Сибирский математический журнал
Июль—август, 2010. Том 51, № 4

УДК 517.5+517.982.27

ВЕКТОРНОЗНАЧНЫЕ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ ФУНКЦИЙ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С. В. Асташкин

Аннотация. Получены соотношения, описывающие поведение векторнозначных гауссовских сумм в симметричных пространствах на квадрате, характер которых зависит от того, тривиален или нет нижний индекс Бойда пространства. Аналогичные результаты доказаны также в случае общих систем независимых одинаково и симметрично распределенных случайных величин.

Ключевые слова: функции Радемахера, гауссовская случайная величина, независимые случайные величины, симметричное пространство, пространство Орлича, индекс Бойда.

Введение

Пусть $r_k(t) = \operatorname{sign}\sin 2^k\pi t$ $(k = 1, 2, \dots)$ — функции Радемахера, рассматриваемые на отрезке $[0, 1]$. Согласно классическому неравенству Хинчина [1] для любого $p > 0$ существует такая константа $C_p > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и произвольных вещественных a_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ выполнено

$$C_p^{-1}\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2} \le \left\|\sum_{k=1}^n a_k r_k\right\|_{L_p} \le C_p\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2}.$$

Это соотношение породило огромное количество исследований и обобщений, нашло многочисленные применения в самых различных разделах анализа (см., например, [2]). В частности, в 1975 г. В. А. Родин и Е. М. Семенов доказали, что в случае симметричных пространств X на $[0, 1]$ неравенства

$$C^{-1}\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2} \le \left\|\sum_{k=1}^n a_k r_k\right\|_X \le C\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2} \tag{1}$$

имеют место тогда и только тогда, когда X содержит пространство G, где G — замыкание L_∞ в экспоненциальном пространстве Орлича $\operatorname{Exp} L^2$, построенном по функции $N_2(u) = e^{u^2} - 1$ [3]. Условие $X \supset G$ означает, что пространство X в определенном смысле «удалено»от пространства L_∞. Аналогичное, но более ограничительное условие позволяет найти «естественное» описание поведения векторнозначных радемахеровских сумм $\sum\limits_{k=1}^n x_k(s)r_k(t)$ в симметричных пространствах на квадрате. А именно, если X — симметричное пространство на $[0, 1]$, то неравенства

$$C^{-1}\left\|\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2}\right\|_X \le \left\|\sum_{k=1}^n x_k(s)r_k(t)\right\|_{X(I\times I)} \le C\left\|\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2}\right\|_X, \tag{2}$$

где константа $C > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$ и последовательности функций $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$, выполнены тогда и только тогда, когда его индекс Бойда α_X положителен [4, предложение 2.d.1; 5].

Система Радемахера является классическим примером последовательности равномерно ограниченных независимых симметрично и одинаково распределенных случайных величин (с. в.). Данная работа посвящена распространению соотношений вида (2) на аналогичные системы неограниченных с. в. Особое внимание будет уделено системе с. в., имеющих гауссовское распределение. Кроме того, будет показано, что при определенных условиях на систему с. в. описание поведения векторнозначных сумм, аналогичное (2), может быть найдено и для симметричных пространств X, «близких» к L_∞, т. е. таких, что $\alpha_X = 0$.

В работе мы ограничимся рассмотрением с. в., областью определения которых является отрезок $I = [0, 1]$ (или квадрат $I \times I$) с мерой Лебега. Однако, конечно, все результаты остаются верными и в случае произвольного неатомического вероятностного пространства.

Автор выражает благодарность рецензенту, предложения и замечания которого позволили улучшить окончательный текст статьи, в частности, упростить доказательство леммы 4.

1. Обозначения и предварительные сведения

Банахово пространство X вещественнозначных функций, измеримых по Лебегу на отрезке $I = [0, 1]$, называется *симметричным* (или *перестановочно-инвариантным*), если

1) из того, что $y \in X$ и $|x(t)| \le |y(t)|$ для п. в. $t \in I$, следует: $x \in X$ и $\|x\|_X \le \|y\|_X$;

2) из того, что $y \in X$ и

$$m\{t \in I : |x(t)| > \tau\} = m\{t \in I : |y(t)| > \tau\} \quad (\tau > 0)$$

(здесь и далее m — мера Лебега), следует: $x \in X$ и $\|x\|_X = \|y\|_X$.

Если X — симметричное пространство, то *двойственное* (или *ассоциированное*) пространство X' состоит из всех измеримых функций y, для которых $\|y\|_{X'} := \sup\left\{\int_0^1 |x(t)y(t)|\,dt \ :\ x \in X,\ \|x\|_X \le 1\right\} < \infty$. Пространство X естественным образом вложено во второе двойственное X'', и $\|x\|_{X''} \le \|x\|_X$ $(x \in X)$. Пространство X'' обладает следующим свойством *максимальности*: если $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq X''$, $x_n \to x$ п. в. на $[0, 1]$ и $\sup_n \|x_n\|_{X''} < \infty$, то $x \in X''$ и $\|x\|_{X''} \le \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_{X''}$.

