*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2010. Том 51, № 3*

*УДК 512.542.63*

# О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СИЛОВСКИМИ $p$–ПОДГРУППАМИ

**С. И**

**Аннотация.** Устанавливаются случаи, когда конечная $p$-разрешимая группа со специальной силовской $p$-подгруппой имеет $p$-длину 1.

**Ключевые слова:** конечная группа, $p$-разрешимая группа, $p$-длина.

Если $G$ — конечная группа и $p$ — простое число, то фраттиниево $p$-элементарное $G$-расширение $\mathbf{E}$ конечной группы $K$ — это короткая точная последовательность

$$\mathbf{E} : 1 \to K \xrightarrow{\mu} E \xrightarrow{\varepsilon} G \to 1,$$

в которой $K\mu$ является элементарной абелевой $p$-подгруппой из подгруппы Фраттини группы $E$ (см. [1]). Если дано другое фраттиниево $p$-элементарное $G$-расширение

$$\mathbf{E}^* : 1 \to K^* \xrightarrow{\mu^*} E \xrightarrow{\varepsilon^*} G \to 1,$$

то групповой гомоморфизм $\theta : E \to E^*$ такой, что $\varepsilon = \theta\varepsilon^*$ и $K\mu\theta = K^*\mu^* \cap E\theta$, называют *гомоморфизмом $G$-расширения* $\mathbf{E}$ в $\mathbf{E}^*$. Расширение $\mathbf{E}$ называют *универсальным* для некоторого класса $\mathscr{K}$ фраттиниевых $p$-элементарных $G$-расширений, если класс всех эпиморфных образов расширения $\mathbf{E}$ включает все $G$-расширения из класса $\mathscr{K}$. Теорема Гашюца (см. [1, с. 852]) описывает универсальное $G$-расширение для класса всех фраттиниевых $p$-элементарных $G$-расширений. Мы ставим вопрос о существовании универсальных $G$-расширений для различных классов $\mathscr{K}$, в частности, для класса $G$-расширений, впервые исследованного Ю. А. Гольфандом [2] в случае, когда $G$ — группа Шмидта (т. е. минимальная ненильпотентная группа). Мы рассматриваем только конечные группы.

Определение 1. Предположим, что конечная группа $G$ имеет минимальную нормальную $p$-подгруппу $L$. Тогда фраттиниево $p$-элементарное $G$-расширение $\mathbf{E}$ будем называть *гольфандовым $p$-элементарным $G$-расширением,* если для $P = L\varepsilon^{-1}$ выполняются следующие условия:

1) $\Phi(P) = P \cap \Phi(E)$;

2) если $N$ — собственная подгруппа из $P'$, то $N \trianglelefteq E$ и $P/N$ является специальной $p$-группой.

Подгруппу $P$ из определения 1 будем называть гольфандовой $p$-подгруппой. Зафиксируем это понятие в виде отдельного определения.

Определение 2. Конечную $p$-группу $H$ называем *гольфандовой $p$-группой*, если найдется такая конечная группа $E$, что выполняются следующие условия:

1) $H \simeq P \trianglelefteq E$;

© 2010 И С.

2) $\Phi(P) = P \cap \Phi(E)$;

3) $P/\Phi(P)$ — главный фактор группы $E$;

4) если $N$ — собственная подгруппа из $P'$, то $N \trianglelefteq E$ и $P/N$ является специальной $p$-группой.

*Примарная гольфандова группа* — это гольфандова $p$-группа для некоторого простого $p$.

Напомним, что конечная $p$-группа называется *специальной*, если она либо элементарная абелева, либо неабелева $p$-группа, у которой центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и являются элементарными абелевыми (следуя [3], в класс специальных $p$-групп включаем элементарные абелевы $p$-группы). Специальную $p$-группу называют *экстраспециальной*, если она является неабелевой специальной $p$-группой, у которой центр порядка $p$.

