Сибирский математический журнал
Июль—август, 2010. Том 51, № 4

УДК 519.2

ТОЧНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ МОМЕНТОВ ЛЕСТНИЧНЫХ ВЫСОТ

С. В. Нагаев

Аннотация. При помощи полученной недавно формулы для преобразования Лапласа сужения распределения на положительную полуось выводятся формулы для моментов верхней лестничной высоты для каждого из трех случаев: нулевого, положительного и отрицательного математического ожидания величины скачка в случайном блуждании. Результаты формулируются в терминах моментов и интегральных функционалов от характеристической функции величины скачка. Несмотря на сложность вывода, окончательные формулы для величин, которые участвуют в формулировках теорем, довольно просты.

Ключевые слова: лестничная высота, момент, преобразование Лапласа, ряд Спицера, тождество Винера — Хопфа, формула Бруно.

1. Введение. Пусть $X, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$. Положим

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad f(t) = \mathbf{E}e^{itX}, \quad F_n(x) = \mathbf{P}(S_n < x).$$

Рассмотрим случайные величины $N^+ = \min\{n : S_n > 0\}$, $N^- = \min\{n : S_n \le 0\}$. Если $S_n \ge 0$ ($S_n \le 0$) для всех n, то условимся считать $N^\pm = \infty$. На событии $\{N^\pm < \infty\}$ определены соответственно верхняя $Z_+ := S_{N^+}$ и нижняя $Z_- := S_{N^-}$ лестничные высоты.

Положим $F_\pm(x) = \mathbf{P}_{N^\pm}(Z_\pm < x)$, где $\mathbf{P}_{N^\pm}$ — ограничение исходной вероятностной меры $\mathbf{P}$ на $\{N^\pm < \infty\}$. Если $\mathbf{P}(N^\pm < \infty) < 1$, то функция распределения $F_\pm(x)$ является несобственной (дефектной).

Определим математическое ожидание случайной величины $g(Z_\pm)$, где $g(\cdot)$ — борелевская функция, равенствами

$$\mathbf{E}g(Z_+) := \int_{0+}^{\infty} g(x)\,dF_+(x), \quad \mathbf{E}g(Z_-) := \int_{-\infty}^{0+} g(x)\,dF_-(x).$$

Положим $f^\pm(t) = \mathbf{E}e^{itZ_\pm}$, $X_+ = \max[0, X]$, $X_- = \min[0, X]$.

Как известно, имеет место факторизационное тождество Винера — Хопфа (см., например, [1, с. 677])

$$1 - zf(t) = B^+(t; z)B^-(t, z), \quad |z| < 1, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–0048–а).

где $B^{+}(t;z)=\exp\Big\{-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\int\limits_{0+}^{\infty}e^{itx}\,dF_n(x)\Big\}$, $B^{-}(t;z)=\exp\Big\{-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\int\limits_{\infty}^{0+}e^{itx}\,dF_n(x)\Big\}$.
С другой стороны, $B^{\pm}(t;z) = 1 - \mathbf{E}z^{N^{\pm}}\exp\{itZ_{\pm}\}$. Отсюда следует, что существует

$$\lim_{z\to 1} B^{\pm}(t;z) = B^{\pm}(t) = 1 - \mathbf{E}\exp\{itZ_{\pm}\}. \tag{2}$$

Таким образом, формула (1) распространяется на z, по модулю равные 1, причем в силу (2) она может быть записана в виде

$$1 - f(t) = [1 - f^{+}(t)][1 - f^{-}(t)]. \tag{3}$$

Обозначим

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathbf{P}(S_n \le 0), \quad B = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathbf{P}(S_n > 0).$$

Если $A < \infty$, то вследствие (3) $1 - F_{-}(\infty) = e^{-A} > 0$, т. е. функция распределения F_{-} является дефектной. Соответственно $F_{+}(x)$ дефектна при $B < \infty$. Дифференцируя по t обе части (3) и полагая затем $t = 0$, получаем тождества

$$\mathbf{E}X^n = e^{-A}\mathbf{E}Z_{+}^{n} + e^{-B}\mathbf{E}Z_{-}^{n} - \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j \mathbf{E}Z_{+}^{j}\mathbf{E}Z_{-}^{n-j}. \tag{4}$$

Эти формулы для $n = \overline{1,6}$ выписываются в [2]. Если $A = B = \infty$, то $\mathbf{E}X^n = -\sum\limits_{j=1}^{n-1} C_n^j \mathbf{E}Z_{+}^{j}\mathbf{E}Z_{-}^{n-j}$. В частном случае $\mathbf{E}X = 0$ и $n = 2, 4$, последняя формула приводится в [3]. Если случайная величина X симметрично распределена, то $\mathbf{E}Z_{+}^{k} = \mathbf{E}Z_{-}^{k}$ при четных k и $\mathbf{E}Z_{+}^{k} = -\mathbf{E}Z_{-}^{k}$ при нечетных. Кроме того, в этом случае $A = B = \infty$. В результате (4) приобретает вид

$$\mathbf{E}X^{2k} = \sum_{j=1}^{2k-1}(-1)^{j-1}C_{2k}^{j}\mathbf{E}Z_{+}^{j}\mathbf{E}Z_{+}^{2k-j}.$$

Если $\mathbf{E}X < 0$, то $\mathbf{E}X_{+}^{k+1} < \infty \Rightarrow \mathbf{E}Z_{+}^{k} < \infty$ (см, например, [2]). Аналогично если $\mathbf{E}X > 0$, то $|\mathbf{E}X_{-}^{k+1}| < \infty \Rightarrow \mathbf{E}Z_{-}^{k} < \infty$. Если $\mathbf{E}X > 0$, то $B = \infty$. Тогда

$$\mathbf{E}X^n = e^{-A}\mathbf{E}Z_{+}^{n} - \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j \mathbf{E}Z_{+}^{j}\mathbf{E}Z_{-}^{n-j}. \tag{5}$$

Допустим, что $\mathbf{E}|X|^n < \infty$. Тогда соотношения (5) позволяют последовательно выражать моменты $\mathbf{E}Z_{+}^{k}$, $k = 2, 3, \dots, n$, через моменты $\mathbf{E}Z_{-}^{j}$, $j = 1, 2, \dots, k-1$. Следовательно, $\mathbf{E}|X|^k < \infty \Rightarrow \mathbf{E}Z_{+}^{k} < \infty$ при $\mathbf{E}X > 0$. Если $\mathbf{E}X = 0$, то, как показано в [4], $|\mathbf{E}X_{-}^{k+1}| < \infty \Rightarrow \mathbf{E}Z_{+}^{k} < \infty$.

Что касается точных выражений для моментов лестничных высот, то эта задача значительно сложнее.

Спицер [5] доказал, что в случае $\mathbf{E}X = 0$

$$\mathbf{E}Z_{+} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\mathbf{P}(S_n \le 0) - \frac{1}{2}\right]\right\},$$

где $\sigma^2 = \mathbf{E}X^2$.

Моменты $\mathbf{E}S_{N+}^k$ для целых $k>1$ при условии $\mathbf{E}X=0$ вычислены в работе [6]. Однако полученные при этом выражения, а также метод доказательства, как отмечается в [3, 4], чрезвычайно сложны для больших значений k.

В работе А. В. Нагаева [7] описывается алгоритм последовательного получения точных выражений для моментов $\mathbf{E}Z_+^k$ для целых $k>1$ и $\mathbf{E}X\geq 0$. Получаемые при этом выражения кроме моментов $\mathbf{E}X^j$ содержат последовательно определяемые интегральные функционалы от $f(t)$, а также ряд Спицера

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\mathbf{P}(S_n\leq 0)-\frac{1}{2}\right) \tag{6}$$

в случае $\mathbf{E}X=0$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathbf{P}(S_n\leq 0) \tag{7}$$

при $\mathbf{E}X>0$.

Наконец, в недавней работе А. К. Алешкявичене [2] дается алгоритм последовательного вычисления моментов лестничных высот, основанный на формулах (4). С помощью этого алгоритма найдены выражения для первых четырех моментов. В эти выражения наряду с моментами $\mathbf{E}X^k$ входят ряды Спицера, а также величина

$$\lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{1-z}}\right).$$

Настоящая работа примыкает к цитированной выше статье А. В. Нагаева. Мы тоже используем интегральные функционалы от $f(t)$, однако последние находятся не рекуррентно, а в явном виде. Соответственно окончательные результаты также формулируются в явном виде. Добавим, что полученные нами формулы не содержат рядов (6) и (7).

Отправной точкой в наших рассуждениях является следующая формула, полученная в [8]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int\limits_{0+}^{\infty}e^{-hx}\,dF_n(x)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(F_n(0+)-F_n(0)\right)$$
$$=-\frac{h}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\ln|1-f(t)|}{h^2+t^2}\,dt-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{t\arg[1-f(t)]}{h^2+t^2}\,dt. \tag{8}$$

Интегралы $\int\limits_0^{\infty}$ в правой части (8) определяются как $\lim\limits_{T\to\infty}\int\limits_0^{T}$. Меру G с

$$G(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_k(A)}{k} \tag{9}$$

принято называть *гармонической функцией восстановления*. В терминах G формулу (8), очевидно, можно записать в виде

$$\int\limits_{0+}^{\infty}e^{-hx}dG(x)+\frac{1}{2}[G(0+)-G(0)]=-\frac{h}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\ln|1-f(t)|}{h^2+t^2}\,dt$$
$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{t\arg[1-f(t)]}{h^2+t^2}\,dt=\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int\limits_0^{\infty}\frac{f^n(t)}{h+it}\,dt\right). \tag{10}$$

2. Вспомогательные результаты. Положим $B_n^2 = n\sigma^2$.