Для любого симметричного пространства X на $[0, 1]$ справедливы непрерывные вложения $L_\infty \subseteq X \subseteq L_1$. В каждом симметричном пространстве X непрерывен *оператор растяжения*

$$\sigma_\tau x(t) := x(t/\tau) \cdot \chi_{[0,\min(1,\tau)]}(t) \quad (\tau > 0)$$

и $\|\sigma_\tau\|_{X\to X} \le \max(1, \tau)$ [6, теорема 2.4.5]. С помощью него определяются *индексы Бойда* пространства X:

$$\alpha_X = \lim_{\tau\to 0+} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X\to X}}{\ln \tau} \quad \text{и} \quad \beta_X = \lim_{\tau\to +\infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X\to X}}{\ln \tau}.$$

Всегда $0 \le \alpha_X \le \beta_X \le 1$.

Важным примером симметричного пространства является пространство Орлича, естественное обобщение L_p-пространств. Если $N(x)$ — возрастающая выпуклая функция на $[0,\infty)$, $N(0)=0$, то пространство Орлича L_N состоит из всех измеримых на $[0,1]$ функций $x=x(t)$, для которых

$$\|x\|_{L_N}=\inf\left\{u>0:\int\limits_0^1 N\left(\frac{|x(t)|}{u}\right)\,dt\le 1\right\}<\infty.$$

В частности, если $N_q(x)$ эквивалентна функции $e^{x^q}-1$ $(q>0)$, то получаем экспоненциальное пространство Орлича (или пространство Зигмунда) $\operatorname{Exp}L^q$. Известно [7, 8], что

$$\|x\|_{\operatorname{Exp}L^q}\asymp\sup_{0<u\le 1}(x^*(u)\ln^{-1/q}(e/u)). \tag{3}$$

Здесь и всюду далее $x^*(u)$ — невозрастающая перестановка функции $|x(t)|$, т. е.

$$x^*(u)=\inf\{\tau>0:m\{t\in[0,1]:|x(t)|>\tau\}<u\}\quad(0<u\le 1).$$

Пространства $\operatorname{Exp}L^q$ «близки» к пространству L_∞ в том смысле, что $\alpha_{\operatorname{Exp}L^q}=\beta_{\operatorname{Exp}L^q}=0$ для каждого $q>0$.

Если X — симметричное пространство на $I=[0,1]$, то соответствующее симметричное пространство $X(I\times I)$ на квадрате состоит из всех функций $x(s,t)$, измеримых на $I\times I$ и таких, что $x^*\in X$. При этом $\|x\|_{X(I\times I)}:=\|x^*\|_X$.

Через $[a]$ в дальнейшем будет обозначаться целая часть вещественного числа a, а через $\|x\|_p$ — норма в $L_p[0,1]$ измеримой функции $x=x(t)$. Наконец, равенство двух банаховых пространств будет пониматься как равенство множеств и эквивалентность их норм, а выражение вида $f\asymp g$ означает, что $cf\le g\le Cf$ для некоторых $c>0$ и $C>0$, причем эти константы не зависят от всех или части аргументов функций (квазинорм) f и g.

2. Векторнозначные гауссовские суммы в симметричных пространствах

Пусть $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность независимых стандартных гауссовских с. в., определенных на отрезке $I=[0,1]$. Следующий результат аналогичен соответствующей теореме для функций Радемахера, упомянутой во введении.

Теорема 1. *Если X — симметричное пространство на I, то следующие условия эквивалентны:*

1) $\alpha_X>0$*;*

2) *существует такая константа $A>0$, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ и всех $x_1,\dots,x_n\in X$*

$$A^{-1}\left\|\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2}\right\|_X\le\left\|\sum_{k=1}^n x_k(s)g_k(t)\right\|_{X(I\times I)}\le A\left\|\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2}\right\|_X. \tag{4}$$

В доказательстве мы используем ряд вспомогательных утверждений; сформулируем их в виде лемм.

Следующая экспоненциальная оценка для сумм Радемахера хорошо известна [2, § 2, с. 11]:

$$m\left\{t\in[0,1]:\left|\sum_{k=1}^n a_k r_k(t)\right|>u\right\}\le D\exp\left(-\frac{u^2}{2\sum\limits_{k=1}^n a_k^2}\right)\quad(u>0), \tag{5}$$

где $D = e\sqrt{2}$ (аналогичный результат справедлив также для общих последовательностей независимых равномерно ограниченных функций, в среднем равных нулю [9, теорема 2.5]).