Если $G$ — группа Шмидта, то ее неединичная нормальная силовская подгруппа является, как известно, гольфандовой. Так как каждая ненильпотентная конечная группа содержит хотя бы одну подгруппу Шмидта, видим, что в ненильпотентных конечных группах множество примарных гольфандовых подгрупп непусто.

Другим источником примарных гольфандовых подгрупп являются конечные минимальные не $\mathfrak{F}$-группы с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом, где $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация. Известно (см. [4, 5]), что $\mathfrak{F}$-корадикал каждой такой группы является специальной $p$-группой, а фактор-группа $\mathfrak{F}$-корадикала по его подгруппе Фраттини является главным фактором в этой группе (в работе [6] показано, что этим же свойством обладают $\mathfrak{F}$-корадикалы, если условие насыщенности формации $\mathfrak{F}$ ослабить до $p$-насыщенности). В частности, используя теорему Хупперта — Дёрка (см. [4, с. 245]), получаем, что в любой конечной несверхразрешимой группе есть секция $E$, являющаяся минимальной несверхразрешимой группой, у которой неединичная нормальная силовская подгруппа гольфандова.

При построении примеров примарных гольфандовых групп можно использовать конструкции без применения теории формаций. Возьмем, к примеру, конечную $p$-разрешимую не $p$-нильпотентную группу $G$ с $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$, где $p$ — наименьший простой делитель $|G|$. Тогда $C_G(\mathrm{O}_p(G)) \le \mathrm{O}_p(G)$ и среди $G$-нормальных $p$-подгрупп, минимальных по отношению к свойству «не содержаться в гиперцентре», мы можем обнаружить гольфандову $p$-подгруппу.

Поставим следующую проблему.

**Проблема 1.** *Пусть $\mathscr{K}$ — класс всех гольфандовых $p$-элементарных $G$-расширений, где $G$ — конечная группа с минимальной нормальной $p$-подгруппой $L$. Доказать, что для класса $\mathscr{K}$ существует универсальное гольфандово $p$-элементарное расширение.*

В случае, когда $G$ — группа Шмидта, решение проблемы 1 дает теорема Гольфанда [2] (новое доказательство теоремы Гольфанда приведено в [7]). В общем случае проблема 1 остается открытой.

**Проблема 2.** *Выяснить, в каких случаях $p$-длина конечной $p$-разрешимой группы равна* 1, *если ее силовская $p$-подгруппа изоморфна некоторой гольфандовой $p$-группе.*

Решение проблемы 2 было ранее получено в некоторых случаях. В 1973 г. В. Д. Мазуров и С. А. Сыскин доказали [8], что конечная разрешимая группа $G$ имеет 2-длину $\le 1$, если ее силовская 2-подгруппа изоморфна нормальной силовской подгруппе некоторой группы Шмидта. Этот же результат доказан и в работе В. С. Монахова [9] 1975 г. В 1987 г. А. Х. Журтов и С. А. Сыскин распространили этот результат на случай $p > 2$; они установили [10], что при любом $p \geq 2$ конечная $p$-разрешимая группа имеет $p$-длину $\leq 1$, если ее силовская $p$-подгруппа изоморфна нормальной силовской подгруппе некоторой группы Шмидта. С помощью теории формаций результаты работ [8–10] были расширены в статье [11] на конечные $p$-разрешимые группы с силовской $p$-подгруппой, которая изоморфна $\mathfrak{F}$-корадикалу некоторой минимальной не $\mathfrak{F}$-группы, где $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. В настоящей статье будет доказан следующий результат, решающий проблему 2. В отличие от [11] мы не будем использовать теорию формаций.