Лемма 2.1. *Пусть* $\mathbf{E}X = 0$. *Тогда для любых* $y > 0$ *и* $c > t/2 > 0$

$$\int\limits_y^\infty x^t\,dF_n(x) < nc^t \int\limits_{y/c}^\infty x^t\,dF(x) + \frac{2e^c c^{c+1} B_n^{2c}}{(2c-t)y^{2c-t}}. \tag{11}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством: для любых $x > 0$, $y > 0$

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) \leq n\mathbf{P}(X > y) + e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{B_n^2}{xy}\right)^{\frac{x}{y}}$$

(см. формулу (3) в [9]). Полагая $y = x/c$, имеем

$$\mathbf{P}(S_n \geq x) \leq n\mathbf{P}(X \geq x/c) + e^c c^c \left(\frac{B_n^2}{x^2}\right)^c. \tag{12}$$

Умножим обе части этого неравенства на x^{t-1} и проинтегрируем от y до ∞. Заметим, что

$$\int\limits_y^\infty x^{t-1}\mathbf{P}(X \geq x/c)\,dx = c^t \int\limits_{y/c}^\infty x^{t-1}\mathbf{P}(X \geq x)\,dx.$$

Далее, при $c > t/2$

$$\int\limits_y^\infty x^{t-2c-1}\,dx = \frac{y^{t-2c}}{2c-t}.$$

В результате получаем, что

$$\int\limits_y^\infty x^{t-1}(1-F_n(x))\,dx \leq nc^t \int\limits_{y/c}^\infty x^{t-1}(1-F(x))\,dx + \frac{e^c c^c B_n^{2c}}{(2c-t)y^{2c-t}}.$$

Очевидно,

$$\int\limits_y^\infty x^t\,dF_n(x) = (1-F_n(y))y^t + t\int\limits_y^\infty x^{t-1}(1-F_n(x))\,dx.$$

Из двух последних оценок следует, что

$$\int\limits_y^\infty x^t\,dF_n(x) \leq (1-F_n(y))y^t + ntc^t \int\limits_{y/c}^\infty x^{t-1}(1-F(x))\,dx + \frac{te^c c^c B_n^{2c}}{(2c-t)y^{2c-t}}.$$

Еще раз используя (12), получаем, что

$$(1-F_n(y))y^t < n\left(1 - F\left(\frac{y}{c}\right)\right)y^t + e^c c^c \frac{B_n^{2c}}{y^{2c-t}}.$$

Подставляя эту оценку в правую часть предыдущего неравенства, убеждаемся в справедливости (11). □

Лемма 2.2. *Пусть* $\mathbf{E}X = 0$. *Тогда для любых* $c > t > 0$ *и* $a > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{an}^{\infty} x^t \, dF_n(x) < \frac{c^{t+1}}{a} \mathbf{E}X_+^{t+1} + C(c,t) \frac{\sigma^{2c}}{a^{2c-t}}, \tag{13}$$

где $C(c,t) = \frac{2e^c c^{c+1}(c-t+1)}{(2c-t)(c-t)}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{an/c}^{\infty} x^t \, dF(x) < \int_0^{\infty} dy \int_{ay/c}^{\infty} x^t \, dF(x) = c \int_0^{\infty} x^t \, dF(x) \int_0^{cx/a} dy = \frac{c}{a} \mathbf{E}X^{t+1}. \tag{14}$$

Далее, при $t < c$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n^{2c}}{n^{2c-t+1}} < \sigma^{2c} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{c-t+1}} + \sigma^{2c} = \left(\frac{1}{c-t} + 1 \right) \sigma^{2c}. \tag{15}$$

В силу (11)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{an}^{\infty} x^t \, dF_n(x) < c^t \sum_{n=1}^{\infty} \int_{an/c}^{\infty} x^t \, dF(x) + \frac{2e^c c^{c+1}}{2c-t} a^{t-2c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n^{2c}}{n^{2c-t+1}}. \tag{16}$$

Подставляя оценки (14) и (15) в правую часть (16), получаем желаемый результат. $\square$

Лемма 2.3. *Если* $a = \mathbf{E}X < 0$, *то для любого* $t > 0$

$$\mathbf{E}X_+^{t+1} < \infty \Longrightarrow \int_0^{\infty} x^t dG(x) < \infty.$$

Доказательство. Положим $S_n^* = S_n - na$. Тогда

$$\mathbf{E}\{S_n^t; S_n > 0\} = \mathbf{E}\{(S_n^* + na)^t; S_n^* > -na\} < \mathbf{E}\{(S_n^*)^t; S_n^* > -na\}.$$

Отсюда

$$\int_0^{\infty} x^t \, dG(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbf{E}\{S_n^t; S_n > 0\} < \infty,$$

поскольку в силу леммы 2.2 ряд $\sum n^{-1} \mathbf{E}\{(S_n^*)^t; S_n^* > -na\}$ сходится при $\mathbf{E}X_+^{t+1} < \infty$. $\square$

Лемма 2.4. *Для любого* $x > 0$

$$0 < \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt \simeq 1.852. \tag{17}$$

Доказательство. Очевидно, при $k \geq 0$

$$\int_0^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt = \left(\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{(2k+1)\pi} \right) \frac{\sin t}{t} \, dt.$$

Вычисления показывают, что $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt \simeq 1.852$. Легко видеть, что $\int\limits_{\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt < 0$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt < \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt. \tag{18}$$

Пусть $(2k+1)\pi < x < (2k+3)\pi$, $k \geq 0$. Тогда

$$\int\limits_{(2k+1)\pi}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt < 0. \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует, что при $x \geq \pi$

$$\int\limits_0^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt < \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt. \tag{20}$$

При $0 < x < 2\pi$ неравенство (20) очевидно. Итак, мы доказали правое неравенство (17).

Далее, пусть $2k\pi \leq x < 2(k+1)\pi$, $k \geq 1$. Тогда

$$\int\limits_0^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt = \left(\int\limits_0^{2k\pi} + \int\limits_{2k\pi}^{x} \right) \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Очевидно,

$$\int\limits_0^{2k\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt = \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{2(j-1)}^{2j\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Каждое слагаемое в этой сумме положительно. Кроме того, $\int\limits_{2k\pi}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt > 0$. В результате приходим к выводу, что при $x \geq 2\pi$

$$\int\limits_0^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt > 0. \tag{21}$$

При $0 < x < 2\pi$ неравенство (21) очевидно. Таким образом, мы доказали левое неравенство в (17). $\square$

Лемма 2.5. *Для любой случайной величины* X

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{T} \frac{\operatorname{Im} f(t)}{t}\,dt = \frac{1}{2}(\mathbf{P}(X > 0) - \mathbf{P}(X < 0)). \tag{22}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_0^{T} \frac{\operatorname{Im} f(t)}{t}\,dt = \int\limits_0^{T} \frac{dt}{t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(tx)\,dF(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dF(x) \int\limits_0^{T} \frac{\sin(tx)}{t}\,dt. \tag{23}$$

Интеграл

$$I(T,x) = \int\limits_0^T \frac{\sin(tx)}{t}\,dt = \int\limits_0^{Tx} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

равномерно ограничен по x. Кроме того,

$$\lim_{T\to\infty} I(T,x) = \begin{cases} \pi/2, & x > 0, \\ -\pi/2, & x < 0, \end{cases}$$

и $I(T,0) \equiv 0$. Переходя к пределу под знаком интеграла, имеем

$$\lim_{T\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} I(T,x)\,dF(x) = \frac{\pi}{2}(\mathbf{P}(X > 0) - \mathbf{P}(X < 0)).$$

Возвращаясь теперь к равенствам (23), получаем нужный результат. □

Лемма 2.6. *Для любой случайной величины* X

$$\left|\int\limits_{|t|<\delta} \frac{\operatorname{Im} f(t)}{t}\,dt\right| < 2(\delta^{1/2} + 2\mathbf{P}(|X| > \delta^{-1/2})).$$

Доказательство. Очевидно,

$$\int\limits_{|t|<\delta} \frac{\operatorname{Im} f(t)}{t}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dF(x) \int\limits_{|t|<\delta} \frac{\sin tx}{t}\,dt.$$

Используя лемму 2.4 и неравенство $|\sin x| < |x|$, имеем

$$\left|\int\limits_{|t|<\delta} \frac{\sin tx}{t}\,dt\right| < 2\max\left(\delta|x|; \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt\right).$$

Далее, $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt < 2$. Следовательно,

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} dF(x) \int\limits_{|t|<\delta} \frac{\sin tx}{t}\,dt\right| < \left|\int\limits_{|x|\le\delta^{-1/2}} dF(x) \int\limits_{|t|<\delta} \frac{\sin tx}{t}\,dt\right|$$
$$+ \left|\int\limits_{|x|>\delta^{1/2}} dF(x) \int\limits_{|t|<\delta} \frac{\sin tx}{t}\,dt\right| < 2(\delta^{1/2} + 2\mathbf{P}(|X| > \delta^{-1/2})).$$