Заметим, что приведенное в [2, § 2, с. 11] доказательство соотношения (5) основано на применении следующей оценки моментов сумм Радемахера:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k r_k\right\|_{2m}^{2m} \le B_{2m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^m,$$

где

$$B_{2m} := \frac{(2m)!}{2^m m!} \quad (m = 1, 2, \dots). \tag{6}$$

В то же время хорошо известно, что момент порядка $2m$ стандартной гауссовской величины g определяется равенством $\|g\|_{2m}^{2m} = B_{2m}$. Следовательно, повторяя все рассуждения из [2, § 2, с. 11], получаем точно такую же экспоненциальную оценку в гауссовском случае.

Лемма 1. *Если $D = e\sqrt{2}$, то для всех $n \in \mathbb{N}$ и произвольных вещественных $a_1, \dots, a_n$*

$$m\left\{t \in [0,1] : \left|\sum_{k=1}^{n} a_k g_k(t)\right| > u\right\} \le D\exp\left(-\frac{u^2}{2\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}\right) \quad (u > 0).$$

Для данной измеримой на $I = [0,1]$ функции $\varphi(t)$ определим оператор тензорного произведения $T_\varphi x(s,t) = x(s)\varphi(t)$. Предположим, что $\varphi(t)$ неограниченная на $I = [0,1]$, а оператор T_φ ограниченно действует из симметричного пространства $X(I)$ в $X(I \times I)$. Тогда $\alpha_X > 0$ [5, лемма 1] (см. также [10, лемма 17]).

Одновременно справедливо и следующее в некотором смысле обратное к только что сформулированному утверждение.

Лемма 2. *Пусть симметричное пространство X таково, что $\alpha_X > 0$. Тогда если $\varphi \in L_p(I)$ для каждого $p < \infty$, то оператор T_φ ограничен из $X(I)$ в $X(I \times I)$.*

Доказательство. По условию ввиду определения индекса α_X существуют такие $\delta \in (0, 1/2)$ и $C > 0$, что для всех $\tau \in (0,1]$

$$\|\sigma_\tau\|_{X \to X} \le C\tau^{2\delta}.$$

Пусть $x \in X(I)$. Тогда, применяя неравенство Гёльдера и предыдущее соотношение, получим

$$\begin{aligned}
\|T_\varphi x\|_{X(I\times I)} &\le \left\|x(s)\sum_{k=1}^{\infty}\varphi^*(2^{-k})\chi_{(2^{-k},2^{-k+1}]}(t)\right\|_{X(I\times I)} \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty}\varphi^*(2^{-k})\|\sigma_{2^{-k}}x\|_X \le C\sum_{k=1}^{\infty}\varphi^*(2^{-k})2^{-2k\delta}\|x\|_X \\
&\le C\left(\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k\delta/(1-\delta)}\right)^{1-\delta}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varphi^*(2^{-k})^{1/\delta}2^{-k}\right)^{\delta}\|x\|_X \\
&= C(2^{\delta/(1-\delta)}-1)^{\delta-1}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\varphi^*(2^{-k})\chi_{(2^{-k},2^{-k+1}]}(t)\right\|_{L_{1/\delta}}\|x\|_X \le C_\delta\|\varphi\|_{L_{1/\delta}}\|x\|_X.
\end{aligned}$$

Тем самым оператор T_φ ограничен из $X(I)$ в $X(I \times I)$ и

$$\|T_\varphi\|_{X(I)\to X(I\times I)} \le C_\delta \|\varphi\|_{L_{1/\delta}}. \qquad \square$$

Последний результат, который нам понадобится, относится к сравнению радемахеровских и гауссовских сумм.

Лемма 3. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и всех вещественных $a_1, \dots, a_n$*

$$m\left\{t \in I : \left|\sum_{k=1}^n a_k r_k(t)\right| > \tau\right\} \le \frac{2}{\alpha} m\left\{t \in I : \left|\sum_{k=1}^n a_k g_k(t)\right| > \alpha\tau\right\} \quad (\tau > 0),$$

где $\alpha := \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_1^\infty e^{-t^2/2}\,dt$.

Доказательство. Заметим, что $\alpha = m\{t \in [0,1] : |g(t)| > 1\}$, где g — стандартная гауссовская с. в. Следовательно, для произвольных $\tau > 0$ и $k = 1, 2, \dots$

$$m\{t \in [0,1] : |r_k(t)| > \tau\} \le \frac{1}{\alpha} m\{t \in [0,1] : |g_k(t)| > \tau\}.$$

Так как с. в. r_k (соответственно g_k) симметрично распределены и независимы, применяя известное неравенство Квапеня — Рыхлика [11, теорема 5.4.4], получаем нужное нам соотношение.