**Теорема.** *Пусть $G$ — конечная $p$-разрешимая группа, у которой силовская $p$-подгруппа является гольфандовой $p$-группой. Тогда либо $l_p(G) = 1$, либо $p = 3$ и $G$ имеет секцию, изоморфную $[Z_3 \times Z_3]\,\mathrm{SL}_2(3)$.*

Здесь $[Z_3 \times Z_3]\,\mathrm{SL}_2(3)$ — полупрямое произведение элементарной абелевой группы $[Z_3 \times Z_3]$ порядка 9 и группы $\mathrm{SL}_2(3)$. Прежде чем доказывать теорему, приведем некоторые вспомогательные утверждения.

**Лемма 1.** *Пусть $G$ — конечная $p$-разрешимая группа и $N$ — нормальная $p$-подгруппа из $G$ такая, что $l_p(G/N) = 1$. Если $N$ содержится либо в $Z(G)$, либо в $\Phi(G)$, то $l_p(G) = 1$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $N$ — минимальная нормальная подгруппа. Пусть

$$H/N = \mathrm{O}_{p',p}(G/N)$$

и $R/N = \mathrm{O}_{p'}(G/N)$. Так как $l_p(G/N) = 1$, то $p$ не делит $|G : H|$. Очевидно, $R/N$ — нормальная холлова $p'$-подгруппа в $H/N$. Если $N \leq \Phi(G)$, то $H$ — $p$-нильпотентная подгруппа в силу [4, теорема 4.2]. Если $N \leq Z(G)$, получаем, что $R = N \times H_{p'}$, где $H_{p'}$ — нормальная холлова $p'$-подгруппа группы $H$. Итак, $H$ в обоих случаях $p$-нильпотентна. $\square$

**Лемма 2.** *Пусть $P$ — нормальная $p$-подгруппа группы $G$. Если $G/C_G(P)$ — $p$-группа, то $P$ содержится в гиперцентре группы в $G$.*

Доказательство. Так как $[P](G/C_G(P))$ — $p$-группа, то $P$ гиперцентральна в полупрямом произведении $[P](G/C_G(P))$. Поэтому ясно, что $P$ гиперцентральна в $G$. $\square$

**Лемма 3.** *Любая гольфандова $p$-группа $P$ является специальной $p$-группой со следующими свойствами:*

1) *при $p > 2$ экспонента группы $P$ равна $p$;*
2) *при $p = 2$ экспонента группы $P$ не превышает 4.*

Доказательство стандартно, и приводим его для полноты изложения. Пусть $P$ и $E$ — такие, как в определении 2. Положим $Z = Z(P)$. Результат очевиден при $Z = P$, а также при $p = 2$. Предположим, что $P$ неабелева и $p > 2$. По условию $P$ специальна, а значит, $Z = \Phi(P) = P'$. Очевидно, $|P/Z| > p$. Возьмем любые элементы $x, y$ из $P$. Так как $x^p \in Z$, ясно, что $[x,y]^p = [x^p, y] = 1$. Очевидно, $(xy)^p = x^p y^p [y,x]^{p(p-1)/2} = x^p y^p$. Таким образом, отображение $\alpha : x \longmapsto x^p$ является $E$-эндоморфизмом группы $P$. Значит, $P/\operatorname{Ker}\alpha$ и $P^\alpha$ $E$-изоморфны. Поскольку $P^\alpha \leq Z$, то, учитывая свойство 3 определения 2, получаем, что $E$-главные факторы групп $P^\alpha$ и $P/\operatorname{Ker}\alpha$ имеют простые порядки. Отсюда и из $Z \le \operatorname{Ker}\alpha$ получаем, что $P = \operatorname{Ker}\alpha$. $\square$

Следующая лемма легко вытекает из определения 2.