Лемма 2.7. *Пусть* $\Omega(x)$ *— действительная функция ограниченной вариации,* $\omega(t)$ *— ее преобразование Фурье. Тогда для любого* $\delta > 0$

$$\lim_{h\downarrow 0} \int\limits_{|t|\le\delta} \frac{\omega(t)}{h+it}\,dt = \pi\omega(0) + \int\limits_{|t|\le\delta} \frac{\operatorname{Im}\omega(t)}{t}\,dt.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что интеграл $\int\limits_{|t|\le\delta} \frac{\operatorname{Im}\omega(t)}{t}\,dt$ определен в силу леммы 2.6. Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{|t|\le\delta} \frac{\omega(t)}{h+it}\,dt = h\int\limits_{|t|\le\delta} \frac{\omega(t)}{h^2+t^2}\,dt - i\int\limits_{|t|\le\delta} \frac{t\omega(t)}{h^2+t^2}\,dt. \tag{24}$$

Далее,

$$\lim_{h\downarrow 0} h \int\limits_{|t|\le\delta} \frac{\omega(t)}{h^2+t^2}\,dt = \pi\omega(0). \tag{25}$$

Поскольку $\int\limits_{|t|\le\delta} \frac{t\,\mathrm{Re}\,\omega(t)}{h^2+t^2}\,dt = 0$, то

$$\int\limits_{|t|\le\delta} \frac{t\omega(t)}{h^2+t^2}\,dt = i \int\limits_{|t|\le\delta} \frac{t\,\mathrm{Im}\,f(t)}{h^2+t^2}\,dt$$

$$= i \int\limits_{|t|\le\delta} \frac{t}{h^2+t^2}\,dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin tx\,d\Omega(x) = i \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\Omega(x) \int\limits_{|t|\le\delta} \frac{t\sin tx}{h^2+t^2}\,dt.$$

Ясно, что

$$\lim_{h\downarrow 0} \int\limits_{|t|\le\delta} \frac{t\sin tx}{h^2+t^2}\,dt = \int\limits_{|t|\le\delta} \frac{\sin tx}{t}\,dt.$$

Из двух последних соотношений следует, что

$$\lim_{h\downarrow 0} \int\limits_{|t|\le\delta} \frac{t\omega(t)}{h^2+t^2}\,dt = i \int\limits_{|t|\le\delta} \frac{\mathrm{Im}\,\omega(t)}{t}\,dt. \tag{26}$$

Комбинируя (24)–(26), получаем желаемый результат. □

Лемма 2.8. *Пусть комплекснозначная функция $r(t)$ действительного аргумента удовлетворяет условиям $\mathrm{Re}\,r(t) = \mathrm{Re}\,r(-t)$ и $r(t) = O(t)$ при $t \to 0$. Тогда для любого δ*

$$\lim_{h\downarrow 0} \int\limits_{|t|\le\delta} \frac{r(t)}{h+it}\,dt = \int\limits_{|t|\le\delta} \frac{\mathrm{Im}\,r(t)}{t}\,dt.$$

Доказательство. Очевидно,

$$\int\limits_{|t|\le\delta} \frac{r(t)}{h+it}\,dt = h \int\limits_{|t|\le\delta} \frac{r(t)}{h^2+t^2}\,dt - i \int\limits_{|t|\le\delta} \frac{tr(t)}{h^2+t^2}\,dt = I_1(h) + I_2(h). \tag{27}$$

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{h\downarrow 0} I_1(h) = 0. \tag{28}$$

Далее, в условиях леммы

$$\lim_{h\downarrow 0} \int\limits_{|t|\le\delta} \frac{tr(t)}{h^2+t^2}\,dt = \int\limits_{|t|\le\delta} \frac{r(t)}{t}\,dt = i \int\limits_{|t|\le\delta} \frac{\mathrm{Im}\,r(t)}{t}\,dt. \tag{29}$$

Из (27)–(29) следует утверждение леммы. □

3. Вывод точных выражений для моментов лестничных высот. Если распределение F сосредоточено на положительной полуоси, то стандартный способ вычисления моментов дается формулой

$$\mathbf{E}X^m = (-1)^m v^{(m)}(0), \tag{30}$$

где $v(h)$ является преобразованием Лапласа, т. е. $v(h) = \int\limits_{0+}^{\infty} e^{-hu}\,dF(u)$, $h > 0$, а $v^{(m)}(0)$ определяется как правая производная $v(h)$ в 0.

Соответственно если F сосредоточено на неположительной полуоси, то $\mathbf{E}X^m = v^{(m)}(0)$, где $v(h) = \int\limits_{0+}^{\infty} e^{hu}\,dF(u)$, $h > 0$.

Полагая в (2) $t = ih$, получаем

$$\mathbf{E}\exp\{-Z_+h\} = 1 - B^+(ih) = 1 - \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int\limits_{0+}^{\infty} e^{-hx}dF_n(x)\right\}. \qquad (31)$$

Из равенств (30) и (31) следует, что

$$\mathbf{E}Z_+^m = (-1)^{m-1}\frac{d^m}{dh^m}\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int\limits_{0+}^{\infty} e^{-hx}\,dF_n(x)\right\}\Bigg|_{h=0}. \qquad (32)$$

Используя обозначение (9) для гармонической функции восстановления, можем записать эту формулу в более компактном виде:

$$\mathbf{E}Z_+^m = (-1)^{m-1}\frac{d^m}{dh^m}\exp\left\{-\int\limits_{0+}^{\infty} e^{-hx}dG(x)\right\}\Bigg|_{h=0}. \qquad (33)$$

В дальнейшем

$$g(h) = \int\limits_{0+}^{\infty} e^{-hx}\,dG(x). \qquad (34)$$

Если предположить, что $g_m = \int\limits_{0}^{\infty} x^m\,dG(x) < \infty$, то, используя формулу Бруно для производной сложной функции (см., например, [10, с. 48]), получаем следующее выражение для m-го момента лестничной высоты Z_+:

$$\mathbf{E}Z_+^m = -e^{g(0)}\sum\frac{(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_m}m!}{k_1!\dots k_m!}\left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1}\dots\left(\frac{g_m}{m!}\right)^{k_m}, \qquad (35)$$

где суммирование производится по всем решениям в неотрицательных целых числах уравнения $k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = m$.

Однако чтобы решить эту задачу приемлемым для реальных вычислений способом, нужно найти формулу, связывающую g_k с исходным распределением (имеется в виду распределение F скачка в случайном блуждании).

Будем пользоваться обозначениями

$$a = \mathbf{E}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x), \quad \sigma^2 = \mathbf{E}(X-a)^2.$$

Рассмотрим отдельно три случая: $a < 0$, $a > 0$ и $a = 0$.

1. Случай $a < 0$.

Предположим, что $\mathbf{E}|X|^{m+1} < \infty$. Тогда в силу леммы 2.3 $g_m < \infty$. Пользуясь обозначением (34), можем записать формулу (8) в виде

$$g(h) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\le\delta}\frac{\ln(1-f(t))}{h+it}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln(1-f(t))}{h+it}\,dt - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\mathbf{P}(S_n = 0), \qquad (36)$$

где δ выбирается так, что $1 - f(t) \neq 0$ при $0 < |t| \leq \delta < 1$. Интегралы здесь понимаются в смысле главного значения.

Очевидно, $\ln(1 - f(t)) = \ln(it) + \ln \frac{1-f(t)}{it}$. Отсюда

$$I_1 := \int\limits_{|t|\leq\delta} \frac{\ln(1 - f(t))}{h + it}\, dt = \int\limits_{|t|\leq\delta} \frac{\ln(it)}{h + it}\, dt + \int\limits_{|t|\leq\delta} \frac{\ln\varphi(t)}{h + it}\, dt = I_{11} + I_{12}, \tag{37}$$

где $\varphi(t) = \frac{1-f(t)}{it}$. Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{Re} I_{11} = 2h \int\limits_0^\delta \frac{\ln t}{h^2 + t^2}\, dt + \pi \int\limits_0^\delta \frac{t}{h^2 + t^2}\, dt,$$

поскольку

$$\ln it = \begin{cases} \ln t + i\pi/2, & t > 0, \\ \ln|t| - i\pi/2, & t < 0. \end{cases} \tag{38}$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{\ln t}{h^2 + t^2}\, dt = \frac{\ln h}{h} \int\limits_0^\infty \frac{dt}{1 + t^2} + \frac{1}{h} \int\limits_0^\infty \frac{\ln t}{1 + t^2}\, dt = \frac{\pi}{2h} \ln h. \tag{39}$$

Мы использовали здесь равенство $\int\limits_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt = 0$ (см. [11, с. 546, п. 4.231, формула 8]).