Доказательство теоремы 1. Предположим сначала, что $\alpha_X > 0$. Кроме того, пусть

$$f := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \in X.$$

Тогда по лемме 1 для п. в. $s \in I$

$$m\left\{t \in I : \left|\sum_{i=1}^n x_i(s) g_i(t)\right| > \tau\right\} \le D \exp\left(-\frac{\tau^2}{2f(s)^2}\right).$$

Непосредственно проверяется, что

$$\exp\left(-\frac{\tau^2}{2f(s)^2}\right) \le m\{t \in I : 2f(s) \ln^{1/2} e/t > \tau\} \quad (0 < s \le 1).$$

Тем самым, интегрируя предыдущее неравенство по I, получаем

$$m\left\{(s,t) \in I \times I : \left|\sum_{i=1}^n x_i(s) g_i(t)\right| > \tau\right\} \le Dm\{(s,t) \in I \times I : 2f(s) \ln^{1/2} e/t > \tau\}$$

и, таким образом,

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i(s) g_i(t)\right\|_{X(I\times I)} \le 2D \|T_\varphi f\|_{X(I\times I)},$$

где $\varphi(t) = \ln^{1/2}(e/t)$. Отсюда по лемме 2

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i(s) g_i(t)\right\|_{X(I\times I)} \le M \|f\|_X,$$

и правая часть (4) доказана.

Левое неравенство в (4) выполнено в любом симметричном пространстве. Действительно, если $x_1, \dots, x_n \in X$, то по лемме 3 для п. в. $s \in I$ и каждого $\tau > 0$

$$m\left\{t \in I : \left|\sum_{k=1}^{n} x_k(s) r_k(t)\right| > \tau\right\} \le \frac{2}{\alpha} m\left\{t \in I : \left|\sum_{k=1}^{n} x_k(s) g_k(t)\right| > \alpha\tau\right\}.$$

Применяя теорему Фубини, получаем

$$m\left\{(s,t) \in I\times I : \left|\sum_{k=1}^{n} x_k(s) r_k(t)\right| > \tau\right\} \le \frac{2}{\alpha} m\left\{(s,t) \in I\times I : \left|\sum_{k=1}^{n} x_k(s) g_k(t)\right| > \alpha\tau\right\},$$

откуда ввиду [6, следствие 2.4.2]

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k r_k\right\|_{X(I\times I)} \le \frac{2}{\alpha^2}\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k g_k\right\|_{X(I\times I)}.$$

С другой стороны, для любого симметричного пространства X и произвольных $x_1, \dots, x_n \in X$ в силу [4, предложение 2.d.1] выполнено неравенство

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k r_k\right\|_{X(I\times I)} \ge c\left\|\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right)^{1/2}\right\|_X.$$

В итоге отсюда и из предыдущего неравенства следует, что

$$\left\|\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}\right\|_X \le \frac{2}{\alpha^2 c}\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k g_k\right\|_{X(I\times I)}.$$

Предположим теперь, что в симметричном пространстве X неравенство (4) выполнено для каждого $n \in \mathbb{N}$ и всех $x_1, \dots, x_n \in X$. Легко видеть, что тогда оператор T_g, где g — стандартная гауссовская с. в., ограничен в X. Так как g — неограниченная функция на $[0,1]$, заключаем, что $\alpha_X > 0$ [5, лемма 1], и теорема доказана. $\square$

Следствие 1. *Если X — симметричное пространство на I, то следующие условия эквивалентны:*

1) $\alpha_X > 0$;

2) *существует такая константа $B > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и всех $x_1, \dots, x_n \in X$*

$$B^{-1}\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k(s) r_k(t)\right\|_{X(I\times I)} \le \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k(s) g_k(t)\right\|_{X(I\times I)} \le B\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k(s) r_k(t)\right\|_{X(I\times I)}.$$

Замечание 1. Пусть оператор T_φ, где $\varphi(t) = \ln^{1/2}(e/t)$, ограниченно действует из симметричного пространства $X(I)$ в симметричное пространство $Y(I \times I)$. Тогда доказательство теоремы 1 показывает, что

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k(s) g_k(t)\right\|_{Y(I\times I)} \le C\left\|\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}\right\|_{X(I)},$$

где константа $C > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$ и $x_1, \dots, x_n \in X$.

Перейдем к рассмотрению векторнозначных гауссовских сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k(s)g_k(t)$ в симметричных пространствах X, «близких» к L_∞, т. е. когда $\alpha_X = 0$. Пусть X — симметричное пространство такое, что $\beta_X < 1$, $\alpha > 0$. Через $X(\ln^{-\alpha})$ обозначим множество всех измеримых на $[0,1]$ функций $x(t)$, для которых конечна квазинорма

$$\|x\|_{X(\ln^{-\alpha})} := \|x^*(t)\ln^{-\alpha} e/t\|_X.$$

Тогда ввиду [12]

$$\|x\|_{X(\ln^{-\alpha})} \asymp \|x^{**}(t)\ln^{-\alpha} e/t\|_X, \quad \text{где } x^{**}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t x^*(s)\,ds$$

и, следовательно, $X(\ln^{-\alpha})$ — симметричное пространство.

