем

$$v^t = \Bigl(\prod_{g \in X/X^2} (v^{g^{-1}})^{\pi g}\Bigr)^{\frac{1}{s}}, \quad A_1 = \{v^t \mid v \in A\}.$$

Повторяя доказательство теоремы Машке [14, теорема 20.2.2], получаем, что $A = A_0 \times A_1$, где $A_0 \lhd C$, $A_1 \lhd C$. Заметим, что если $f_1 \in A_1$, то $f_1^{-1}f_1^a \in A_0 \cap A_1 = (1)$, следовательно, $f_1 = f_1^a$ для всех $f_1 \in A_1$.

Теперь воспользовавшись теоремой Дика, видим, что отображение

$$x_1 \to x_1,\ x_2 \to 1,\ h_1 \to h_1,\ h_2 \to h_2,\ h_3 \to h_1,\ h_4 \to h_2,\ f_0 \to 1,\ f_1 \to f_1$$

$$(h_1 \in H_1,\ f_0 \in A_0,\ f_1 \in A_1)$$

продолжается до гомоморфизма $\varphi_2 : C \to \text{гр}(x_1, A_1, H_1, H_2) \leq C$. Нетрудно убедиться в том, что

$$N_2 = \ker\varphi_2 = \text{гр}\big(x_2, A_0, h_1h_3^{-1}, h_2h_4^{-1} \mid h_1 \in H_1\big) = \big\{x_2^m f_0 h_1 h_3^{-1} r_2 r_4^{-1} \mid m \in \mathbb{Z},\ f_0 \in A_0,\ h_1, r_1 \in H_1\big\}.$$

Покажем, что $N_1 \cap N_2 = R$.

Легко заметить, что всякий элемент $g \in N_1 \cap N_2$ представим в виде

$$g = h_2h_3^{-1}s_1s_4^{-1} = t_1t_3^{-1}r_2r_4^{-1},$$

где $h_1, s_1, t_1, r_1 \in H_1$. Отсюда $s_1 = t_1$, $s_4 = r_4$, $h_2 = r_2$, $h_3 = t_3$. Сопрягая эти равенства, получаем $s_1 = r_1$, $h_1 = r_1$, откуда $g = h_2h_3^{-1}h_1h_4^{-1} \in R$. Итак, $N_1 \cap N_2 = R$.

Из этого равенства следует, что группа $T = C/R$ вложима в группу $C/N_1 \times C/N_2$. Так как

$$C/N_1 \cong C^{\varphi_1} \leq \text{гр}(x_1, A, H_1, H_2), \quad C/N_2 \cong C^{\varphi_2} \leq \text{гр}(x_1, A, H_1, H_2) \cong G,$$

то $T = C/R \in qG \subseteq \mathscr{N}$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть $\mathscr{M}$ — многообразие групп, заданное тождеством*

$$(\forall x)(\forall y)([x^2, y^2] = 1),$$

$\mathscr{N}$ — произвольное квазимногообразие, содержащееся в $\mathscr{M}$. Предположим, что в $\mathscr{N}$ истинно квазитождество $(\forall x)(x^2 = 1 \to x = 1)$. Если $G = \text{гр}(H, a) \in \mathscr{M}$, причем H и $H \cap H^a$ — полные подгруппы, то $G_1 \cap G_2 = H$ в $G *_H^{\mathscr{N}} G$.

Установим теперь 1-замкнутость полных абелевых групп в следующих квазимногообразиях.

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{M}$ — многообразие групп, заданное тождеством*

$$(\forall x)(\forall y)([x^2, y^2] = 1),$$

H — полная группа из $\mathscr{M}$. Тогда H является 1-замкнутой в $\mathscr{M}$.

Доказательство. Считаем, что $G = \text{гр}(H, a)$, $A = H \cap H^a$. Ясно, что $A \triangleleft G$. Положим: $\overline{G} = G/A$, $\varphi : G \to \overline{G}$ — естественный гомоморфизм. Так как H^φ — полная группа и $H^\varphi \cap (H^a)^\varphi = (1)$, то к группе $\overline{G}$ применима теорема 1, по которой $\text{dom}_{\overline{G}}^{\mathscr{M}}(H^\varphi) = H^\varphi$. Известно (см., например, [4]), что для любого многообразия $\mathscr{M}$ групп и для каждой группы $G \in \mathscr{M}$ справедливо следующее: если $N \triangleleft G$ и $N \subseteq H \subseteq G$, то $\text{dom}_{G/N}^{\mathscr{M}}(H/N) = \text{dom}_G^{\mathscr{M}}(H)/N$. Отсюда следует, что

$$\text{dom}_{\overline{G}}^{\mathscr{M}}(H^\varphi) = \text{dom}_G^{\mathscr{M}}(H)/A = H/A.$$

Поскольку $A \subseteq H$, видим, что $\text{dom}_G^{\mathscr{M}}(H) = H$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{M}$ — многообразие групп, заданное тождеством*

$$(\forall x)(\forall y)([x^2, y^2] = 1),$$

$\mathscr{N}$ — произвольное квазимногообразие групп без кручения, содержащееся в $\mathscr{M}$. Если H — полная группа из $\mathscr{N}$, то H 1-замкнута в $\mathscr{N}$.

Доказательство. Несложно заметить, что если $G = \text{гр}(H, a) \in \mathscr{N}$, то $H \cap H^a$ — полная абелева группа. По теореме 2 $\text{dom}_G^{\mathscr{N}}(H) = H$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Isbell J. R.* Epimorphisms and dominions // Proc. of the conf. on categorical algebra, La Jolla, 1965, New York: Lange and Springer, 1966. P. 232–246
2. *Higgins P. M.* Epimorphisms and amalgams // Colloq. Math. 1988. V. 56. P. 1–17.
3. *Шахова С. А.* О решетках доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 2. С. 238–251.
4. *Magidin A.* Dominions in varieties of nilpotent groups // Comm. Algebra. 2000. V. 28. P. 1241–1270.
5. *Budkin A. I.* Dominions in quasivarieties of universal algebras // Stud. Log. 2004. V. 78, N 1/2. P. 107–127.
6. *Мальцев А. И.* Квазипримитивные классы абстрактных алгебр // Докл. АН СССР. 1956. Т. 108, № 2. С. 187–189.
7. *Шахова С. А.* Условия дистрибутивности решеток доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 484–499.
8. *Будкин А. И.* Решетки доминионов универсальных алгебр // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 1. С. 26–45.
9. *Будкин А. И.* Доминионы универсальных алгебр и проективные свойства // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 5. С. 541–557.
10. *Будкин А. И.* Квазимногообразия групп. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2002.
11. *Будкин А. И., Горбунов В. А.* К теории квазимногообразий алгебраических систем // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 2. С. 123–142.
12. *Горбунов В. А.* Алгебраическая теория квазимногообразий. Новосибирск: Научная книга, 1999.
13. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Мир, 1970.
14. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

Статья поступила 4 апреля 2009 г.

Будкин Александр Иванович
Алтайский гос. университет, кафедра алгебры и математической логики,
пр. Ленина, 61, Барнаул 656049
budkin@math.asu.ru