Вследствие (39)

$$2h \int\limits_0^\delta \frac{\ln t}{h^2 + t^2}\, dt = 2h \int\limits_0^\infty \frac{\ln t}{h^2 + t^2}\, dt - 2h \int\limits_\delta^\infty \frac{\ln t}{h^2 + t^2}\, dt = \pi \ln h - 2h \int\limits_\delta^\infty \frac{\ln t}{h^2 + t^2}\, dt. \tag{40}$$

С другой стороны,

$$\int\limits_0^\delta \frac{t}{h^2 + t^2}\, dt = \frac{1}{2} \ln(\delta^2 + h^2) - \ln h.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re} I_{11} = \frac{\pi}{2} \ln(\delta^2 + h^2) - 2h \int\limits_\delta^\infty \frac{\ln t}{h^2 + t^2}\, dt. \tag{41}$$

Займемся теперь интегралом I_{12}. Очевидно,

$$\int\limits_{|t|\leq\delta} \frac{\ln\varphi(t)}{h + it}\, dt = \ln(-a) \int\limits_{|t|\leq\delta} \frac{dt}{h + it} + \int\limits_{|t|\leq\delta} \frac{(\psi(t) - \psi(0))\, dt}{h + it},$$

где $\psi(t) = \ln\varphi(t)$. Заметим, что при $t \to 0$ будет $\ln\varphi(t) = \ln(-a) + O(t)$, поскольку $\varphi(t) = -a + O(t)$. Следовательно, функция $(\psi(t) - \psi(0))t^{-1}$ интегрируема в любом конечном промежутке. Так как

$$\int\limits_{|t|\leq\delta} \frac{dt}{h + it} = 2h \int\limits_0^\delta \frac{dt}{h^2 + t^2} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\delta}{h},$$

отсюда вытекает, что существует конечный предел

$$\lim_{h\downarrow 0} I_{12} = \pi \ln(-a) + \int\limits_{|t|\le\delta} \frac{\psi(t)}{it}\,dt. \tag{42}$$

Из (36)–(41) следует, что

$$g(h) = -\frac{1}{4}\ln(h^2+\delta^2) + \frac{h}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\ln t}{h^2+t^2}\,dt - \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\int\limits_{|t|\le\delta}\frac{\psi(t)}{h+it}\,dt$$
$$- \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln(1-f(t))}{h+it}\,dt. \tag{43}$$

Переходя к пределу при $h\downarrow 0$ и учитывая (42), имеем

$$g(0) = -\frac{1}{2}\ln\delta - \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\int\limits_{|t|\le\delta}\frac{\psi(t)}{it}\,dt - \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln(1-f(t))}{it}\,dt$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathbf{P}(S_n=0) - \frac{1}{2}\ln(-a). \tag{44}$$

Перейдем теперь к вычислению производных $g^{(k)}(0)$. Очевидно, $\ln(\delta^2 + h^2) = \ln\delta^2 + \ln\bigl(1+h^2/\delta^2\bigr)$. Нетрудно видеть, что

$$\ln\left(1+\frac{h^2}{\delta^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{h}{\delta}\right)^{2k}k^{-1}.$$

Отсюда

$$\frac{d^{2k}}{dh^{2k}}\ln(\delta^2+h^2)|_{h=0} = (-1)^{k-1}\frac{2(2k-1)!}{\delta^{2k}}. \tag{45}$$

Производные нечетного порядка обращаются в нуль при $h=0$, т. е.

$$\frac{d^{2k+1}}{dh^{2k+1}}\ln(\delta^2+h^2)\Big|_{h=0} = 0. \tag{46}$$

Далее,

$$\frac{d^k}{dh^k}\int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln(1-f(t))}{h+it}\,dt\Big|_{h=0} = (-1)^k k!\int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln(1-f(t))}{(it)^{k+1}}\,dt. \tag{47}$$

Нетрудно показать, что

$$\left|\int\limits_{|t|>\delta}\frac{|\ln(1-f(t)|}{t^{k+1}}\,dt\right| < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int\limits_{|t|>\delta}\frac{|f(t)|^n}{t^{k+1}}\,dt.$$

Используя лемму 3 из [12], получаем оценку

$$\int\limits_{|t|>\delta}\frac{|f(t)|^n}{t^{k+1}}\,dt < c(F)n^{-1/2}.$$

Из двух последних соотношений следует, что

$$\Bigg| \int\limits_{|t|>\delta} \frac{|\ln(1-f(t)|}{t^{k+1}}\,dt \Bigg| < \infty. \tag{48}$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_{|t|>\delta} \frac{\ln(1-f(t))}{t^{k+1}}\,dt$ конечен.

Поскольку

$$\frac{h}{h^2+t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h+it} + \frac{1}{h-it}\right),$$

то

$$\frac{d^k}{dh^k}\frac{h}{h^2+t^2} = \frac{(-1)^k}{2}k!\left(\frac{1}{(h+it)^{k+1}} + \frac{1}{(h-it)^{k+1}}\right).$$

Отсюда

$$\frac{d^k}{dh^k}\frac{h}{h^2+t^2}\Big|_{h=0} = \begin{cases} (-1)^{(k-1)/2}k!t^{-k-1}, & \text{если } k \text{ нечетное,} \\ 0, & \text{если } k \text{ четное.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{d^k}{dh^k}h\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\ln t}{h^2+t^2}\,dt\Big|_{h=0} = \begin{cases} (-1)^{(k-1)/2}k!\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\ln t}{t^{k+1}}\,dt & \text{при } k \text{ нечетном,} \\ 0 & \text{при } k \text{ четном.} \end{cases} \tag{49}$$

Осталось вычислить производную k-го порядка от интеграла $\int\limits_{|t|\le\delta}\frac{\psi(t)}{h+it}\,dt$. Для этого нам понадобится

Лемма 3.1. *Если* $\mathbf{E}|X|^{k+1}<\infty$, *то*

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{d^k}{dh^k}\int\limits_{|t|\le\delta}\frac{\psi(t)}{h+it}\,dt = (-1)^k\Bigg(\int\limits_{|t|\le\delta}\frac{\operatorname{Im} i^{-k}\psi^{(k)}(t)}{t}\,dt + \pi i^{-k}\psi^{(k)}(0)$$
$$-\sum_{j=0}^{k-1}(k-j-1)!i^{-k-1}t^{j-k}\psi^{(j)}(t)\Big|_{-\delta}^{\delta}\Bigg), \tag{50}$$

где $\psi(t)=\ln\varphi(t)$.

Доказательство. Производя дифференцирование под знаком интеграла, имеем

$$\frac{d^k}{dh^k}\int\limits_{|t|\le\delta}\frac{\psi(t)}{h+it}\,dt = (-1)^k k!\int\limits_{|t|\le\delta}\frac{\psi(t)}{(h+it)^{k+1}}\,dt.$$

Будем теперь последовательно интегрировать по частям интеграл в правой части равенства, используя на каждом шаге формулу

$$\int\limits_{|t|\le\delta}\frac{\psi^{(j)}(t)}{(h+it)^{k-j+1}}\,dt = -\frac{\psi^{(j)}(t)}{i(k-j)(h+it)^{k-j}}\Big|_{-\delta}^{\delta} + \frac{1}{i(k-j)}\int\limits_{|t|\le\delta}\frac{\psi^{(j+1)}(t)}{(h+it)^{k-j}}\,dt.$$

В результате приходим к равенству

$$\frac{d^k}{dh^k}\int\limits_{|t|\le\delta}\frac{\psi(t)}{h+it}\,dt = (-1)^k\left(\sum_{j=0}^{k-1}i^{-j}(k-j-1)!\frac{\psi^{(j)}(t)}{(h+it)^{k-j}}\Big|_{-\delta}^{\delta} + i^{-k}\int\limits_{|t|\le\delta}\frac{\psi^{(k)}(t)}{h+it}\,dt\right). \tag{51}$$

Теперь нам нужно перейти к пределу при $h \downarrow 0$ в обеих частях этого равенства.

По формуле Бруно

$$\frac{d^k}{dt^k}\psi(t) = \frac{d^k}{dt^k}\ln\varphi(t) = \sum \frac{k!w_l}{m_1!\dots m_k!}\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{\varphi^{(j)}(t)}{j!}\right)^{m_j}, \tag{52}$$

где $w_l = \frac{d^l}{dx^l}\ln x\big|_{x=\varphi(t)} = (-1)^{l-1}\varphi^{-l}(t)$, $l = \sum\limits_{j=1}^{k} m_j$, и суммирование производится по всем решениям в неотрицательных целых числах уравнения $m_1 + 2m_2 + \dots + km_k = k$.

Пусть $Q(x)$ — действительная функция ограниченной вариации такая, что $\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dQ(x)$. Тогда $\varphi^{(j)}(t) = i^j\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}x^j\,dQ(x)$, т. е. $i^{-j}\varphi^{(j)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}x^j\,dQ(x)$. Это означает, что $i^{-k}\prod\limits_{j=1}^{k}(\varphi^{(j)}(t))^{m_j}$ является преобразованием Фурье — Стильтеса действительной функции ограниченной вариации.