Теорема 2. *Пусть X — симметричное пространство, $\beta_X < 1$. Тогда существует такая константа $A > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и всех $x_1, \dots, x_n \in X$*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k(s)g_k(t)\right\|_{X(\ln^{-1/2})(I\times I)} \le A\left\|\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}\right\|_X. \tag{7}$$

Для доказательства нам потребуется техническая

Лемма 4. *Для любых положительных монотонно убывающих функций $x(t)$ и $y(t)$ на $[0,1]$ справедливо неравенство*

$$(x(s)\cdot y(t))^*(2u) \le x(u)\cdot y(u), \quad 0 < u \le 1/2.$$

Доказательство. Так как $x(s) \le x(u)$ для $s \in [u,1]$ и $y(t) \le y(u)$ для $t \in [u,1]$, а $m\{[u,1]\times[u,1]\} = (1-u)^2$, для каждого $0 < u \le 1/2$

$$m\{(s,t) \in I\times I : x(s)y(t) > x(u)y(u)\} \le 1-(1-u)^2 < 2u.$$

Нужное нам неравенство теперь следует из определения перестановки. $\square$

Доказательство теоремы 2. Ввиду замечания 1 достаточно проверить, что оператор T_φ, где $\varphi(t) = \ln^{1/2}(e/t)$, действует из $X(I)$ в $X(\ln^{-1/2})(I\times I)$ ограниченно. Если $x \in X(I)$, то по лемме 4

$$\|T_\varphi x\|_{X(\ln^{-1/2})(I\times I)} \le \|x^*(u/2)\ln^{1/2}(2e/u)\ln^{-1/2}(e/u)\|_{X(I)}$$
$$\le \sqrt{2}\|\sigma_2 x\|_{X(I)} \le 2\sqrt{2}\|x\|_{X(I)}. \quad \square$$

Замечание 2. Ввиду леммы 3 аналогичное утверждение справедливо и для векторнозначных рядов по системе Радемахера.

Покажем теперь, что теорема 2 точна в случае экспоненциальных пространств Орлича $\operatorname{Exp} L^q$ $(q > 0)$.

Теорема 3. *Пусть $q > 0$ произвольно. Предположим, что для некоторого симметричного пространства Y*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k(s)g_k(t)\right\|_{Y(I\times I)} \le A\left\|\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}\right\|_{\operatorname{Exp} L^q}, \tag{8}$$

где $A > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$ и $x_1, \dots, x_n \in \operatorname{Exp} L^q$. Тогда $Y \supset \operatorname{Exp} L^q(\ln^{-1/2})$.

При этом $\operatorname{Exp} L^q(\ln^{-1/2}) = \operatorname{Exp} L^r$, где $r = \frac{2q}{2+q}$.

Для доказательства нам потребуются две леммы.

Лемма 5. *Для произвольных $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ справедливо неравенство*

$$(\ln^{\alpha}(e/s) \cdot \ln^{\beta}(e/t))^*(u) \geq 2^{-\alpha-\beta} \ln^{\alpha+\beta}(e/u) \quad (0 < u \leq 1).$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$m\{u \in I : 2^{-\alpha-\beta} \ln^{\alpha+\beta}(e/u) > \tau\} \leq m\{u \in I : 2^{-\alpha-\beta} \ln^{\alpha+\beta}(e^2/2u) > \tau\} = \frac{1}{2} \exp(2 - 2\tau^{\frac{1}{\alpha+\beta}}).$$

Поэтому ввиду [6, следствие 2.4.2] достаточно показать, что для всех $\tau \geq 1$ выполнено

$$L_{\alpha,\beta}(\tau) := m\{(s,t) \in I \times I : \ln^{\alpha}(e/s) \cdot \ln^{\beta}(e/t) > \tau\} \geq \frac{1}{2} \exp(2 - 2\tau^{\frac{1}{\alpha+\beta}}).$$

Действительно, после замены переменной имеем

$$L_{\alpha,\beta}(\tau) = \int_0^1 m\left\{t \in I : \ln^{\beta}(e/t) > \frac{\tau}{\ln^{\alpha}(e/s)}\right\} ds$$
$$= e^2 \int_1^{\infty} \mathrm{Exp}\left(-u - \frac{\tau^{1/\beta}}{u^{\alpha/\beta}}\right) du \geq e^2 \int_{\tau^{1/(\alpha+\beta)}}^{\infty} e^{-2u}\, du = \frac{1}{2} \exp(2 - 2\tau^{\frac{1}{\alpha+\beta}}). \qquad \square$$

Лемма 6. *Для любых $q > 0$ и $p > 0$*

$$\mathrm{Exp}\, L^q(\ln^{-1/p}) = \mathrm{Exp}\, L^r, \quad \text{где } r = \frac{pq}{p+q}.$$

Доказательство. Из определения перестановки и соотношения (3) сразу получаем, что

$$\|x\|_{\mathrm{Exp}\, L^q(\ln^{-1/p})} \asymp \sup_{0<u\leq 1} (x^*(t) \ln^{-1/p}(e/t))^*(u) \ln^{-1/q}(e/u)$$
$$\leq \sup_{0<u\leq 1} (x^*(u) \ln^{-1/q-1/p}(e/u)) \asymp \|x\|_{\mathrm{Exp}\, L^r}.$$