**Лемма 4.** *Пусть $N$ — подгруппа из центра неабелевой гольфандовой $p$-группы $P$. Тогда $P/N$ — гольфандова $p$-группа.*

**Лемма 5** (см. [12]). *Пусть $P$ — нормальная силовская $p$-подгруппа конечной группы $G$. Тогда $\Phi(P) = \Phi(G) \cap P$.*

Доказательство теоремы. Предположим, что теорема неверна. Тогда среди конечных $p$-разрешимых групп, для которых теорема не выполняется, выберем группу $G$, имеющую наименьший порядок. Таким образом, силовская $p$-подгруппа $G_p$ из $G$ — гольфандова $p$-группа, $l_p(G) \ne 1$, но $G$ не имеет секций, изоморфных $[Z_3 \times Z_3]\,\mathrm{SL}_2(3)$. Так как класс нильпотентности группы $G_p$ не больше 2, по [13, VI.6.6] имеем $l_p(G) \le 2$. Поэтому мы можем считать, что $l_p(G) = 2$ и $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$.

Положим $S = \mathrm{O}_p(G)$. Согласно [14, лемма 6.4.3] $C_G(S) \subseteq S$. Следовательно, если $G_p \le M < G$, то $S\mathrm{O}_{p'}(M) = S \times \mathrm{O}_{p'}(M)$. Понятно, что $\mathrm{O}_{p'}(M) = 1$, и так как для $M$ теорема верна, то $M$ $p$-замкнута. Таким образом, в группе $G$ каждая собственная подгруппа, содержащая $G_p$, $p$-замкнута. Теперь ясно, что $G_p$ содержится в единственной максимальной подгруппе, которая как раз совпадает с $N_G(G_p)$.

По теореме С. А. Чунихина (см. [4, теорема 18.12]) $G$ содержит холлову $\{p, r\}$-подгруппу $G_pG_r$ для любого простого $r$. Если $G_pG_r \ne G$, то $G_p \trianglelefteq G_pG_r$. Поэтому мы можем считать, что $G = G_pG_r$ для некоторого простого $r$.

Положим $Z = Z(G_p)$. Теперь покажем, что $Z_G = \bigcap\limits_{x\in G} Z^x = 1$. Если $Z_G \ne 1$, то рассматриваем подгруппу $C_G(Z_G)$, которая является нормальной в $G$ и содержит $G_p$. Так как $G$ не $p$-замкнута, то $C_G(Z_G) = G$. Если $Z = Z_G$, то по [13, VI.6.6] имеем $l_p(G/Z) = 1$, и тогда по лемме 1 группа $G$ имеет единичную $p$-длину. Будем считать, что $1 \ne Z_G < Z$. Поскольку $|G/Z_G| < |G|$ и по лемме 4 группа $G_p/Z_G$ гольфандова, получаем, что $l_p(G/Z_G) = 1$. Тогда по лемме 1 имеем $l_p(G) = 1$; противоречие.

Итак, получаем, что $Z_G = 1$. Тогда $S' = \Phi(S) = 1$. Поэтому $S$ — элементарная абелева группа. Кроме того, $S \supseteq Z$ и $S = C_G(S)$. Рассмотрим $\overline{G} = G/S$. Очевидно, $\overline{G}_p$ — элементарная абелева $p$-группа. Согласно [13, VI.6.6] $l_p(\overline{G}) = 1$. Так как $G$ не имеет никакой собственной нормальной подгруппы, строго содержащей $G_p$, получаем, что $\overline{G} = \overline{G}_p\overline{G}_r$ $p$-нильпотентна. Ясно, что $N_{\overline{G}}(\overline{G}_p)$ является единственной максимальной подгруппой в $\overline{G}$, содержащей $\overline{G}_p$. По лемме 5 $\Phi(\overline{G}_r) = \overline{G}_r \cap \Phi(\overline{G})$. Применяя лемму 7.9 из [4], видим, что $\overline{G}_r/\Phi(\overline{G}_r)$ — прямое произведение дополняемых минимальных нормальных подгрупп в $\overline{G}$. Так как $N_{\overline{G}}(\overline{G}_p)$ — единственная максимальная подгруппа в $\overline{G}$, содержащая $\overline{G}_p$, то $\overline{G}_r/\Phi(\overline{G}_r)$ — главный фактор группы $\overline{G}$. Следовательно, $\overline{G}_p$ действует неприводимо на $\overline{G}_r/\Phi(\overline{G}_r)$. Если $\bar{x} \in \overline{G}_p$ порождает тождественный автоморфизм на $\overline{G}_r/\Phi(\overline{G}_r)$, то $\bar{x}$ действует тривиально на $\overline{G}_r$ ввиду теоремы Холла (см. [15, теорема 12.2.2]). Так как $\mathrm{O}_p(\overline{G}) = 1$, получаем, что $C_{\overline{G}_p}(\overline{G}_r/\Phi(\overline{G}_r)) = 1$. Таким образом, $\overline{G}_p$ можно рассматривать как неприводимую абелеву группу автоморфизмов группы $\overline{G}_r/\Phi(\overline{G}_r)$. Таким образом, $|\overline{G}_p| = p$ согласно [13, VI.8.1].