Пусть $A(t)$ — произвольное произведение, входящее в сумму (52). Очевидно,

$$i^{-k}\frac{A(t)}{\varphi^l(t)} = i^{-k}\frac{A(t)}{\varphi^l(0)} + i^{-k}A(t)\frac{\varphi^l(0)-\varphi^l(t)}{\varphi^l(0)\varphi^l(t)}. \tag{53}$$

Первое слагаемое в правой части этого тождества удовлетворяет условиям леммы 2.7, а второе — условиям леммы 2.8. Поэтому

$$\lim_{h\downarrow 0} i^{-k}\int\limits_{|t|\le\delta}\frac{A(t)}{\varphi^l(t)(h+it)}\,dt$$
$$= \pi i^{-k}\frac{A(0)}{\varphi^l(0)} + \varphi^{-l}(0)\int\limits_{|t|\le\delta}\frac{\operatorname{Im}(i^{-k}A(t))}{t}\,dt + \varphi^{-l}(0)\int\limits_{|t|\le\delta}\operatorname{Im}\left(i^{-k}A(t)\frac{\varphi^l(0)-\varphi^l(t)}{\varphi^l(t)}\right)dt.$$

В результате приходим к выводу, что

$$\lim_{h\downarrow 0}\int\limits_{|t|\le\delta}\frac{\psi^{(k)}(t)}{h+it}\,dt = \pi i^{-k}\psi^{(k)}(0) + \int\limits_{|t|\le\delta}\frac{\operatorname{Im}(i^{-k}\psi^{(k)}(t))}{t}\,dt. \tag{54}$$

Из (51) и (54) следует утверждение леммы. □

Мы можем теперь продолжить вычисление производной $g^{(k)}(0)$. Для этого воспользуемся формулами (43), (45)–(49) и леммой 3.1. В результате получаем формулы

$$g^{(k)}(0) = (-1)^{(k-1)/2}\frac{k!}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\ln t}{t^{k+1}}\,dt + (-1)^{k+1}\frac{k!}{2\pi}\ \operatorname{Re}\int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln(1-f(t))}{(it)^{k+1}}\,dt$$
$$+ (-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\le\delta}(t)^{-1}\operatorname{Im}\left(i^{-k}\frac{d^k}{dt^k}\ln\varphi(t)\right)dt + \frac{1}{2}\ \operatorname{Re} i^{-k}\frac{d^k}{dt^k}\ln\varphi(t)\Big|_{t=0}\right)$$
$$- \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi}\sum_{j=0}^{k-1}(k-j-1)!\operatorname{Re}\left(i^{-k-1}t^{j-k}\frac{d^j}{dt^j}\ln\varphi(t)\right)\Big|_{-\delta}^{\delta}, \tag{55}$$

если k нечетные, и

$$g^{(k)}(0) = (-1)^{k/2}(k-1)!\frac{\delta^{-k}}{2} + (-1)^{k+1}\frac{k!}{2\pi}\operatorname{Re}\int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln(1-f(t))}{(it)^{k+1}}\,dt$$
$$+ (-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\le\delta} t^{-1}\operatorname{Im}\left(i^{-k}\frac{d^k}{dt^k}\ln\varphi(t)\right)dt + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{d^k}{dt^k}\ln\varphi(t)\Big|_{t=0}\right)$$
$$- \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi}\sum_{j=0}^{k-1}(k-j-1)!\ \operatorname{Re}\left(i^{-k-1}t^{j-k}\frac{d^j}{dt^j}\ln\varphi(t)\right)\Big|_{-\delta}^{\delta}, \quad (56)$$

если k четные.

С помощью формул (55) и (56) без особого труда выводится

Теорема 3.1. *Пусть $a < 0$, $\sigma^2 > 0$ и $\mathbf{E}|X|^{m+1} < \infty$, $m \ge 1$. Тогда*

$$\mathbf{E}Z_+^m = -m!e^{-g(0)}\sum\frac{(-1)^{k_1+k_2+\dots+k_m}}{k_1!\dots k_m!}\left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1}\dots\left(\frac{g_m}{m!}\right)^{k_m}, \quad (57)$$

где суммирование производится по всем решениям в неотрицательных целых числах уравнения $k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = m$, а $g_k = (-1)^k g^{(k)}(0)$, $k = \overline{0,m}$, определяется формулами (44), (55), (56).

Доказательство. Вследствие (30)

$$g_k = \int\limits_0^\infty x^k\,dG(x) = (-1)^k g^{(k)}(0), \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Остается подставить вместо $g^{(j)}(0)$ их значения (44), (55) и (56), а затем воспользоваться формулой (35). Впрочем, можно сначала переписать формулы (35) в терминах $g^{(k)}(0)$. □

2. Случай $a > 0$. Рассуждения, которые мы будем использовать, остаются в принципе теми же, что и в случае $a < 0$. Но есть одно важное отличие. На этот раз $\varphi(t)$ определяется равенством

$$\varphi(t) = \frac{f(t)-1}{it}. \quad (58)$$

В результате вместо (37) имеем равенство

$$\int\limits_{|t|\le\delta}\frac{\ln(1-f(t))}{h+it}\,dt = \int\limits_{|t|\le\delta}\frac{\ln(-it)}{h+it}\,dt + \int\limits_{|t|\le\delta}\frac{\ln\varphi(t)}{h+it}\,dt = I_{11} + I_{12}.$$

В данном случае $\operatorname{Re} I_{11} = 2h\int\limits_0^\delta \frac{\ln t}{h^2+t^2}\,dt - \pi\int\limits_0^\delta \frac{t}{h^2+t^2}\,dt$. Это различие оказывается весьма существенным. Изменение знака у второго слагаемого приводит к кардинально отличающейся от (41) формуле

$$\operatorname{Re} I_{11} = 2\pi\ln h - \frac{\pi}{2}\ln(\delta^2+h^2) - 2h\int\limits_\delta^\infty\frac{\ln t}{h^2+t^2}\,dt.$$

В итоге получаем представление

$$g(h) = -\ln h - \frac{1}{4}\ln(\delta^2 + h^2) + \frac{h}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{\ln t}{h^2 + t^2}\,dt - \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\int\limits_{|t|\le\delta} \frac{\ln\varphi(t)}{h + it}\,dt$$

$$- \frac{1}{2\pi}\ \mathrm{Re}\int\limits_{|t|>\delta} \frac{\ln(1 - f(t))}{h + it}\,dt - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\mathbf{P}(S_n = 0). \quad (59)$$

Появление $\ln h$ нельзя считать неожиданным, поскольку, как известно,

$$\frac{\int_0^x dG(x)}{\ln x} \to 1 \quad \text{при } x \to \infty$$

(см. [13]). Отсюда при $h \to 0$

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-hx}\,dG(x) = h\int\limits_0^{\infty} e^{-hx}\int\limits_0^{x} dG(y)\,dx \sim h\int\limits_0^{\infty} e^{-hx}\ln(1 + x)\,dx \sim \ln\frac{1}{h}$$

(знак $\sim$ означает, что отношение соответствующих величин стремится к единице при $x \to \infty$).

В данном случае мы не можем использовать формулу (35) для вычисления $\mathbf{E}Z_+^k$, поскольку $g(h)$ и все ее производные обращаются в нуле в бесконечность. Эти бесконечности образуют линейную комбинацию, которая, будучи умножена на $e^{-g(0)}$, оказывается в результате конечной. Беда в том, что найти точное значение для $\mathbf{E}Z_+^m$ на этом пути очень сложно (см. в этой связи работу [6]).

Характер возникающих трудностей отчетливо виден на следующем примере.

Рассмотрим очевидное тождество

$$h = e^{\ln h}. \quad (60)$$

Для начала продифференцируем правую часть дважды. В результате получим

$$\frac{d^2}{dh^2}e^{\ln h} = \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h^2}\right)e^{\ln h} = 0.$$

Но гораздо проще продифференцировать левую часть тождества (60).

Если мы продифференцируем $e^{\ln h}$ n раз, пользуясь какой-нибудь формулой для производной сложной функции, скажем, формулой Бруно, то получим представление

$$\frac{d^n}{dh^n}e^{\ln h} = P_n\left(\frac{1}{h}\right)e^{\ln h},$$

где P_n — многочлен степени n, причем $P_n(0) = 0$. Поскольку $\frac{d^n}{dh^n}h = 0$, необходимо $P_n(x) \equiv 0$.

С другой стороны, коэффициенты многочлена $P_n(x)$ выражаются сложными комбинаторными формулами, так что установить, что они обращаются в 0, непосредственно, минуя представление (60), довольно трудно.

Рассмотренный пример наводит на мысль представить $e^{-g(h)}$ в виде $he^{-\tilde g(h)}$, где $\tilde g(h) = g(h) + \ln h$. Тогда

$$\frac{d^k}{dh^k}e^{-g(h)} = k\frac{d^{k-1}}{dh^{k-1}}e^{-\tilde g(h)} + h\frac{d^k}{dh^k}e^{-\tilde g(h)}.$$

Отсюда

$$\frac{d^k}{dh^k} e^{-g(h)}\Big|_{h=0} = k\frac{d^{k-1}}{dh^{k-1}} e^{-\tilde{g}(h)}\Big|_{h=0}. \qquad (61)$$

Полученная формула показывает, что для существования производной $\frac{d^k}{dh^k} e^{-g(h)}$ в нуле достаточно $(k-1)$-кратной дифференцируемости $e^{-\tilde{g}(h)}$.

В силу (59)

$$\tilde{g}(h) = -\frac{1}{4}\ln(\delta^2+h^2) - \frac{h}{\pi}\int_\delta^\infty \frac{\ln t}{h^2+t^2}\,dt$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{|t|\le\delta} \frac{\ln\varphi(t)}{h+it}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\delta}\frac{\ln(1-f(t))}{h+it}\,dt - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty n^{-1}\mathbf{P}(S_n=0). \qquad (62)$$

Производные всех слагаемых в правой части (62) уже найдены (см. формулы (45)–(50)).