С другой стороны, если $x \in \mathrm{Exp}\, L^q(\ln^{-1/p})$, то

$$(x^*(t) \ln^{-1/p}(e/t))^*(u) \leq C \ln^{1/q}(e/u) \quad (0 < u \leq 1).$$

Применяя [6, теорема 2.2.1], можно найти сохраняющее меру отображение $w : [0,1] \to [0,1]$ такое, что

$$x^*(t) \ln^{-1/p}(e/t) \leq 2C \ln^{1/q}(e/w(t)) \quad (0 < t \leq 1),$$

откуда

$$x^*(u) \leq 2C(\ln^{1/p}(e/t) \ln^{1/q}(e/w(t)))^*(u) \quad (0 < u \leq 1).$$

Следовательно, ввиду [6, с. 93]

$$x^*(u) \leq 2C \ln^{1/q}(2e/u) \ln^{1/p}(2e/u) \leq C_1 \ln^{1/q+1/p}(e/u) \quad (0 < u \leq 1).$$

В итоге, снова учитывая (3), получаем, что $x \in \mathrm{Exp}\, L^r$, и лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3. Из условия получаем, что оператор $T_g x(s,t) = g(s)x(t)$, где g — стандартная гауссовская с. в., ограничен из $X := \operatorname{Exp} L^q$ в $Y(I \times I)$. Так как для любого $\tau \geq 1$

$$m\{s \in I : |g(s)| > \tau\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_\tau^\infty e^{-t^2/2}\,dt \geq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_\tau^{2\tau} e^{-t^2/2}\,dt \geq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-2t^2},$$

а Y — симметричное пространство, то и оператор $T_\varphi x(s,t) = \varphi(s)x(t)$, где $\varphi(s) = \ln^{1/2}(e/s)$, ограничен из X в $Y(I \times I)$. Тем самым ввиду соотношения (3) $\ln^{1/q}(e/s) \cdot \ln^{1/2}(e/t) \in Y(I \times I)$, а тогда по лемме 5 и $\ln^{1/q+1/2}(e/u) \in Y$. Отсюда, опять применяя (3), заключаем, что $Y \supset \operatorname{Exp} L^r$, где $r = \frac{2q}{2+q}$.

Второе утверждение теоремы — следствие леммы 6. □

Аналогичное утверждение справедливо и для радемахеровских сумм.

Теорема 4. *Пусть $q > 0$ произвольно. Предположим, что для некоторого симметричного пространства Y*

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k(s) r_k(t) \right\|_{Y(I\times I)} \leq A \left\| \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} \right\|_{\operatorname{Exp} L^q}, \tag{9}$$

где $A > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$ и $x_1, \dots, x_n \in \operatorname{Exp} L^q$. Тогда $Y'' \supset \operatorname{Exp} L^r(\ln^{-1/2})$, где $r = \frac{2q}{2+q}$.

Доказательство. Как видно из доказательства предыдущей теоремы, достаточно показать, что оператор $T_g x(s,t) = g(s)x(t)$, где g — стандартная гауссовская с. в., ограничен из $X := \operatorname{Exp} L^q$ в $Y''(I \times I)$.

Пусть $x_k(t) = x(t)/\sqrt{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$, где $n \in \mathbb{N}$ и $x(t) \in X$ произвольны. Кроме того, обозначим

$$v_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n r_k(t), \quad n = 1, 2, \dots.$$

Тогда ввиду условия (9)

$$\|x(s) v_n^*(t)\|_{Y(I\times I)} \leq A \|x\|_X \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{10}$$

Так как распределение $v_n(t)$ симметрично, по центральной предельной теореме [13, теорема 7.2]

$$\lim_{n\to\infty} m\{t \in [0,1] : |v_n(t)| > \tau\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_\tau^\infty e^{-t^2/2}\,dt \quad (\tau > 0).$$

Тогда в силу [14, лемма 3.1]

$$\lim_{n\to\infty} v_n^*(t) = g^*(t) \quad (0 < t \leq 1).$$

Поэтому, переходя в неравенстве (10) к пределу при $n \to \infty$ и пользуясь максимальностью второго двойственного пространства Y'', получим, что

$$\|T_g x(s,t)\|_{Y''(I\times I)} = \|g^*(t) x(s)\|_{Y''(I\times I)} \leq A \|x\|_X (x \in X). \qquad \square$$

3. Векторнозначные суммы независимых функций в общем случае

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково и симметрично распределенных с. в. на $[0,1]$ такая, что $f := f_1^* \in L_p[0,1]$ для каждого $p < \infty$. Если $m \in \mathbb{N}$ и $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$, то

$$\int_0^1 f(t)^{2k_1}\,dt \cdot \ldots \cdot \int_0^1 f(t)^{2k_n}\,dt \le \|f\|_{2m}^{2k_1} \cdot \|f\|_{2m}^{2k_n} = \|f\|_{2m}^{2m}.$$