Теперь зафиксируем $s \in S\backslash Z$ и рассмотрим $[G_p, s]$. Ясно, что $[G_p, s] \le Z$. Так как $[xy, s] = [x, s]^y[y, s] = [x, s][y, s]$ для любых $x, y \in G_p$, то $[G_p, s] = \{[x, s] \mid$

$x \in G_p\}$ и отображение

$$f : x \longmapsto [x, s], \quad x \in G_p,$$

является эпиморфизмом группы $G_p$ на $[G_p, s]$. Ядро эпиморфизма $f$ равно $S$. Следовательно, $G_p/S \simeq [G_p, s]$ имеет порядок $p$. По условию найдутся конечная группа $E$ и в ней нормальная подгруппа $P$ со следующими свойствами: 1) $G_p \simeq P \trianglelefteq E$; 2) $\Phi(P) = P \cap \Phi(E)$; 3) $P/\Phi(P)$ — главный фактор группы $E$; 4) если $N$ — собственная подгруппа из $P'$, то $N \trianglelefteq E$ и $P/N$ является специальной $p$-группой. Ясно, что в $Z$ имеется подгруппа $Z_0$ такая, что $|Z : Z_0| = p$ и $[G_p, s] \subseteq Z_0$ при $|Z| > p$. Ввиду отмеченных свойств 1–4 $G_p/Z_0$ — экстраспециальная $p$-группа. Кроме того, $S/Z_0$ — максимальная абелева подгруппа индекса $p$ в $G_p/Z_0$. Теперь мы можем применить лемму 5.1.9 из [14], согласно которой имеем равенство $|S/Z_0 : Z/Z_0| = p$. Тогда $|G_p/Z| = p^2$. Если $|Z| > p$, то $[G_p, s] \leq Z_0$ и $sZ_0$ содержится в $Z(G_p/Z_0) = Z/Z_0$, а значит, $s \in Z$. Получили противоречие. Следовательно, доказали, что $|G_p| = p^3$. Если $\Phi(G) \cap S \neq 1$, то, применяя [13, VI.6.6] и лемму 1, получим, что $l_p(G) = 1$. Снова получаем противоречие. Поэтому $\Phi(G) \cap S = 1$ и по лемме 7.9 из [4] $S$ имеет дополнение $H$ в $G$. Тогда $S = Z_p \times Z_p$ и $G = [Z_p \times Z_p]H$, где $H \simeq \overline{G} = G/S$ и $Z_p$ — группа порядка $p$. Так как $H$ порождается двумя силовскими $p$-подгруппами, то, применяя лемму 8.6.7 из [14], получаем $H \leq \mathrm{SL}_2(p)$.