Нужно лишь заметить, что лемма 3.1 остается верной и для функции $\varphi(t)$, определяемой равенством (58). Подставляя соответствующие значения, находим, что

$$\tilde{g}^{(k)}(0) = (-1)^{(k-1)/2}\frac{k!}{\pi}\int_\delta^\infty \frac{\ln t}{t^{k+1}}\,dt + (-1)^{k+1}\frac{k!}{2\pi}\operatorname{Re}\int_{|t|>\delta}\frac{\ln(1-f(t))}{(it)^{k+1}}\,dt$$
$$+(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t|\le\delta} t^{-1}\operatorname{Im}\left(i^{-k}\frac{d^k}{dt^k}\ln\varphi(t)\right)dt + \frac{1}{2}\operatorname{Re} i^{-k}\frac{d^k}{dt^k}\ln\varphi(t)\Big|_{t=0}\right)$$
$$-\frac{(-1)^{k+1}}{2\pi}\sum_{j=0}^{k-1}(k-j-1)!\operatorname{Re}\left(i^{-k-1}t^{j-k}\frac{d^j}{dt^j}\ln\varphi(t)\right)\Big|_{-\delta}^{\delta}, \qquad (63)$$

если k нечетные, и

$$\tilde{g}^{(k)}(0) = (-1)^{k/2}(k-1)!\frac{\delta^{-k}}{2} + (-1)^{k+1}\frac{k!}{2\pi}\operatorname{Re}\int_{|t|>\delta}\frac{\ln(1-f(t))}{(it)^{k+1}}\,dt$$
$$+(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t|\le\delta} t^{-1}\operatorname{Im}\left(i^{-k}\frac{d^k}{dt^k}\ln\varphi(t)\right)dt + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{d^k}{dt^k}\ln\varphi(t)\Big|_{t=0}\right)$$
$$-\frac{(-1)^{k+1}}{2\pi}\sum_{j=0}^{k-1}(k-j-1)!\operatorname{Re}\left(i^{-k-1}t^{j-k}\frac{d^j}{dt^j}\ln\varphi(t)\right)\Big|_{-\delta}^{\delta}, \qquad (64)$$

если k четные.

Сравнивая представления (55) и (63), видим, что они совпадают (правда, $\varphi(t)$ в них определяется по-разному). Представления (56) и (64) отличаются только знаком у первого слагаемого.

Используя формулы (62)–(64), мы в состоянии доказать следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть $a>0$, $\sigma^2>0$ и $\mathbf{E}|X|^m<\infty$, $m\ge 3$. Тогда*

$$\mathbf{E}Z_+^m = m!e^{-\tilde{g}(0)}\sum\frac{(-1)^{k_1+k_2+\dots+k_{m-1}}}{k_1!\dots k_{m-1}!}\left(\frac{\tilde{g}_1}{1!}\right)^{k_1}\dots\left(\frac{\tilde{g}_{m-1}}{(m-1)!}\right)^{k_{m-1}},$$

где суммирование производится по всем решениям в неотрицательных целых числах уравнения $k_1 + 2k_2 + \dots + (m-1)k_{m-1} = m-1$, *а* $i^{-k}\tilde{g}_k = (-1)^k \tilde{g}^{(k)}(0)$, $k = \overline{0, m-1}$, *определяется формулами* (62)–(64).

Доказательство. Полагая в (61) $k = m$, а затем используя формулу (35), приходим к представлению

$$\mathbf{E}Z_+^m = m! e^{-\tilde{g}} \sum \frac{(-1)^{k_1+k_2+\dots+k_{m-1}}}{k_1! \dots k_{m-1}!} \left(\frac{\tilde{g}_1}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{\tilde{g}_{m-1}}{(m-1)!}\right)^{k_{m-1}},$$

где $\tilde{g}_k = \tilde{g}^{(k)}(0)$, $\tilde{g} = \tilde{g}(0)$.

Заметим, что наибольший порядок производной $\tilde{g}^{(k)}(0)$ равен вследствие (61) не m, как в случае $a < 0$, а $m-1$. Именно поэтому здесь достаточно конечности момента $\mathbf{E}|X|^m$, а не $\mathbf{E}|X|^{m+1}$. Теперь для того чтобы закончить доказательство, нужно сослаться на (62)–(64). $\square$

3. Случай $a = 0$. Определим $\varphi(t)$ равенством

$$\varphi(t) = \frac{1 - f(t)}{t^2}. \tag{65}$$

Заметим, что для $\phi(t)$, определенной равенством (65), справедлива формула (50) при условии, что $\mathbf{E}|X|^{k+2} < \infty$.

В данном случае

$$\int\limits_{|t|\le\delta} \frac{\ln(1-f(t))}{h+it}\,dt = 2\int\limits_{|t|\le\delta} \frac{\ln t}{h+it}\,dt + \int\limits_{|t|\le\delta} \frac{\ln\varphi(t)}{h+it}\,dt.$$

Используя (40), имеем

$$\operatorname{Re}\int\limits_{|t|\le\delta} \frac{\ln t}{h+it}\,dt = h\int\limits_{|t|\le\delta} \frac{\ln t}{h^2+t^2}\,dt = -\pi\ln h - 2h\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{\ln t}{h^2+t^2}\,dt.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\le\delta} \frac{\ln(1-f(t))}{h+it}\,dt = -\ln h - \frac{2h}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{\ln t}{h^2+t^2}\,dt + \int\limits_{|t|\le\delta} \frac{\ln\varphi(t)}{h+it}\,dt.$$

Отсюда в силу (36)

$$\begin{aligned}\tilde{g}(h) = \frac{2h}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{\ln t}{h^2+t^2}\,dt - \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\int\limits_{|t|\le\delta} \frac{\ln\varphi(t)}{h+it}\,dt \\ - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|>\delta} \frac{\ln(1-f(t))}{h+it}\,dt - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathbf{P}(S_n = 0).\end{aligned} \tag{66}$$

Применяя теперь (47)–(50), получаем

$$\begin{aligned}\tilde{g}^{(k)}(0) = (-1)^{(k-1)/2}\frac{k!}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\ln t}{t^{k+1}}\,dt + (-1)^{k+1}\frac{k!}{2\pi}\operatorname{Re}\int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln(1-f(t))}{(it)^{k+1}}\,dt \\ + (-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\le\delta} t^{-1}\operatorname{Im}\left(i^{-k}\frac{d^k}{dt^k}\ln\varphi(t)\right)dt + \frac{1}{2}\operatorname{Re} i^{-k}\frac{d^k}{dt^k}\ln\varphi(t)\Big|_{t=0}\right) \\ - \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi}\sum_{j=0}^{k-1}(k-j-1)!\operatorname{Re}\left(i^{-k-1}t^{j-k}\frac{d^j}{dt^j}\ln\varphi(t)\right)\Big|_{-\delta}^{\delta},\end{aligned} \tag{67}$$

если k нечетные, и

$$\tilde{g}^{(k)}(0) = (-1)^{k/2}(k-1)!\frac{\delta^{-k}}{2} + (-1)^{k+1}\frac{k!}{2\pi}\operatorname{Re}\int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln(1-f(t))}{(it)^{k+1}}\,dt$$

$$+ (-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\le\delta} t^{-1}\operatorname{Im}\left(i^{-k}\frac{d^k}{dt^k}\ln\varphi(t)\right)dt + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{d^k}{dt^k}\ln\varphi(t)\Big|_{t=0}\right)$$

$$- \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi}\sum_{j=0}^{k-1}(k-j-1)!\operatorname{Re}\left(i^{-k-1}t^{j-k}\frac{d^j}{dt^j}\ln\varphi(t)\right)\Big|_{-\delta}^{\delta}, \quad (68)$$

если k четные.

Опираясь на формулы (66)–(68), можем доказать следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Пусть* $a=0$. *Тогда*

$$\mathbf{E}Z_+ = e^{-\tilde{g}(0)}, \quad (69)$$

если $0 \le \sigma^2 < \infty$. *Если же* $\mathbf{E}|X|^{m+1} < \infty$, $m \ge 2$, *то*

$$\mathbf{E}Z_+^m = m!e^{-\tilde{g}(0)}\sum\frac{(-1)^{k_1+k_2+\dots+k_{m-1}}}{k_1!\dots k_{m-1}!}\left(\frac{\tilde{g}_1}{1!}\right)^{k_1}\dots\left(\frac{\tilde{g}_{m-1}}{(m-1)!}\right)^{k_{m-1}}, \quad (70)$$

где суммирование производится по всем решениям в неотрицательных целых числах уравнения $k_1+2k_2+\dots+(m-1)k_{m-1} = m-1$, *а* $\tilde{g}_k = (-1)^k\tilde{g}^{(k)}(0)$, $k=\overline{1,m-1}$, *определяются формулами* (66)–(68).