Следовательно, применяя стандартные выкладки (см. [1, 2]) и учитывая свойства с. в. f_k, для произвольных $m \in \mathbb{N}$ и $a_k \in \mathbb{R}$ получаем

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)\right)^{2m} dt$$

$$= \sum_{k_1+\dots+k_n=m,k_i\ge 0} \frac{(2m)!}{(2k_1)!\ldots(2k_n)!} a_1^{2k_1}\ldots a_n^{2k_n} \int_0^1 f_{k_1}(t)^{2k_1}\,dt \cdot \ldots \cdot \int_0^1 f_{k_n}(t)^{2k_n}\,dt$$

$$= \sum_{k_1+\dots+k_n=m,k_i\ge 0} \frac{(2m)!}{(2k_1)!\ldots(2k_n)!} a_1^{2k_1}\ldots a_n^{2k_n} \int_0^1 f(t)^{2k_1}\,dt \cdot \ldots \cdot \int_0^1 f(t)^{2k_n}\,dt$$

$$\le \|f\|_{2m}^{2m} \cdot \frac{(2m)!}{2^m m!} \sum_{k_1+\dots+k_n=m,k_i\ge 0} \frac{m!}{k_1!\ldots k_n!} a_1^{2k_1}\ldots a_n^{2k_n} = \|f\|_{2m}^{2m} \cdot B_{2m} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^m,$$

где B_{2m} определяется равенством (6). Так как по формуле Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{R_n}, \quad \text{где } \frac{1}{12n+1} < R_n < \frac{1}{12n},$$

то

$$B_{2m} \le \sqrt{2} \cdot 2^m e^{-m} m^m.$$

В итоге

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)\right)^{2m} dt \le \chi(m)^m \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^m, \tag{11}$$

где $\chi(t) = t\|f\|_{2t}^2$ $(t \ge 1)$. Ясно, что χ — непрерывная возрастающая функция; можно предположить, что $\chi(1) = \|f\|_2^2 = 1$.

Для фиксированных $n \in \mathbb{N}$, $u > 0$ и $a_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ положим

$$m = \left[\chi^{-1}\left(\frac{u^2}{e\sum_{k=1}^n a_k^2}\right)\right],$$

где χ^{-1} — функция, обратная к χ. Применяя (11), получим

$$m\left\{t \in [0,1] : \left|\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)\right| > u\right\} \le u^{-2m} \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)\right|^{2m} dt$$

$$\le u^{-2m}\chi(m)^m \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^m \le e^{-m} \le \mathrm{Exp}\left(-\chi^{-1}\left(\frac{u^2}{e\sum_{k=1}^n a_k^2}\right) + 1\right).$$

Следовательно, для п. в. $s \in I$

$$m\left\{t \in I : \left|\sum_{i=1}^{n} x_i(s) f_i(t)\right| > \tau\right\} \le \operatorname{Exp}\left(-\chi^{-1}\left(\frac{u^2}{ey(s)^2}\right) + 1\right),$$

где $y := \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \in X$. Так как

$$\exp\left(-\chi^{-1}\left(\frac{u^2}{ey(s)^2}\right) + 1\right) \le m\{t \in I : \sqrt{e}y(s)\sqrt{\chi(\ln e/t)} > \tau\} \quad (0 < s \le 1),$$

то, интегрируя по промежутку I, получаем

$$m\left\{(s,t) \in I \times I : \left|\sum_{i=1}^{n} x_i(s) f_i(t)\right| > \tau\right\} \le m\{(s,t) \in I \times I : \sqrt{e}y(s)\sqrt{\chi(\ln e/t)} > \tau\}.$$

Таким образом, если $\xi(t) := \sqrt{\chi(\ln e/t)}$, то

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i(s) f_i(t)\right\|_{X(I\times I)} \le \sqrt{e}\|T_\xi y\|_{X(I\times I)}. \tag{12}$$

Заметим, что $\xi \in L_p[0,1]$ для каждого $p < \infty$ тогда и только тогда, когда $\|f\|_{2\ln e/t} \in L_p[0,1]$ для каждого $p < \infty$. Поэтому неравенство (12), а также те же аргументы, что и в доказательстве теоремы 1, показывают справедливость следующего ее обобщения.