Пусть $p = 2$. Тогда $G_p$ является либо диэдральной группой, либо группой кватернионов. Так как $S$ — элементарная абелева подгруппа порядка 4 в $G_p$, мы рассматриваем только случай, когда $G_p$ — диэдральная группа порядка 8. Но по лемме 7.7.2 из [16] группа автоморфизмов диэдральной 2-группы порядка не меньше 8 является 2-группой. Следовательно, ввиду леммы 2 $P$ содержится в гиперцентре группы $E$. Последнее противоречит определению гольфандовой подгруппы.

Пусть $p > 2$. Применяя лемму 8.6.12 из [14], сразу получаем $p = 3$ и $H \simeq \mathrm{SL}_2(3)$. $\square$

Из доказанной теоремы вытекают результаты о $p$-длине из работ [8–11]. Формацию $\mathfrak{F}$ называют *$p$-насыщенной* (см. [17]), если из $G/\Phi(\mathrm{O}_p(G)) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$. Например, класс всех конечных $p$-сверхразрешимых групп с абелевой холловой $p'$-подгруппой является $p$-насыщенной, но не насыщенной формацией.

Следующий результат является прямым следствием доказанной теоремы и теоремы 2 из [6].

**Следствие.** *Пусть $G$ — конечная $p$-разрешимая группа с экстраспециальной силовской $p$-подгруппой $P$. Предположим, что $P$ изоморфна $\mathfrak{F}$-корадикалу некоторой минимальной не $\mathfrak{F}$-группы, где $\mathfrak{F}$ — некоторая $p$-насыщенная формация. Тогда либо $l_p(G) = 1$, либо $p = 3$ и $\mathrm{SL}_2(3)$ содержится среди секций группы $G$.*

## ЛИТЕРАТУРА

**1.** *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

**2.** *Гольфанд Ю. А.* О группах, все подгруппы которых специальные // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 8. С. 1313–1315.

**3.** *Suzuki M.* Group theory. II. New York; Berlin; Heidelberg; Tokyo: Springer-Verl., 1986.

**4.** *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

**5.** *Wenbin Guo.* The theory of classes of groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Sci. Press / Kluwer Acad. Publ., 2000.

**6.** *Yi Xiaolan.* On finite minimal non $\mathfrak{F}$-groups // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2007. N 6. P. 203–206.
**7.** *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Robinson Derek J. S.* On finite minimal non-nilpotent groups // Proc Amer. Math. Soc. 2005. V. 133, N 12. P. 3455–3462.
**8.** *Мазуров В. Д., Сыскин С. А.* О конечных группах со специальными силовскими 2-подгруппами // Мат. заметки. 1973. Т. 14, № 2. С. 217–222.
**9.** *Монахов В. С.* Произведение конечных групп, близких к нильпотентным // Конечные группы: сб. науч. статей под науч. ред. Л. А. Шеметкова. Минск: Наука и техника, 1975. С. 70–100.
**10.** *Журтов А. Х., Сыскин С. А.* О группах Шмидта // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 2. С. 74–78.
**11.** *Shemetkov L. A., Yi Xiaolan.* On the $p$-length of finite $p$-soluble groups // Тр. Ин-та математики. 2008. V. 16, N 1. P. 93–96.
**12.** *Baer R.* Supersoluble immersion // Canad. J. Math. 1959. V. 11, N 2. P. 353–369.
**13.** *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
**14.** *Kurzweil H., Stellmacher B.* The theory of finite groups: an introduction. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2004.
**15.** *Hall M.* The theory of groups. New York: The Macmillan Comp., 1959.
**16.** *Gorenstein D.* Finite groups. New York; Evanston; London: Harper and Row, 1968.
**17.** *Баллестер-Болинше А., Кальво К., Шеметков Л. А.* О частично насыщенных формациях конечных групп // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 6. С. 3–24.

*Статья поступила 17 февраля 2009 г.,*
*окончательный вариант — 16 сентября 2009 г.*

Yi Xiaolan (И Сяолан)
Department of Mathematics, Zhejiang University,
310007 Hangzhou, P. R. China
yixiaolan2005@126.com