Доказательство. Равенство (69) легко следует из (68). Доказательство (70) дословно повторяет доказательство предыдущей теоремы. Следует только заметить, что в данном случае $|\varphi^{(k)}(t)| < \frac{1}{(k+1)(k+2)}\mathbf{E}|X|^{k+2}$. Поэтому для конечности $\varphi^{(m-1)}(t)$ необходима конечность момента $\mathbf{E}|X|^{m+1}$. Этим объясняется более сильное моментное ограничение в теореме 3.3 по сравнению с теоремой 3.2. $\square$

В [14] доказано, что при $a=0$, $0<\sigma^2<\infty$

$$\lim_{s\downarrow 0}\left(\int\limits_{0-}^{\infty}e^{-sx}dG(x) + \ln s\right) = Q - \frac{1}{2}\ln\frac{\sigma^2}{2},$$

где $Q = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}\big[\mathbf{P}(s_n \ge 0) - \frac{1}{2}\big]$. Это означает, что

$$\tilde{g}(0) = Q - \frac{1}{2}\ln\frac{\sigma^2}{2}. \quad (71)$$

Формула (71), в частности, дает возможность вычислять сумму ряда Q для различных F. Если распределение F симметрично и непрерывно, то из (71) следует, что

$$\tilde{g}(0) = -\frac{1}{2}\ln\frac{\sigma^2}{2}. \quad (72)$$

Выражения для $g^{(k)}(0)$ и $\tilde{g}^{(k)}(0)$ упрощаются, если предположить интегрируемость функции $t^{-1}\operatorname{Im} i^{-k}\psi^{(k)}(t)$ на $(-\infty,\infty)$. Тогда имеем для $g^{(k)}(0)$ и $\tilde{g}^{(k)}(0)$ одно и тоже выражение

$$g^{(k)}(0) = \tilde{g}^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^{-1}\operatorname{Im}(i^{-k}\psi^{(k)}(t))\,dt + \frac{1}{2}\operatorname{Re} i^{-k}\psi^{(k)}(0)\right). \quad (73)$$

Оно получается путем перехода к пределу при $\delta \to \infty$ в формулах, определяющих $g^{(k)}(0)$ и $g_k^{(k)}(0)$. Дадим теперь другое выражение для интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{-1}\,\mathrm{Im}(i^{-k}\psi^{(k)}(t))\,dt.$$

С этой целью определим функцию

$$\tilde{\psi}_k(t) = t^{-k-1}\left(\psi(t) - \sum_0^{k-1}\psi^{(j)}(0)\frac{t^j}{j!}\right).$$

В дальнейшем нам понадобится

Лемма 3.2. *Пусть $f(t) \neq 1$ при $0 < |t| < \delta$. Тогда интеграл*

$$I_k := \int_{|t|<\delta} t^{-1}\,\mathrm{Im}(i^{-k}\tilde{\psi}_k(t))\,dt \tag{74}$$

определен, если $\mathbf{E}|X|^{k+1} < \infty$ при $a \neq 0$ и $\mathbf{E}|X|^{k+2} < \infty$ при $a = 0$.

Доказательство. Пусть $a \neq 0$. Используя формулу Тейлора с интегральной формой остаточного числа, имеем

$$\psi(t) - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\psi^{(j)}(0)}{j!}t^j = \frac{t^k}{(k-1)!}\int_0^1 (1-u)^{k-1}\psi^{(k)}(ut)\,dt.$$

Отсюда

$$I_k = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 (1-u)^{k-1}\int_{|ut|<\delta} t^{-1}\,\mathrm{Im}(i^{-k}\psi^{(k)}(t))\,dt.$$

Нетрудно убедиться, что $i^{-k}\prod_{j=1}^{k}(\varphi^{(j)}(t))^{m_j}$ есть преобразование Фурье функции, полная вариация которой не превосходит $\mathbf{E}|X|^{k+1}$.

Последовательно применяя теперь представление (53), лемму 2.6 и формулу (52), приходим к утверждению леммы для $a \neq 0$. Случай $a = 0$ доказывается аналогично. $\square$

Очевидно,

$$\int_{|t|<\delta}\frac{\psi^{(k)}(t)}{t}\,dt = \frac{\psi^{(k-1)}(t)}{t}\bigg|_{-\delta}^{\delta} + \int_{|t|<\delta}\frac{\psi^{(k-1)}(t) - \psi^{(k-1)}(0)}{t^2}\,dt.$$

Далее,

$$\int_{|t|<\delta}\frac{\psi^{(k-1)}(t) - \psi^{(k-1)}(0)}{t^2}\,dt = \frac{\psi^{(k-2)}(t) - \psi^{(k-2)}(0) - \psi^{(k-1)}(0)t}{t^2}\bigg|_{-\delta}^{\delta}$$
$$+ 2\int_{|t|<\delta}\frac{\psi^{(k-2)}(t) - \psi^{(k-2)}(0) - \psi^{(k-1)}(0)t}{t^3}\,dt.$$

Продолжая этот процесс, приходим к формуле

$$\int\limits_{|t|<\delta} t^{-1}\,\mathrm{Im}(i^{-k}\psi^{(k)}(t))\,dt = \mathrm{Im}\sum_{m=1}^{k}(m-1)!(it)^{-m}\Bigg(i^{m-k}\psi^{(k-m)}(t)$$

$$-\sum_{j=0}^{m-1} i^{m-k-j}\psi^{(k-m+j)}(0)\frac{(it)^j}{j!}\Bigg)\Bigg|_{-\delta}^{\delta} + k!\int\limits_{|t|<\delta} t^{-1}\,\mathrm{Im}(i^{-k}\tilde{\psi}_k(t))\,dt. \quad (75)$$

Очевидно, $t^{j-m}|_{-\delta}^{\delta} = 0$, если $j-m$ четное. Если $j-m$ нечетное, то $\mathrm{Im}\, i^{j-m}t^{j-m} = 0$. Поэтому

$$\mathrm{Im}\sum_{j=0}^{m-1} i^{-k-j}\psi^{(k-m+j)}(0)\frac{(it)^j}{j!}\Bigg|_{-\delta}^{\delta} = 0.$$

В результате получаем, что

$$\int\limits_{|t|<\delta} t^{-1}\,\mathrm{Im}(i^{-k}\psi^{(k)}(t))\,dt = \sum_{m=1}^{k}(m-1)!t^{-m}\,\mathrm{Im}(i^{-k}\psi^{(k-m)}(t))\big|_{-\delta}^{\delta}$$

$$+ k!\int\limits_{|t|<\delta} t^{-1}\,\mathrm{Im}(i^{-k}\tilde{\psi}_k(t))\,dt. \quad (76)$$

Заметим, что

$$\sum_{m=1}^{k}(m-1)!t^{-m}\,\mathrm{Im}(i^{-k}\psi^{(k-m)}(t))\big|_{-\delta}^{\delta} = \sum_{j=0}^{k-1}(k-j-1)!\,\mathrm{Re}\left(i^{-k-1}t^{j-k}\frac{d^j}{dt^j}\ln\varphi(t)\right)\Bigg|_{-\delta}^{\delta}. \quad (77)$$

Согласно определению $\varphi(t)$ при $a<0$

$$\int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln(1-f(t))}{(it)^{k+1}}\,dt = \int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln\varphi(t)}{(it)^{k+1}}\,dt + \int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln(it)}{(it)^{k+1}}\,dt. \quad (78)$$

Используя (38), находим, что

$$\int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln(it)}{(it)^{k+1}}\,dt = i^{-k-1}\int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln|t|}{t^{k+1}}\,dt + \begin{cases}\frac{\pi(-1)^{k/2}}{k}\delta^{-k}, & k=2m,\\ 0, & k=2m+1.\end{cases}$$

Отсюда

$$\mathrm{Re}\int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln(it)}{(it)^{k+1}}\,dt = \begin{cases}2(-1)^{(k+1)/2}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\ln t}{t^{k+1}}\,dt, & k=2m+1,\\ (-1)^{k/2}\pi k^{-1}\delta^{-k}, & k=2m.\end{cases} \quad (79)$$

Из (78) и (79) следует, что

$$\mathrm{Re}\int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln(1-f(t))}{(it)^{k+1}}\,dt = \mathrm{Re}\int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln\varphi(t)}{(it)^{k+1}}\,dt + 2(-1)^{(k+1)/2}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\ln t}{t^{k+1}}\,dt, \quad (80)$$

если k нечетное, и

$$\operatorname{Re}\int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln(1-f(t))}{(it)^{k+1}}\,dt=\operatorname{Re}\int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln\varphi(t)}{(it)^{k+1}}\,dt+(-1)^{k/2}\pi k^{-1}\delta^{-k},\tag{81}$$

если k четное.

Заметим, что

$$\operatorname{Re}\int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln\varphi(t)}{(it)^{k+1}}\,dt=\int\limits_{|t|>\delta}t^{-k-1}\operatorname{Im}(i^{-k}\psi(t))\,dt.\tag{82}$$

Далее,

$$\int\limits_{|t|>\delta}t^{-1}\operatorname{Im}(i^{-k}\tilde\psi_k(t))\,dt=\int\limits_{|t|>\delta}t^{-k-1}\operatorname{Im}(i^{-k}\psi(t))\,dt$$
$$-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{i^{-j}\psi^{(j)}(0)}{j!}\operatorname{Im}\Bigg(i^{j-k}\int\limits_{|t|>\delta}t^{j-k-1}\,dt\Bigg).$$

Для $j-k$ нечетного $\int\limits_{|t|>\delta}t^{j-k-1}\,dt=0$. Для $j-k$ четного $\operatorname{Im}\big(i^{j-k}\int\limits_{|t|>\delta}t^{j-k-1}\,dt\big)$ $=0$. Поэтому

$$\int\limits_{|t|>\delta}t^{-1}\operatorname{Im}(i^{-k}\tilde\psi_k(t))\,dt=\int\limits_{|t|>\delta}t^{-k-1}\operatorname{Im}(i^{-k}\psi(t))\,dt.\tag{83}$$

Подставляя теперь в (55), (56) вместо $\int\limits_{|t|>\delta}t^{-1}\operatorname{Im}(i^{-k}\psi^{(k)}(t))\,dt$, $\operatorname{Re}\int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln(1-f(t))}{(it)^{k+1}}\,dt$ и $\operatorname{Re}\int\limits_{|t|>\delta}\frac{\ln\varphi(t)}{(it)^{k+1}}\,dt$ выражения (76), (80), (81) и (83) и принимая во внимание (77) и (82), приходим к формуле

$$g^{(k)}(0)=(-1)^{k+1}k!\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^{-1}\operatorname{Im}(i^{-k}\tilde\psi_k(t))\,dt+2^{-1}\operatorname{Re}i^{-k}\tilde\psi_k(0)\right).\tag{84}$$

Мы учитывали здесь, что $\psi^{(k)}(0)=\tilde\psi_k(0)$. Отметим, что формула (84) в отличие от (73) не требует каких-либо ограничений на $\varphi(t)$, кроме тех, которые имеются в лемме 3.2. Формула (84) остается справедливой и в случае $a\ge 0$, если заменить $g^{(k)}(0)$ на $\tilde g^{(k)}(0)$.