Теорема 5. *Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково и симметрично распределенных с. в. на $[0,1]$ такая, что $f := f_1^* \in L_p[0,1]$ для каждого $p < \infty$ и $f := f_1^* \ne 0$. Кроме того, предположим, что*

$$\eta(t) := \|f\|_{2\ln e/t} \in L_p[0,1] \quad \text{для каждого } p < \infty. \tag{13}$$

Тогда для произвольного симметричного пространства X на I следующие условия эквивалентны:

1) $\alpha_X > 0$;

2) *существует такая константа $A > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и всех $x_1, \dots, x_n \in X$ выполнено*

$$A^{-1}\left\|\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}\right\|_X \le \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k(s) f_k(t)\right\|_{X(I\times I)} \le A\left\|\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}\right\|_X.$$

Учитывая [5, лемма 1], получаем

Следствие 2. *Предположим, что последовательность с. в. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 5, а также $\lim\limits_{t\to 0+} f^*(t) = \infty$. Тогда для произвольного симметричного пространства X на I следующие условия эквивалентны:*

1) $\alpha_X > 0$;

2) *существует такая константа $B > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и всех $x_1, \dots, x_n \in X$*

$$B^{-1}\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k(s) r_k(t)\right\|_{X(I\times I)} \le \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k(s) f_k(t)\right\|_{X(I\times I)} \le B\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k(s) r_k(t)\right\|_{X(I\times I)}.$$

Предполагая, что выполняется условие, чуть более сильное, чем (13), получаем следующий результат для симметричных пространств, «близких» к L_∞.

Теорема 6. *Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково и симметрично распределенных с. в. на $[0,1]$ такая, что $f := f_1^* \in L_p[0,1]$ для каждого $p < \infty$. Кроме того, предположим, что для некоторого $\gamma > 0$*

$$\|f\|_p \le Cp^{\gamma} \quad (1 \le p < \infty). \tag{14}$$

Тогда если X — симметричное пространство, $\beta_X < 1$, то существует такая константа $A > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и всех $x_1, \dots, x_n \in X$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k(s) f_k(t) \right\|_{X(\ln^{-1/2-\gamma})(I\times I)} \le A \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X .$$

Как и в случае теоремы 2, доказательство основано на применении леммы 4 (см. также соотношение (12)), поэтому мы его не приводим.

В заключение рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Будем говорить, что положительная убывающая функция h, определенная на $[0,1]$, *удовлетворяет* Δ^2*-условию* ($h \in \Delta^2$), если существует константа $K > 0$, для которой

$$h(t^2) \le Kh(t) \quad (0 < t \le 1).$$

Если $f \le h$, где $h \in \Delta^2$, то f удовлетворяет условию (14) для $\gamma = \log_2 K$. Действительно, ввиду [15, лемма 2]

$$\|f\|_p \le \|h\|_p \le Ch(2^{-p}) \le C_1 K^{\log_2 p} = C_1 p^{\log_2 K} \quad (p \ge 1).$$

В частности, $f(t) = \ln^q(e/t) \in \Delta^2$ для каждого $q > 0$.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f_\theta(t) = e^{\ln^\theta(1/t)}$ $(0 < t \le 1)$. Нетрудно проверить, что $f_\theta \in L_p[0,1]$ для каждого $\theta \in (0,1)$, если $p < \infty$, но $f_\theta \notin \Delta^2$. С помощью асимптотического метода Лапласа можно показать, что $\|f_\theta\|_p \asymp e^{\gamma_\theta p^{\frac{\theta}{1-\theta}}}$ [15, пример 1]. Поэтому функция f_θ удовлетворяет условию (13) тогда и только тогда, когда $\theta \in (0,1/2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khintchine A.* Über dyadische Bruche // Math. Z. 1923. Bd 18. S. 109–116.
2. *Пешкир Г., Ширяев А. Н.* Неравенства Хинчина и мартингальное расширение сферы их действия // Успехи мат. наук. 1995. Т. 50, № 5. С. 3–62.
3. *Rodin V. A., Semenov E. M.* Rademacher series in symmetric spaces // Anal. Math. 1975. V. 1. P. 207–222.
4. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces 2, Function spaces. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1979.
5. *Асташкин С. В., Браверман М. Ш.* О подпространстве симметричного пространства, порожденном системой Радемахера с векторными коэффициентами // Операторные уравнения в функциональных пространствах. Воронеж: Воронежский гос. университет, 1986. С. 3–10.
6. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
7. *Lorentz G. G.* Relations between function spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12. P. 127–132.
8. *Рутицкий Я. Б.* О некоторых классах измеримых функций // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 4. С. 205–208.
9. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
10. *Raynaud Y.* Complemented Hilbertian subspaces in rearrangement invariant function spaces // Illinois J. Math. 1995. V. 39, N 2. P. 212–250.

11. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985.
12. *Montgomery-Smith S. J.* The Hardy operator and Boyd indices // Lecture Notes Pure Appl. Math. 1995. V. 175. P. 359–364.
13. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1976.
14. *Асташкин С. В.* Функции Радемахера в симметричных пространствах // Современная математика. Фундаментальные направления. М.: Российский ун-т дружбы народов, 2009. Т. 32. С. 3–161.
15. *Асташкин С. В., Лыков К. В.* Экстраполяционное описание пространств Лоренца и Марцинкевича, «близких» к L_∞ // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 5. С. 974–992.

Статья поступила 11 июня 2009 г.

Асташкин Сергей Владимирович
Самарский гос. университет,
ул. Акад. Павлова, 1, Самара 443011
astashkn@ssu.samara.ru