Обратим внимание на то, что $(2i^{-1}\sigma^{-2})^k\psi^{(k)}(0)$ в случае $a=0$ есть в точности k-й семиинвариант случайной величины с характеристической функцией $\frac{2(1-f(t))}{\delta^2t^2}$. Если $a\ne 0$, то величины $i^{-k}\psi^{(k)}(0)$ также выражаются через моменты случайной величины X и могут быть названы обобщенными семиинвариантами.

Обозначим

$$\Gamma_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^{-1}\operatorname{Im}(i^{-k}\psi^{(k)}(t))\,dt,\quad \chi_k=\operatorname{Re}i^{-k}\psi^{(k)}(0).$$

В этих обозначениях $g_k=\tilde g_k=-\big(\Gamma_k+\frac12\chi_k\big)$. Выведем теперь в этих терминах формулы для нескольких первых моментов $b_m:=\mathbf{E}Z_+^m$.

Пусть $a = 0$. Тогда согласно теореме 3.3 $b_1 = e^{-\tilde{g}}$, где $\tilde{g} = \tilde{g}(0)$.

Далее, используя (73), находим $b_2 = -\tilde{g}_1 e^{-\tilde{g}} = (\Gamma_1 + (1/2)\chi_1)e^{-\tilde{g}}$; $b_3 = (\tilde{g}_1^2 - \tilde{g}_2)e^{-\tilde{g}} = ((\Gamma_1 + (1/2)\chi_1)^2 - \Gamma_2 - (1/2)\chi_2)e^{-\tilde{g}}$; $b_4 = -(\tilde{g}_3 - 3\tilde{g}_1 g_2 + \tilde{g}_1^3)e^{-\tilde{g}} = -(\Gamma_3 + (1/2)\chi_3 - 3(\Gamma_1 + (1/2)\chi_1)(\Gamma_2 + (1/2)\chi_2) + (\Gamma_1 + (1/2)\chi_1)^3)e^{-\tilde{g}}$; $b_5 = \big(\tilde{g}_4 - 3\tilde{g}_2^2 + 6\tilde{g}_1^2\tilde{g}_2 - 4\tilde{g}_1\tilde{g}_3 - \tilde{g}_1^4\big)e^{-\tilde{g}} = (\Gamma_4 + (1/2)\chi_4 - 3(\Gamma_2 + (1/2)\chi_2)^2 + 6(\Gamma_1 + (1/2)\chi_1)^2(\Gamma_2 + (1/2)\chi_2) - 4(\Gamma_1 + (1/2)\chi_1)(\Gamma_3 + (1/2)\chi_3) - (\Gamma_1 + (1/2)\chi_1)^4)e^{-\tilde{g}}$.

Аналогичные формулы имеют место и для $a \neq 0$. Если распределение F симметрично, то приведенные выше формулы значительно упрощаются. Дело в том, что в этом случае $\Gamma_k = 0$ для четных k и $\chi_k = 0$ для нечетных k. В результате имеем $b_2 = e^{-\tilde{g}}\Gamma_1$, $b_3 = e^{-\tilde{g}}(\Gamma_1^2 - (1/2)\chi_2)$, $b_4 = -e^{-\tilde{g}}(\Gamma_3 - (3/2)\Gamma_1\chi_2 + \Gamma_1^3)$, $b_5 = e^{-\tilde{g}}\big((1/2)\chi_4 - \frac{3}{4}\chi_2^2 + 3\chi_2\Gamma_1 - 4\Gamma_1\Gamma_3 - \Gamma_1^4\big)$.

Найдем теперь численные значения b_j, $j = \overline{1,5}$, для стандартного нормального закона. Для этого нам надлежит вычислить Γ_1, Γ_3 и χ_2, χ_4. Очевидно,

$$1 - e^{-t^2/2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^{2k}}{2^k k!}.$$

Отсюда

$$\varphi(t) = \frac{1 - e^{-t^2/2}}{t^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^{2(k-1)}}{2^k k!}. \tag{85}$$

Обозначим через μ_{2k} коэффициент при t^{2k} в разложении $\varphi(t)$ по степеням t. Вследствие (85) $\mu_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k+1}(k+1)!}$. Следовательно, $\mu_2 = 1/8$, $\mu_4 = 1/48$. Отсюда

$$\chi_2 = -\frac{\varphi^{(2)}(0)}{\varphi(0)} = 4\mu_2 = \frac{1}{2}, \quad \chi_4 = \frac{\varphi^{(4)}(0)}{\varphi(0)} - 3\frac{(\varphi^{(2)}(0))^2}{\varphi^2(0)} = 48\big(\mu_4 - \mu_2^2\big) = \frac{1}{4}.$$

Далее,

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\psi^{(1)}(t)}{t}\, dt, \quad \Gamma_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\psi^{(3)}(t)}{t}\, dt.$$

Вычисления показывают, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\psi^{(1)}(t)}{t}\, dt \simeq -1.83, \quad \int_0^{\infty} \frac{\psi^{(3)}(t)}{t}\, dt \simeq 0.521.$$

Отсюда $\Gamma_1 \simeq 0.583$, $\Gamma_3 \simeq 0.166$. Пользуясь полученными значениями и учитывая (72), находим $b_1 = \sqrt{2}$, $b_2 \simeq 0.583\sqrt{2} \simeq 0.824$, $b_3 \simeq 0.09\sqrt{2} \simeq 0.127$, $b_4 \simeq 0.073\sqrt{2} \simeq 0.103$, $b_5 \simeq 0.247\sqrt{2} \simeq 0.349$.

Замечание. В случае, когда распределение $F(x)$ нормально, можно получить для $\int\limits_0^{\infty} e^{-hx}\, dG(x) + \ln h$ представление в виде суммы функционального ряда, используя результаты работы [15]. Дифференцируя этот ряд, мы в принципе можем вычислить значения величин $\tilde{g}_k$.

Если распределение $F(x)$ шага в случайном блуждании имеет для $x > 0$ плотность вида

$$p(x) = \sum_{k=1}^{N} P_k(x) e^{-\alpha_k \gamma}, \tag{86}$$

где $P_k(x)$ — некоторые многочлены, а $\alpha_k > 0$, то преобразование Лапласа верхней лестничной высоты является рациональной функцией (см. в этой связи, например, [16]). Таким образом, проблема нахождения моментов $\mathbf{E}Z_+^m$ сводится к дифференцированию рациональной функции. Сам по себе класс распределений, для которых имеет место представление (86), довольно узок. В него, например, не входят распределения с тяжелым правым хвостом. Можно, однако, приближать $F(x)$ для $x > 0$ экспоненциальными многочленами типа (86) и получать в результате приближенное выражение для $\mathbf{E}\exp\{-hZ_+\}$. Однако при этом возникает проблема оценки точности приближения. Все сказанное в замечании требует специального исследования, которое выходит за рамки настоящей статьи. $\square$

Автор благодарит рецензента за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2.
2. *Алешкявичене А. К.* О вычислении моментов лестничных высот // Liet. Mat. Rink. 2006. V. 46, N 2. P. 159–179.
3. *Doney R. A.* Moments of ladder height in random walks // J. Appl. Probab. 1980. V. 17, N 1. P. 248–252.
4. *Chow Y. S., Lai T. L.* Moments of ladder variables for draftless random walks // Z. Wahrch. Verw. Gebiete. 1979. Bd 48. Heft 3. S. 253–257.
5. *Spitzer F.* A Tauberian theorem and its probability interpretation // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 94, N 1. P. 150–169.
6. *Lai T. L.* Asymptotic moments of random walks with applications to ladder variables and renewal theory // Ann. Probab. 1976. V. 4, N 1. P. 51–56.
7. *Нагаев А. В.* Об одном способе вычисления моментов лестничной высоты // Теория вероятностей и ее применения. 1985. Т. 30, № 3. С. 535–538.
8. *Нагаев С. В.* Формула для преобразования Лапласа проекции распределения на положительную полуось и некоторые ее применения // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 5. С. 688–702.
9. *Нагаев С. В., Пинелис И. Ф.* Некоторые неравенства для распределений сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1977. Т. 22, № 2. С. 254–263.
10. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
11. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
12. *Нагаев С. В., Ходжабагян С. С.* Об оценке функции концентрации для сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1996. Т. 41, № 3. С. 655–665.
13. *Stam A. J.* Some theorems on harmonic renewal measures // Stochastic Process. Appl. 1991. V. 39, N 2. P. 277–285.
14. *Nagaev S. V.* Asymptotic formulas for probabilities of large deviations of ladder heights // Theory Stoch. Process. 2008. V. 14, N 1. P. 100–116.
15. *Lotov V. I.* On some boundary crossing problems for Gaussian random walks // Ann. Probab. 1996. V. 24, N 4. P. 2154–2171.
16. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.

Статья поступила 16 апреля 2009 г.

Нагаев Сергей Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
nagaev@math.nsc.ru, nagaevs@hotmail.com, nagaevs@academ.org